

Higher National School of Hydraulic

The Library

Digital Repository of ENSH



المدرسة الوطنية العليا للري

المكتبة

المستودع الرقمي للمدرسة العليا للري



The title (العنوان):

**Etude comparative des méthodes numériques avec calcul
d'erreurs en régime transtoire en charge.**

The paper document Shelf mark (الشفرة) : 7-0001-16

APA Citation (APA توثيق):

**Flici, Karima (2016). Etude comparative des méthodes numériques avec calcul
d'erreurs en régime transtoire en charge[Thèse de magister, ENSH].**

The digital repository of the Higher National School for Hydraulics "Digital Repository of ENSH" is a platform for valuing the scientific production of the school's teachers and researchers.

Digital Repository of ENSH aims to limit scientific production, whether published or unpublished (theses, pedagogical publications, periodical articles, books...) and broadcasting it online.

Digital Repository of ENSH is built on the open DSpace software platform and is managed by the Library of the National Higher School for Hydraulics. <http://dspace.ensh.dz/jspui/>

المستودع الرقمي للمدرسة الوطنية العليا للري هو منصة خاصة بثمين الإنتاج العلمي لأساتذة و باحثي المدرسة.

يهدف المستودع الرقمي للمدرسة إلى حصر الإنتاج العلمي سواء كان منشورا أو غير منشور (أطروحات، مطبوعات، بيداغوجية، مقالات الدوريات، كتب....) و بثه على الخط.

المستودع الرقمي للمدرسة مبني على المنصة المفتوحة DSpace و يتم إدارته من طرف مديرية المكتبة للمدرسة العليا للري.

كل الحقوق محفوظة للمدرسة الوطنية العليا للري.



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'HYDRAULIQUE
ARBAOUI ABDELLAH

N° d'ordre

Série.....

MEMOIRE DE MAGISTER

Option : Génie de l'eau

Présenté par :

FLICI Karima

Thème :

**Etude comparative des méthodes numériques avec calcul d'erreurs en
régime transitoire en charge**

Devant le jury composé de :

M.MEDDI	Professeur	Président.
B.SALAH	Professeur	Rapporteur.
M.K.MIHOUBI	Professeur	Examineur.
O.KHODJET KESBA	Professeur	Examineur.
B.BENLAOUKLI	Maitre de Conférences (A)	Examineur.

Année Universitaire : 2015/2016

Remerciements

Avant tout, nous remercions le bon Dieu qui a illuminé notre chemin et qui nous a armés de force et de sagesse, ainsi que de bonne volonté pour achever ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à mon promoteur SALAH Bouealem, pour sa disponibilité et ses précieux conseils, pour son aide morale et documentaire. Je dirai simplement que je suis très honoré d'être dirigée par lui. Que ses compétences et connaissances dans la direction de ce travail trouve ici l'assurance de ma reconnaissance la plus sincère.

Je remercie également le président de jury Mr M.MEDDI pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury du présent travail, ainsi que les membres de jury : Mr M.K.MIHOUBI, Mr O.KHODJET KESBA et Mr B.BENLAOUKLI pour avoir accepté d'examiner ce travail et d'apporter leur appoint qui ne saura qu'être bénéfique à mon égard.

Il est particulièrement agréable de témoigner ma reconnaissance à tous ceux qui ont servi de près ou de loin pour l'élaboration de ce travail, j'en citerai parmi d'autres Mr M.MAHIEDDINE, espérant qu'il trouvera dans ces quelques lignes l'expression de ma très haute considération, mon profond respect ainsi que ma sincère reconnaissance, non seulement pour sa générosité mais aussi pour ses qualités humaines.

Karima FLICI

ملخص:

السيلا نات الانتقالية المضغوطة الناتجة عن تغيرات النظام الأولي الدائم تؤدي غالبا إلى نتائج وخيمة بالنسبة للسير الجيد للتجهيزات الهيدروليكية، كما ينتج عنها انفجار الأنابيب وقد تؤدي أحيانا إلى خسائر بشرية، لذلك من الضروري الاهتمام بدراسة هذه الظواهر الانتقالية. من أجل التقليل من هذه الآثار، تهدف دراستنا إلى المقارنة بين مختلف الطرق الرقمية التي تسمح بحل المعادلات التي تخضع لها الظاهرة الانتقالية. هذه المقارنة ستبين لنا الطريقة المثلى لحساب النظام الانتقالي بأقل نسبة من الأخطاء، مما سيسمح لنا بتحديد الأماكن الأكثر تعرضا للخطورة و من ثم يمكننا ترقيب الأجهزة الوقائية المناسبة.

الكلمات الرئيسية :

السيلا نات الانتقالية، الطرق الرقمية، دراسة المقارنة، حساب الأخطاء.

Résumé:

Les écoulements transitoires en charge provoqués par les variations du régime permanent initial, conduisent souvent à des conséquences néfastes pour le bon fonctionnement des installations hydrauliques. Il se produit ainsi des implosions ou des explosions des conduites voire même des pertes de vie humaine, d'où la nécessité d'une analyse fine de ces phénomènes transitoires.

Afin de minimiser ces conséquences, notre travail a pour but de faire une étude comparative entre les différentes méthodes numériques, permettant la résolution des équations régissant le phénomène transitoire. Cette comparaison pourra indiquer par la suite celle qui donne des résultats plus efficaces (débit et pression) et qui s'approchent de la réalité physique du problème avec une faible erreur (modélisation optimale du coup de bélier) ; ce qui permettra par la suite de déterminer les endroits à grand risques, c'est-à-dire là où les pressions en régime transitoire dépassent les limites prescrites, ainsi, à prévoir les dispositifs nécessaires et adéquats de protection.

Mots clés :

Écoulements transitoires, étude comparative, méthodes numériques, calcul d'erreurs.

Abstract:

The transient flows in closed conduct resulting from the variations of initial steady state, lead often to fatal consequences for the good functioning of hydraulic systems, and it produces implosions or explosions of the pipes or even loss of life, hence the need for a detailed analysis of these phenomena.

In order to reduce these effects, the aim of our work is to make a comparative study between the different numerical methods for solving the equations governing transient phenomenon. This comparison will be able to indicate the method which gives more effective results (flow and pressure) which approach the physical reality of problem with a minimal percentage of errors (optimal modeling of water hammer), which will allow to identify the most places exposed to dangerous, i.e. where the pressures transient exceed the prescribed limits, so, to envisage the adequate and necessary devices of protection.

Key words:

Transient flows, comparative study, numerical methods, error analysis.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	01
------------------------------------	----

Chapitre-1-

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LE REGIME TRANSITOIRE

1.1. Introduction	03
1.2. Travaux antérieurs	03
1.3. Conclusion	16

Chapitre-2-

ANALYSE DU REGIME TRANSITOIRE EN CHARGE

2.1. Introduction	18
2.2. Interprétation physique du phénomène de coup de bélier	18
2.3. Risques et dommages conséquents aux coups de bélier	20
2.4. Protection anti bélier	21
2.4.1. Agir sur la vitesse des manœuvres	21
2.4.2. Installer des dispositifs de protection	22
a) Volant d'inertie	22
b) Ballon antibélier (contacte directe eau-air)	22
c) Ballon antibélier (sans contacte eau-air)	23
d) Amortisseur en ligne	23
2.5. Les equations fondamentales régissant les ecolements transitoires en charge	23
2.5.1. L'équation de continuité	25
2.5.2. L'équation dynamique	26
2.6. Discussion des équations de Saint Venant	29
2.7. Célérité d'ondes des coups de bélier	30
2.7.1. Expression générale de la célérité d'onde de coup de bélier	30
2.7.2. Expression de la célérité d'onde de coup de bélier pour les conduites non enterrées	31
2.7.2.1. Conduites à paroi minces élastiques	32
2.7.2.2. Conduites à paroi épaisses élastiques	34
2.7.2.3. Conduites en béton armé et précontraint	34
2.7.3. Expression de la célérité d'onde de coup de bélier pour les conduites enterrées ...	35

2.8. Conclusion	37
-----------------------	----

Chapitre-3-

METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DU REGIME TRANSITOIRE

3.1. Introduction	38
3.2. Quelques définitions	38
3.2.1. Consistance, stabilité et convergence	38
3.2.2. Le théorème de Lax	39
3.2.3. Schéma numérique	39
3.2.4. Ordre d'un schéma numérique.....	40
3.2.5. Stabilité d'un schéma numérique	40
3.3. Equations d'Alliévi	41
3.4. Méthode graphique	43
3.5. Les méthodes numériques	44
3.5.1. Méthode des éléments finis.....	44
3.5.2. Méthode des volumes finis.....	45
3.5.3. Méthode des différences finies	45
3.5.3.1. Les différences finies explicites	48
a) Schéma de Mac Cormack	50
b) schéma de Lambda	52
c) Schéma de Gabutti	54
3.5.3.2. Les différences finies implicites	55
3.5.4. Méthode des caractéristiques	55
3.6. Conditions aux limites	59
3.6.1. Conditions aux limites au niveau d'un réservoir	62
3.6.2. Conditions aux limites au niveau d'une vanne.....	62
3.6.3. Appareil imposant une fonction connue du débit	63
3.6.4. Pompe centrifuge	63
3.6.5. Bout mort	63
3.7. Conclusion et étude comparative	63

Chapitre -4-

INTERPOLATION DE LA METHODE DES CARACTERISTIQUES ET CALCUL D'ERREURS

4.1. Introduction	65
4.2 Intégration du système différentielle	65
4.3. Différents schémas numériques issus de la méthode des caractéristiques	71
4.3.1. Schéma avec interpolation spatiale	71
4.3.1.1. La méthode d'Hartree	71
4.3.1.2. La méthode de Price et Vardy	72
4.3.1.3. La modification de Streeter	72
4.3.2. Schémas avec interpolation temporelle	73
4.3.2.1. Schéma à un pas de temps	73
4.3.2.2. Schéma avec remontée dans le temps	73
4.4. Interpolation numérique	75
4.5. Autre méthode d'analyse du phénomène	79
4.5.1. Interpolation temporelle	79
4.5.2. Interpolation spatiale	83
4.6. Détermination de l'erreur due à l'interpolation temporelle	84
4.7. Conclusion.....	87

Chapitre -5-

ETUDE D'UN CAS ET INTERPRETATION DES RESULTATS

5.1 Introduction.....	88
5.2. Programmes et organigrammes de calcul	88
5.2.1 Pour la méthode des caractéristiques	88
5.2.2 Pour le schéma de MacCormack	91
5.3. Applications numériques	93
5.3.1 Application N°1	95
5.3.1.1 Fermeture brusque de l'obturateur	95
a) Cas sans pertes de charge	95

b) Cas avec pertes de charge	96
5.3.1.2 Fermeture rapide de l'obturateur	99
a) Cas sans pertes de charge	99
b) Cas avec pertes de charge	100
5.3.1.3 Fermeture lente de l'obturateur.....	101
a) Cas sans pertes de charge	101
b) Cas avec pertes de charge	102
5.3.2. Application N°2	104
5.3.2.1. Fermeture brusque de l'obturateur	104
a) Cas sans pertes de charge	105
b) Cas avec pertes de charge	106
5.3.2.2. Fermeture rapide de l'obturateur	106
a) Cas sans pertes de charge	107
b) Cas avec pertes de charge	108
5.3.2.3. Fermeture lente de l'obturateur	109
a) Cas sans pertes de charge	109
b) Cas avec pertes de charge	110
5.3.3 Application N°3	110
5.3.3.1 Fermeture brusque de l'obturateur	111
a) Cas sans pertes de charge	111
b) Cas avec pertes de charge	112
5.3.3.2 Fermeture rapide de l'obturateur	113
a) Cas sans pertes de charge	113
b) Cas avec pertes de charge	114
5.3.3.3 Fermeture lente de l'obturateur	114
a) Cas sans pertes de charge	114
b) Cas avec pertes de charge	116
5.4. Conclusion.....	116
Conclusion générale	118
Références bibliographiques	120
Annexes	

Liste des figures

Chapitre-2-

ANALYSE DU REGIME TRANSITOIRE EN CHARGE

Figure (2.1) : Schéma d'une conduite à caractéristique unique avec un réservoir en amont et un obturateur à l'aval	18
Figure (2.2) : Forces exercées sur une conduite en équilibre statique	24
Figure (2.3) : Forces exercées sur un volume de contrôle liquide	27
Figure (2.4) : déplacement d'une onde non amortie	30
Figure (2.5) : Pourcentage d'augmentation de la célérité pour les tuyaux enterrés	35

Chapitre-3-

METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DU REGIME TRANSITOIRE

Figure (3.1) : Solutions exacte, numérique et discrète.....	39
Figure (3.2) : Schéma d'une conduite en charge	42
Figure (3.3) : Quadrillage du plan (x, t).....	46
Figure (3.4) : Schéma de type explicite	49
Figure (3.5) : Schéma de discrétisation du domaine.....	50
Figure (3.6) : Schéma de type implicite.....	55
Figure (3.7) : Lignes caractéristiques dans le plan (x, t) (Chaudhry, 1979).....	59
Figure (3.8) : Frontières du domaine et point fictifs de calcul.....	59
Figure (3.9) : Droites caractéristiques aux limites du domaine (Wylie et Streeter, 1978)....	61

Chapitre -4-

INTERPOLATION DE LA METHODE DES CARACTERISTIQUES ET CALCUL D'ERREURS

Figure (4.1) : discrétisation de la conduite	66
Figure (4.2) : réseau de caractéristiques pour le calcul de régime transitoire (Chaudhry, 1979).....	70

Figure (4.3) : interpolation des variables, H et Q aux pieds des caractéristiques.....	71
Figure (4.4) : interprétation de Hartree.....	72
Figure (4.5) : interprétation de Price et Vardy.....	72
Figure (4.6) : Amélioration du schéma spatial par Streeter.....	73
Figure (4.7) : Schéma implicite dans le pas de temps courant.....	73
Figure (4.8) : Schéma explicite avec remontée dans le temps.....	74
Figure 4.9 : Schéma du dispositif étudiée.....	74
Figure (4.10) : méthode d'interpolation pour l'intervalle de temps spécifique	75
Figure (4.11) : Interpolation entre deux points.....	79
Figure (4.12) : amortissement de F app, $\xi = 0,5$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et m variable.....	82
Figure (4.13) : amortissement de F ex, $\xi = 0$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et m variable.....	83
Figure (4.14) : fonction erreur, $\xi = 0,5$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et m=1.....	84
Figure (4.15) : fonction erreur, $\xi = 0,5$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et m=3.....	85
Figure (4.16) : fonction erreur, $\xi = 0,5$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et m=8.....	85
Figure (4.17) : fonction erreur, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,1s$, m = 5 et ξ variable.....	86
Figure (4.18) : fonction erreur, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,1s$, m = 4 et ξ variable.....	86
Figure (4.19) : fonction erreur, $T=0.4s$, $\Delta t = 1s$, m = 5 et ξ variable.....	87

Chapitre -5-

ETUDE D'UN CAS ET INTERPRETATION DES RESULTATS

Figure (5.1) : Organigramme de résolution par la MDC	90
Figure (5.2) : Organigramme de résolution par le schéma de MacCormack	93
Figure (5.3) : Schéma de l'installation étudiée	94
Figure (5.4) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, sans pdc. $L=600m$, $a=1000$ m/s).....	95
Figure (5.5) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, avec pertes de charge. $L=600m$, $a=1000$ m/s).....	97
Figure (5.6) : Avancement du front d'onde le long de la conduite par la MDC.....	98
Figure (5.7) : Avancement du front d'onde le long de la conduite par le schéma de MacCormack.....	98
Figure (5.8) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture rapide, sans pertes de charge. $L=600m$, $a=1000$ m/s).....	99
Figure (5.9) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture rapide, avec pertes	

de charge. $L=600\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$).....	100
Figure (5.10) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture lente, sans pertes de charge. $L=600\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$).....	101
Figure (5.11) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture lente, avec pertes de charge. $L=600\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$).....	103
Figure (5.12) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, sans pdc. $L=1800\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$).....	105
Figure (5.13) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, avec pdc. $L=1800\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$).....	106
Figure (5.14) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture rapide, sans pdc. $L=1800\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$).....	107
Figure (5.15) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture rapide, avec pdc. $L=1800\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$).....	108
Figure (5.16) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture lente, sans pdc. $L=1800\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$).....	109
Figure (5.17) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture lente, avec pdc. $L=1800\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$).....	110
Figure (5.18) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, sans pdc. $L=600\text{m}$, $a=1200\text{ m/s}$)	111
Figure (5.19) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, avec pdc. $L=600\text{m}$, $a=1200\text{ m/s}$).....	112
Figure (5.20) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture rapide, sans pdc. $L=600\text{m}$, $a=1200\text{ m/s}$).....	113
Figure (5.21) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture rapide, avec pdc. $L=600\text{m}$, $a=1200\text{ m/s}$).....	114
Figure (5.22) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture lente, sans pdc. $L=600\text{m}$, $a=1200\text{ m/s}$).....	115
Figure (5.23) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture lente, avec pdc. $L=600\text{m}$, $a=1200\text{ m/s}$).....	116

Liste des tableaux

Chapitre-2-

ANALYSE DU REGIME TRANSITOIRE EN CHARGE

Tableau (2.1) : Récapitulation de l'évolution des paramètres hydrauliques dans la conduite en fonction du temps	20
Tableau (2.2) : variation de la célérité d'onde en fonction de l'état d'ancrage de la conduite.....	33

Chapitre-3-

METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DU REGIME TRANSITOIRE

Tableau (3.1) : Divers types de schémas numériques.....	48
--	----

Chapitre -5-

ETUDE D'UN CAS ET INTERPRETATION DES RESULTATS

Tableau (5.1) : Données relatives au cas d'étude.....	95
Tableau (5.2) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, sans pertes de charge).....	96
Tableau (5.3) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, avec pertes de charge).....	97
Tableau (5.4) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, sans pertes de charge).....	100
Tableau (5.5) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, avec pertes de charge).....	101
Tableau (5.6) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, sans pertes de charge).....	102
Tableau (5.7) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, avec pertes de charge)	103
Tableau (5.8) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, sans pertes de charge).....	105

Tableau (5.9) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, avec pertes de charge).....	106
Tableau (5.10) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, sans pertes de charge).....	107
Tableau (5.11) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, avec pertes de charge).....	108
Tableau (5.12) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, sans pertes de charge).....	109
Tableau (5.13) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, avec pertes de charge).....	110
Tableau (5.14) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, sans pertes de charge).....	111
Tableau (5.15) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, avec pertes de charge).....	112
Tableau (5.16) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, sans pertes de charge).....	113
Tableau (5.17) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, avec pertes de charge).....	114
Tableau (5.18) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, sans pertes de charge).....	115
Tableau (5.19) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, avec pertes de charge).....	116

introduction générale

Introduction générale

Le régime transitoire est la variation dans le temps et dans l'espace de tous les paramètres hydrauliques, notamment la vitesse et la pression, suite à une perturbation de régime d'écoulement permanent soit par une fermeture brutale d'un robinet vanne, un arrêt brusque d'une pompe... etc. Si cette variation est trop importante, il s'agit alors d'un coup de bélier.

Ces phénomènes représentent un problème capital dans le domaine de l'hydraulique surtout dans les grandes installations tel que les centrales hydroélectriques et les stations de pompage où les dimensions des conduites sont très importantes et où le phénomène du coup de bélier peut être à l'origine de dégâts énormes qui peuvent être mortelles dans certains cas. C'est pourquoi, il est primordial d'étudier ces phénomènes afin de réduire leurs effets par l'utilisation de dispositifs de protection adéquats et le dimensionnement correct des différents composants d'une installation.

Pour répondre à cette exigence, nous devrions passer par la résolution des équations régissant le phénomène transitoire dites équations de Saint Venant, qui constituent un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type hyperbolique. L'intégration exacte de ces équations étant très complexe, leur solution analytique est rare, c'est pourquoi plusieurs approches ont été développées : expérimentale, théorique et numérique. L'approche expérimentale est la plus réaliste. Cependant elle est la plus coûteuse et peut poser des problèmes d'échelles et des difficultés liées aux mesures, ce qui peut fausser les résultats, le principal défaut de l'approche théorique est qu'il est souvent nécessaire de simplifier la géométrie de l'objet étudié de plus, les problèmes non linéaires ne peuvent pas être traités par ce dernier. L'approche numérique permet le traitement des géométries complexes et des équations non linéaire, c'est pourquoi nous allons faire recours à l'application de quelques méthodes numériques permettant le traitement informatique de ces équations. Malgré la supériorité de ces dernières, les méthodes numériques présentent des erreurs lorsque le maillage établi ne recoupe pas les points de calcul ; pour cela, nous allons consacrer tout un chapitre pour rendre la notion calcul d'erreurs plus claire et cela, en utilisant l'une des méthodes numériques, fréquemment utilisée en pratique.

Notre initiation à la recherche dans ce présent document, a été élaborée selon les étapes suivantes :

Le premier chapitre aura pour objectif de présenter une synthèse bibliographique concernant le régime transitoire et les différentes méthodes numériques permettant de le résoudre.

Le deuxième chapitre sera consacré à la modélisation mathématique des écoulements transitoires en charge. En premier lieu, il sera procédé à la détermination des équations de base régissant les écoulements transitoires, par la suite, nous allons représenter quelques travaux qui ont été consacrés pour la détermination d'un paramètre très important qui est bien la célérité d'onde.

Dans le troisième chapitre, nous allons présenter quelques méthodes permettant la résolution des équations régissant le phénomène transitoire, une étude comparative entre ces méthodes sera faite, afin de choisir celles qui répondra le plus à notre problématique.

Pour le quatrième chapitre, nous allons présenter l'une des méthodes les plus utilisées dans les calculs, il s'agit de la méthode des caractéristiques, son interpolation et le calcul d'erreurs causés lors de son application.

Enfin, le cinquième et le dernier chapitre, qui sera consacré pour l'étude d'un cas souvent rencontré en pratique en utilisant deux méthodes numériques différentes, cela pour différents types de fermetures de l'organe d'obturation, avec et sans pertes de charges, puis nous allons choisir la meilleure méthode selon l'interprétation des résultats obtenus à la suite d'une comparaison.

Notre travail sera accompli par une conclusion générale sur les résultats obtenus.

Chapitre-1-

**ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LE
REGIME TRANSITOIRE**

Chapitre-1-

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LE REGIME TRANSITOIRE

1.1. Introduction

L'écoulement transitoire est un phénomène, pratiquement, le plus répandu dans les réseaux d'eau sous pression ou à surface libre, qui apparaît selon la prépondérance, fonction du temps et de l'espace et des paramètres hydrauliques régissant l'écoulement. Lorsque les variations de ces paramètres sont importantes, on parle du coup de bélier qui est une phase du régime transitoire. Très peu maîtrisé en pratique, le régime transitoire peut causer des endommagements des réseaux d'eau sous pression tels que les éclatements, les implosions, les fissurations sous diverses formes, et les aspirations des joints. En pratique, les causes provoquant le régime transitoire, sont très diverses, dont les plus répandues sont les manœuvres des vannes et les arrêts et démarrages des pompes. Les accessoires raccordés aux conduites, jouant le rôle de bouts morts ou d'obstacles, ne font qu'accroître ce phénomène. Vu sa nocivité en pratique, le régime transitoire a été curieusement la cible de plusieurs travaux de recherche.

1.2. Travaux antérieurs

Le phénomène transitoire apparaît non seulement dans les écoulements en charge mais aussi dans les écoulements à surface libre. Pour cela, différents travaux expérimentaux conduits aux laboratoires par plusieurs chercheurs ont permis de mettre en lumière les pressions élevées qui accompagnent généralement les écoulements transitoires et les conséquences néfastes de l'existence de ce phénomène dans les réseaux de drainage pluviaux.

En 1979 Chaudhry a présenté dans son livre un historique de coup de bélier, où il a mentionné que l'étude de phénomène transitoire a commencé il y a plusieurs années avec les recherches effectuées par Newton, Lagrange, Laplace, Euler et d'autres, dans un contexte très général, tel que : la propagation des ondes sonores, propagation des vagues dans les canaux, l'écoulement du sang dans les artères...etc.

D'après Chaudhry, Newton et Lagrange (1687) ont étudié la vitesse des ondes sonores dans l'air, ils ont obtenu des résultats théorique et expérimentale divergentes, dont ils n'ont pas pu expliquer cet écart, la réelle raison de cette différence n'a été apportée qu'en 1808

par Laplace qui a signalé que la relation théorique établie par Newton et Lagrange était basée sur la loi de Boyle et qui ne s'applique plus quand on a une variation de la pression, puisque la température de l'air ne restait pas constante.

En 1759, Euler « De la Propagation du Son » a développé une théorie détaillée de la propagation d'ondes élastiques. Il a abouti à une équation aux dérivées partielles et il a même donné une solution générale à cette équation.

Les premières investigations directes relatives au coup de bélier ont été effectuées par Young en 1808, il fût le premier à introduire dans ses travaux la théorie de l'élasticité dans son célèbre article : « Hydraulic Investigations, Subservient to an Intended Croonian Lecture on the Motion of the Blood » où il a pu exprimer la célérité de propagation d'une onde « a » dans un fluide incompressible :

$$a = \sqrt{\frac{Ee}{\rho D}} \quad (1.1)$$

Tel que:

ρ : Masse volumique de fluide ;

E : Module d'élasticité de tuyau ;

e : Epaisseur du tuyau ;

D : Diamètre du tuyau.

Il a aussi établi une forme implicite de la formule de Joukowski, au début pour un solide puis il a étendu sa théorie dans le domaine fluide. Young a trouvé que la contrainte produite par un impact dans un solide élastique est :

$$\sigma = -\rho\alpha u \quad (1.2)$$

Où :

α : vitesse du son dans un solide

u : vitesse de la collision

Weber (1866) étudia l'écoulement incompressible dans une conduite élastique et détermina la vitesse de propagation des ondes de pression. De plus, il développa l'équation de continuité et l'équation de la dynamique qui décrivent le mouvement unidirectionnel.

Marey (1875) « Mouvement des Ondes Liquides pour Servir à la Théorie du Pouls » a mené une série d'expériences considérable, pour déterminer la vitesse de propagation de l'onde de pression dans deux fluides différents (l'eau et le mercure), il a constaté que la vitesse de propagation est :

1. Indépendante de l'amplitude de l'onde de pression ;
2. Trois fois plus importante dans le mercure que dans l'eau ;
3. Proportionnelle à l'élasticité de tube.

Resal (1876) « Note sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique » a développé l'équation de continuité, de dynamique et l'équation de propagation de second ordre. Il a utilisé les résultats des expériences de Marey pour vérifier ses études analytiques.

Lord Rayleigh (1877) a publié son livre « Theory of Sound » où il a présenté les travaux antérieurs et ses recherches actuelles.

Kortweg (1878) était le premier qui a déterminé la vitesse de propagation en considérant l'élasticité du fluide et celle des parois de la conduite, il a obtenu la formule suivante :

$$a = \sqrt{\frac{\frac{K.e}{\rho.D}}{1 + \left(\frac{E.e}{K.D}\right)}} \quad (1.3)$$

Dont laquelle K représente la compressibilité de l'eau, E le module d'élasticité du tuyau.

Michaud (1878), étudia le problème du coup de bélier proprement dit. Il proposa déjà des chambres à air et des vannes de sécurité.

Les deux ingénieurs Américains Weston « Description of Some Experiments Made on the Providence » et Carpenter (1885) « Experiments on Waterhammer » ont réalisé plusieurs expériences pour établir une relation théorique de diminution de la vitesse correspondante à l'augmentation de la pression dans une conduite, mais ils n'ont pas eu de résultats parce que les conduites utilisées ont des faibles longueurs. Pour remédier à ce problème, Frizell (1898) « Pressures Resulting from Changes of Velocity of Water in Pipes » a essayé de développer

une expression reliant le changement de pression dû au changement de vitesse dans une conduite lors d'une fermeture instantané de la vanne. Il a présenté une analyse du coup de bélier basée sur des études qu'il a entreprises avec une longueur de la conduite forcée de 9449 m. Il a en fait réussit dans ses efforts. Cependant, des travaux semblables par ses contemporains Joukowsky et Allievi ont pu attirer la plus grande attentions.

Joukowski (1897) a réalisé une série d'expériences à Moscow, basées sur ses études théoriques et expérimentales, il a élaboré la formule bien connue dans les écoulements instationnaires, appelée souvent « équation fondamentale du coup de bélier ». Cette formule s'écrit comme suit :

$$\Delta P = \pm \rho \cdot \mu \cdot \Delta V \quad (1.4)$$

Où :

μ : Vitesse de l'onde acoustique

P : Pression,

ρ : Masse volumique du fluide

ΔV : Vitesse moyenne à travers la section transversale de la conduite

Joukowski a étudié l'effet des cheminées d'équilibre et soupapes de sécurité sur la pression, il a même étudié l'effet de taux de fermeture de la vanne, il a trouvé que la surpression est maximale pour une durée de fermeture $T \leq 2L/a$, où : L représente la longueur de la conduite et a c'est la vitesse de propagation de l'onde.

Allievi est le premier à pouvoir interpréter avec une rigueur mathématique le phénomène physique du coup de bélier, il est considéré comme étant le fondateur de la théorie du coup de bélier. En 1902, Allievi publia sa théorie générale sur les coups de bélier. Il présenta des abaques permettant de déterminer facilement les extrêmes de pression suite à une ouverture ou fermeture linéaire de l'obturateur. L'équation de la dynamique qu'il a développé est plus correcte que celle de Kortweg, il a montré que le terme $V(\partial V/\partial X)$ dans l'équation de la dynamique n'est pas important comparativement aux autres termes, donc il peut être négligé, il introduisait deux paramètres adimensionnels :

$$\begin{cases} \omega = \frac{aU_0}{2gH_0} \\ \tau = \frac{aT}{2L} \end{cases} \quad (1.5)$$

ω : rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle ;

τ : caractéristique de la fermeture de la vanne ;

Allievi a étudié le coup de bélier en se basant sur la forme originale suivante donnant la célérité de propagation de l'onde ;

$$\frac{1}{a_0^2} = \rho \left[\frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} \right] \quad (1.6)$$

Où $\frac{d\rho}{\rho dP}$ et $\frac{dS}{S dP}$ représentent respectivement la compressibilité du liquide et la déformabilité de la conduite. Ainsi pour l'eau, il conclut l'expression suivante :

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + \nabla \frac{D}{e}}} \quad (1.7)$$

Dans cette expression le coefficient ∇ tient compte de la nature du matériau formant la canalisation dont ;

$\nabla = 0.5$ pour l'acier et le fer

$\nabla = 1$ pour la fonte

$\nabla = 5$ pour le plomb

Cette relation repose sur quelques hypothèses à savoir :

- Conduite à parois minces et élastiques obéissant à la loi d'Hooke
- Conduite comportant plusieurs joints, avec les efforts longitudinaux considérés nuls.
- Température de l'eau supposée constante.

Plusieurs auteurs ont repris les résultats fondamentaux obtenus par Allievi et ont étudié l'application aux problèmes particuliers posés par les conditions usuelles de la pratique courante (conduites forcées, conduites de refoulement, etc....).

Le travail publié par Camichel, Eydoux et Gariel (1916, 1917) avait pour objet de résumer les études théoriques et expérimentales du coup de bélier, qu'ils ont poursuivi pendant plusieurs années à l'Institut Électrotechnique de Toulouse et à l'Usine Hydroélectrique de Soulom et qui ont nécessité plus de trois mille expériences distinctes. Ils ont introduit la méthode de la dépression brusque imaginée et étudiée par Camichel pour déterminer la célérité d'onde, il s'agit d'une méthode de répétition dans laquelle plusieurs allers et retours d'onde sont enregistrés, le but étant de réaliser un graphique représentant la variation de la pression en fonction du temps pour une conduite à caractéristiques uniques et variables. Ils ont également étudié l'effet des pertes de charge sur toutes sortes de manœuvres (lente, brusque et instantanée), ils ont considéré les conditions de résonance et recherché les fermetures et ouvertures dangereuses en reprenant les formules de Michaud, Allievi-Joukowski et De Sparre.

La méthode graphique de Bergeron a été mise au point à peu près simultanément par Schnyder et Bergeron (1949), elle permet de résoudre tous les problèmes, aussi complexes soient-ils, mais c'est alors au prix d'un travail long et délicat. C'est pour cela que cette méthode n'est utilisée à l'heure actuelle que pour les cas simples, ou pour comprendre la physique d'un phénomène : Ainsi, l'étude complète et précise des systèmes hydrauliques munis de cheminée d'équilibre revient à résoudre les équations différentielles des ondes élastiques dans une conduite en charge, cependant dans les cas complexes, on se sert des programmes sur ordinateur qui permettent de tester un grand nombre de cas de fonctionnement, de paramètres différents, etc...

Strowger et Kerr (1926) « Speed Changes of Hydraulic Turbines for Sudden Changes of Load » ont présenté une méthode numérique pour l'analyse du coup de bélier dans les turbines, causé par les changements brutaux pouvant apparaître lors de fonctionnement de la turbine. En discutant cette méthode, Lowy (1928) a étudié la résonance due aux mouvements périodiques des vannes et la surpression due aux ouvertures graduelles, il a aussi considéré les pertes dues au frottement, comme il a développé une méthode graphique d'analyse de coups de bélier qui a déjà été introduite par Wood (1926).

Charles Jaeger (1933) a présenté sa thèse « Théorie générale du coup de bélier. Application au calcul des conduites à caractéristiques multiples et aux chambres d'équilibres » qu'il considère, non seulement comme complément à l'œuvre entreprise par Lorenzo Allievi, mais, plus encore, pour donner réponse à une série de questions pratiques de toute première importance. Dans sa thèse de doctorat en sciences techniques, Jaeger a démontré que les

équations de l'oscillation de masse dérivent de celles du coup de bélier, mais que les deux phénomènes, loin de se confondre, se superposent et qu'il fallait par conséquent rechercher les lois de propagation propres du coup de bélier dans la chambre d'équilibre et la galerie en charge, et rejeter l'ancienne conception.

En 1933 Angus « Simple Graphical Solution for Pressure Rise in Pipe and Pump discharge Lines » a présenté la théorie de base et certaines applications de la méthode graphique, tenant compte des pertes due aux frottements, et Bergeron (1937) « méthode graphique générale de calcul des propagations d'ondes planes » a présenté un article décrivant la théorie des ondes élastiques. Un autre colloque sur le coup de bélier a eu lieu en 1937 lors de la réunion annuelle de « American Society of Mechanical Engineers ». Lors de ce colloque, des communications ont été présentées sur l'analyse de chambres à air et les soupapes, sur les caractéristiques complètes de la pompe et sur la comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux. En linéarisant le frottement, Rich (1945) « waterhammer analysis by the Laplace-Mellin transformation » a utilisé la transformée de Laplace pour l'analyse des coups de bélier dans les conduites. Angus « Water Pressure in Compound and Branched Pipes » a présenté en 1938 l'analyse de coup de bélier dans des conduites composées, avec branchements.

Les efforts combinés des chercheurs Jaeger (1933 et 1977), Parmakian (1955), Wylie et Streeter (1967) ont eu comme résultats l'aboutissement aux équations de continuité et de mouvement pour les écoulements en charge instationnaires unidimensionnels (1D) suivantes :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (1.8)$$

Equation dynamique :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{4}{\rho D} \tau_w = 0 \quad (1.9)$$

Dans lesquelles τ_w est la contrainte tangentielle au voisinage de la paroi de la conduite de diamètre D .

Le système d'équations (1.8) et (1.9) constitue les équations fondamentales des problèmes d'écoulement non permanent (1D) sous pression et représente le modèle mathématique de propagation d'ondes élastiques dans les systèmes de conduites en charge.

Gris « The analysis of the dissipation of energy in waterhammer » a introduit la méthode des caractéristiques dans la modélisation de coup bélier. En 1962 Lai « A study of waterhammer including effect of hydraulic losses » l'a utilisé dans sa thèse de doctorat. Plus tard, en 1963 Streeter a publié de nombreux articles sur la méthode des caractéristiques parmi lesquels on trouve « waterhammer analysis including fluid friction ».

Ruus (1966) « optimum rate closure of hydraulic turbine gates » a été la première à présenter les procédures de fermeture d'une soupape de sorte que la pression maximale reste dans les limites prescrites, appelée « fermeture optimum ». Indépendamment, Cabelka, Franc (1954) « closure characteristics of a valve with respect to waterhammer » et Streeter « valve stroking to control waterhammer » ont développé la même procédure qui est plus tard généralisée et informatisée pour les systèmes de tuyauteries complexes.

Yevjevich (1975) et Yen (1978) furent les premiers à identifier la présence des écoulements transitoires dans les conduites d'égout pluvial en les décrivant comme des phénomènes mal compris par les ingénieurs.

D'autres études similaires parmi lesquels celle de McCorquodale (1999), ont permis de mettre en exergue les phénomènes d'emprisonnement d'air qui accompagnent généralement les écoulements transitoires dans les égouts pluviaux.

Les phénomènes transitoires et l'emprisonnement d'air qui en résultent surviennent dans les conduites lors des changements de régime d'écoulement. Pendant les crues exceptionnelles, il peut arriver que la capacité du réseau d'égout soit temporairement dépassée par le débit transitant dans les canalisations : certaines canalisations qui, initialement coulaient à surface libre peuvent subitement entrer en charge du fait d'une variation brutale du débit d'apport. Ce changement brusque de régime fait naître des phénomènes particuliers dans l'écoulement (emprisonnement d'air, coups de bélier, etc.) qui sont particulièrement néfastes pour le bon fonctionnement du réseau. Ils sont très difficiles à modéliser à cause du changement constant des conditions frontières, mais aussi de la présence de deux phases dans l'écoulement: l'air et l'eau.

Plus récemment, Salah et *al.* (2001) ont développé une formule de la célérité d'onde en introduisant les caractéristiques mécaniques du sol environnant, et les efforts longitudinaux en analysant l'effet de la charge externe exercée par le remblai qui surmonte une conduite enterrée. Ces mêmes auteurs ont considéré le sol comme un cylindre d'épaisseur infinie agissant autour de la conduite comme un ressort. Ainsi, pour montrer l'effet de la charge

externe sur l'augmentation de la célérité, des exemples numériques ont été présentés en considérant différents matériaux de conduites simples et blindées et les plages courantes du rapport diamètre/épaisseur.

En 1980, Meunier a présenté dans son document « les coups de bélier et la protection des réseaux d'eaux sous pression » le phénomène de coup de bélier et les méthodes utilisables pour l'étudier, à savoir : méthode numérique simple, méthode graphique, méthode informatique dont les résultats sont comparés à des enregistrements, il a aussi étudié le paramètre de base de coup de bélier, sa célérité de propagation.

Par la suite Meunier a traité une étude de protection anti bélier d'un réseau d'eau sous pression et comment calculer les dimensions des appareils de protection.

L'un des dispositifs classiques et anciens de protection contre le coup de bélier est bien celui de la cheminée d'équilibre. Cet organe de protection a connu de larges applications et développements dans les installations hydro-électriques, appelé parfois chambre d'équilibre.

L'étude classique de phénomène de coup de bélier en conduite est généralement menée dans l'hypothèse où la conduite est supposée se déformer instantanément comme si elle était constituée d'un empilement d'anneaux indépendants et sans masse, citons les travaux de Wylie et Streeter (1978), Chaudhry (1987). Une hypothèse légèrement moins restrictive a été considérée par Otwell (1984) et Djemili (1988) qui ont analysé, au travers de la déformation longitudinale liée au coefficient de Poisson, l'influence de l'ancrage de la conduite. Plus récemment Chaudhry et *al.* (1994) partant d'une même formulation, ont traité le cas d'une fermeture partielle de vanne en milieu de conduite.

Bien que les résultats ainsi obtenus, soient dans la pratique courante, très proches des résultats expérimentaux, il n'est pas sans intérêt d'examiner les phénomènes physiques réels permettant de justifier les approximations faites dans les calculs classiques du coup de bélier.

Bahrar et *al.* (1998) ont présenté donc une étude menée avec un minimum d'hypothèses, tant sur l'écoulement de fluide que sur le comportement de la paroi, où sont également prise en compte les déformations de flexion et de cisaillement, ainsi que les effets dynamiques liés à l'inertie de la paroi. Ils ont examiné ainsi le cas où la célérité d'onde dans le fluide est la plus élevée (cas polyéthylène-eau).

Cette étude est une généralisation de celle menée par Moodie et al.(1982) qui considèrent uniquement le cas du fluide parfait incompressible en conduite mince, avec prise en compte des termes d'inertie radiale et de rotation des sections. Elle est également une extension, au cas de conduite où le rapport épaisseur/rayon de la paroi est non négligeable. Cette étude a permis de montrer que le phénomène classique de coup de bélier en conduite est, en fait, la partie principale d'un ensemble de fluctuations de pression.

Les équations aux dérivées partielles (1.8) et (1.9) régissant le phénomène de propagation d'ondes du coup de bélier dans une conduite en charge sont de type hyperbolique. Sous cette forme, aucune solution analytique ne se présente pour résoudre les problèmes réels, exception faite de certains cas simples (généralement hypothétiques), sans terme dissipatif et des conditions aux limites simplifiées, lesquels n'intéressent pas les applications d'ingénierie.

Cependant, et pour éviter cette difficulté, plusieurs méthodes numériques ont été appliquées avec succès pour approcher la solution désirée.

Cunge et Wegner (1964), ont montré que les simulations numériques permettent de diminuer le volume des conduites souterraines projetées ou de diminuer le volume du réservoir de stockage à mettre en place.

La méthode des caractéristiques (MDC) est une méthode numérique de principe similaire à celui de la méthode graphique développée par Louis Bergeron, elle est apparue dès les années 1960 suite à l'essor des moyens de calcul informatique. Un développement significatif en matière de résolution des équations hyperboliques a été introduit par Lister en 1960, qui a démontré la facilité de cette approche pour le calcul du débit et de la pression dans l'espace à un temps constant. Cette méthode a reçu une intense application dans le calcul des régimes transitoires en charge. En adoptant la méthode à grille fixe, un pas de temps (Δt) commun est utilisé pour le calcul des variables dépendantes sur l'ensemble des conduites du réseau. Dans cette situation, la méthode est considérée comme très performante et précise. Cependant, ces conduites pouvant avoir des longueurs et des célérités d'ondes différentes rendant ainsi difficile voire impossible la satisfaction de la condition de Courant ($a \Delta t / \Delta x \leq 1$) si un incrément de temps identique est adopté pour les conduites. Ce problème de discrétisation peut alors être surmonté par des techniques d'interpolation.

Selon Ghidaoui et al. (2005), Lister (1960) utilisa une interpolation linéaire spatiale pour approximer les variables (H, Q) au pied de chaque ligne caractéristique. Trikha (1975) a

suggéré l'utilisation de pas de temps différents pour chacune des conduites afin d'améliorer les délais de calcul en adoptant des incréments plus conséquents, et ainsi éviter les erreurs d'interpolations. Wiggert et Sundquist (1977) proposèrent un schéma unique qui combine deux types d'interpolation spatiale. L'inconvénient est que ce schéma génère des points de calcul supplémentaires induisant alors des temps de calcul et espaces mémoire importants.

Karney et Ghidaoui (1997) mettent au point des techniques efficaces d'interpolation dites hybrides qui permettent des temps d'exécution réduits et une utilisation de l'espace mémoire plus optimisé.

Il est possible, au lieu d'utiliser la méthode des caractéristiques, de faire usage de l'approximation par différences finies, pour résoudre les équations aux dérivées partielles du mouvement transitoire, sous leur forme conservative ou non conservative. Un bon nombre de schémas aux différences finies implicites et explicites ont été mis au point à cet effet.

Dès le début des années 1970 plusieurs travaux ont été effectués dans ce contexte, à l'image de Wylie et Streeter qui présentèrent une méthode implicite aux différences finies centrées afin de permettre l'usage d'incrément de temps plus grand que les schémas explicites.

Chaudhry et Hussaini (1985) ont appliqué les schémas de MacCormack, Lambda et Gabutti pour le problème du coup de bélier, sans tenir compte des pertes de charge. Ces trois méthodes sont des schémas aux différences finies explicites d'une précision de deuxième ordre (en espace et en temps), ces schémas ont reçu aussi des applications dans les problèmes d'écoulement à surface libre. Les auteurs ont fait usage de deux techniques pour le traitement des conditions aux limites, l'une par l'ajout de nœuds fictifs aux frontières et l'autre en exploitant les lignes caractéristiques, qui est la plus facile à implémenter. Il a été ainsi démontré que ces trois schémas donnaient une meilleure solution que la méthode des caractéristiques de premier ordre pour un nombre de Courant $C_r < 1$.

Ainsi, le Schéma de MacCormack a été utilisé avec succès par Kessal (1987) dans la simulation du problème d'écoulement homogène transitoire avec cavitation. Ultérieurement Chaudhry et *al.* (1990) appliquèrent le schéma de MacCormack et de Gabutti pour la simulation des écoulements non permanents diphasiques liquide-gaz avec un faible nombre de Mach. Les résultats obtenus par les auteurs montrent que le schéma de MacCormack aboutit à de meilleurs résultats pour l'analyse des écoulements transitoires en charge.

Pour décrire la stabilité de la méthode des caractéristiques (MDC) en absence du frottement, les critères de nombre de Courant sont suffisants, mais en présence du frottement, d'autres vérifications s'ajoutent, à l'exemple de celles données par Anderson *et al.* (1991) et Wylie (1996).

D'après Ghidaoui *et al.* (2005), les schémas de type volumes finis ont été appliqués pour la première fois par Guinot (2000). Ce dernier a développé une solution de type Riemann pour la simulation du coup de bélier, et utilisa cette solution pour développer un schéma de Godunov de premier ordre. Ce schéma ainsi obtenu est très semblable à celui de la méthode des caractéristiques. La méthode des volumes finis (VF) a attiré les chercheurs de part sa robustesse et sa facilité d'application. Ainsi, après avoir fait ses preuves dans la résolution des équations hyperboliques, spécialement la dynamique des gaz, la méthode a trouvé application dans les problèmes d'écoulement à surface libre (Toro et Garcia-Navarro, 2007) et celui du coup de bélier.

Izquierdo et Iglesias (2002) ont développé un modèle, pour simuler les écoulements transitoires, dans les installations hydrauliques simples, par la modélisation mathématique. Ils ont également présenté des outils puissantes pour prévoir les risques potentiels auxquels une installation peut être exposée, ainsi, ils ont développé des stratégies appropriées de protection. Leur modèle a produit de bons résultats numériques. Plus tard en 2004, ce dernier a été généralisé pour inclure une station de pompage équipée de : clapet anti-retour, vanne de distribution et deux réservoirs d'air.

Zhao et Ghidaoui (2004) ont présenté la méthode des volumes finis (schémas explicites de Godunov de premier et second ordre) pour le calcul de coup de bélier. Ils ont comparé les schémas des volumes fins et ceux de la méthode des caractéristiques avec et sans frottement, utilisant l'interpolation linéaire spatiale. Ils ont modélisé le frottement des parois par la formule de Brunone *et al.* (1991). Il a été constaté que le schéma de Godunov de premier ordre produit les mêmes résultats avec la méthode des caractéristiques utilisant l'interpolation linéaire spatiale. Ainsi, pour une certaine précision donnée, le temps d'exécution et l'espace mémoire de schéma de Godunov de second ordre est bien moins important comparativement à celui de premier ordre.

Afshar et Rohani (2008) ont proposé de leur côté une méthode des caractéristiques implicite. Dans cette approche, les équations de base de l'élément conduite et des différents

appareils sont alors organisées dans un système matriciel ayant pour inconnus les variables H et Q au pas de temps considéré. Les auteurs mettent ainsi en relief dans leur travail la supériorité de la méthode face aux limitations de la méthode des caractéristiques classique.

L'utilisation de la méthode des caractéristiques, considère généralement le maillage de discrétisation à pas constants, Salah et Massouh (2009) ont présenté une étude du régime transitoire où les pieds des caractéristiques n'aboutissent pas aux nœuds de calcul. Les différents schémas implicites et explicites examinés dans ce cas, ont montré que l'utilisation de la méthode des caractéristiques admet des erreurs temporelles et spatiales. Afin de quantifier ces dernières, l'utilisation des séries de Fourier, le développement de Taylor, et la méthode de l'interpolation linéaire entre deux nœuds, ont été utilisés.

L'analyse des erreurs introduites par l'utilisation de la méthode des caractéristiques a été également étudiée par Combes et Zaoui (1967) en considérant le cas très simple d'une conduite constituée de deux tronçons de caractéristiques différentes

Abdessemed et Fourar (2011) ont présenté une étude, où ils sont projetés sur l'une des causes de la propagation des ondes, (celui d'un arrêt brutal de l'alimentation en eau des conduites gravitaires en charge), comme ils ont été amené à mettre en équation ces phénomènes transitoires, en prenant comme points essentiels les variations de sections (convergence/divergence) et la bifurcation d'un côté et la fermeture des vannes de l'autre côté en utilisant les méthodes numérique des différences finies et des caractéristiques, dont la résolution a pu être effectuée à l'aide des logiciels industriels WHAMO et AFT Impulse. Ils ont constaté que dans les adductions gravitaires en charge, l'influence de la propagation des ondes élastiques est plus importante surtout dans le cas des conduites à caractéristiques variables. Ces dernières doivent être prises en compte dans les cas pratiques puisqu'elles provoquent des variations fulgurantes de la hauteur piézométrique et du débit d'écoulement initial dans les installations hydrauliques en passant du régime permanent ou stationnaire qui gouvernait le système au régime transitoire ou instationnaire qui peut causer des dégâts considérables si on ne les anticipaient pas. De plus leur étude a été basée sur le cas d'un écoulement unidimensionnel sans tenir compte des changements extérieurs, donc, il est bien évident que beaucoup d'autres paramètres doivent être pris en considération comme les variations de la température ambiante ou la densité du liquide...etc.

Amara et *al.* (2013) dans leur travail, ont appliqué une approche numérique aux volumes finis pour la résolution des équations aux dérivées partielles gouvernant les écoulements non permanents en charge. Ceci visait à simuler le comportement transitoire d'un système hydraulique muni d'une cheminée d'équilibre pour en prédire sa réponse dynamique.

L'application est faite sur un aménagement hydro-électrique type, muni d'une cheminée d'équilibre. Les résultats sont analysés et comparés à la théorie simplifiée de l'oscillation en masse fréquemment utilisée dans certains cas.

L'étude paramétrique portant sur les dimensions de la cheminée a révélé l'influence de l'effet capacitif de l'ouvrage, sur la capacité de transmission et de réflexion des ondes de la conduite forcée. Il a été observé que l'amplitude des fluctuations du niveau d'eau dans la chambre, ainsi que la fréquence propre, est inversement proportionnelle au diamètre de cette dernière.

1.3. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté un aperçu bibliographique détaillé sur les travaux antérieurs portant sur le régime transitoire et les différentes méthodes numériques utilisées pour le calculer. À travers ces travaux, Il en ressort que ces différentes méthodes, lors de leur application, présentent des erreurs de calcul difficiles à évaluer notamment lorsque les points d'information sont des points internodaux de calcul. L'évaluation de ces erreurs est tributaire de la condition de stabilité qui dépend elle-même du pas de discrétisation choisi dans le temps et dans l'espace. A travers un modèle physique considéré, formé d'un réservoir à niveau constant et muni d'une conduite gravitaire à caractéristiques uniques, supposée horizontale, à l'extrémité de laquelle se trouve un robinet-vanne, l'optique de notre travail consiste à appliquer les méthodes numériques y compris la méthode des caractéristiques. Pour cette dernière, nous essayons de la représenter sous forme d'un modèle mathématique interpolé linéairement et de déduire ainsi l'erreur commise dans le temps et dans l'espace tout en restant dans le domaine de stabilité.

Chapitre-2-

**ANALYSE DU REGIME TRANSITOIRE EN
CHARGE**

Chapitre-2-

ANALYSE DU REGIME TRANSITOIRE EN CHARGE

2.1. Introduction :

Pour bien comprendre l'aspect physique de coup de bélier, nous allons décrire le phénomène transitoire et établir les équations de base permettant de le quantifier.

Par la suite, nous allons représenter quelques travaux qui ont été consacrés pour la détermination d'un paramètre très important lors de l'étude de propagation d'ondes dans les milieux fluides, qui est bien la vitesse de propagation, appelée aussi célérité d'onde. Pour cela, nous nous intéresserons d'abord au cas des conduites minces non enterrées, et par la suite au cas des conduites composites (celui de béton armé). Nous donnons finalement l'expression de la célérité d'onde dans les conduites enterrées.

2.2. Interprétation physique du phénomène de coup de bélier :

Pour la compréhension du phénomène du coup de bélier ; le cas simple et connu de la fermeture instantanée d'une vanne est examiné. Supposons une conduite horizontale à caractéristiques uniques de diamètre D , d'épaisseur e et de longueur L , munie d'un réservoir à sa partie amont, et d'un obturateur à sa partie aval. Cette conduite véhicule un débit initial Q_0 à une vitesse V_0 . (Figure 2.1)

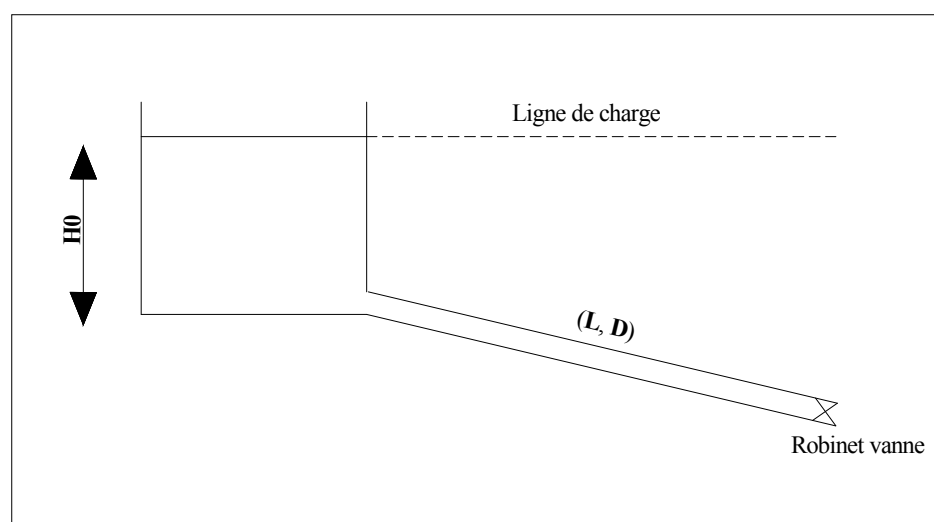


Figure 2.1 : Schéma d'une conduite à caractéristique unique avec un réservoir en amont et un obturateur à l'aval

En supposant une fermeture instantanée de l'obturateur au temps $T=0$, la propagation du coup de bélier ainsi générée se subdivise en quatre phases :

Première phase : $0 < t < L/a$

La colonne de liquide qui est lancée avec une certaine vitesse V_0 trouve la vanne fermée. Elle est obligée de s'arrêter. Son énergie cinétique se transforme donc en une énergie potentielle qui se traduit par l'augmentation de pression, comme le liquide est supposé légèrement compressible et que la conduite admet des déformations, la surpression résultante de l'arrêt de liquide va le comprimer et dilater la conduite. Les éléments liquides qui se trouvent plus en amont continuent à avancer jusqu'à ce qu'ils se trouvent arrêtés eux même par les éléments liquides d'aval. Le phénomène se propage donc de la vanne jusqu'à le réservoir à une vitesse appelée « célérité », elle est notée par a .

Lorsque l'onde de surpression arrive au réservoir au temps $T=L/a$, la vitesse s'annule, la pression augmente, le liquide se comprime et la conduite augmente de diamètre.

Deuxième phase : $L/a < t < 2L/a$

La pression régnant la conduite est bien supérieure à celle qui se trouve dans le réservoir, donc la conduite va pouvoir se vider dans ce dernier, en commençant bien sûr par les éléments liquides les plus proches du réservoir. On voit donc que cette fois, c'est une onde de dépression qui va parcourir la conduite en allant de réservoir vers la vanne, au temps $T=2L/a$ toute la conduite est à son état initial, la pression à sa valeur initiale, mais ayant inversé le sens de débit.

Troisième phase : $2L/a < t < 3L/a$

Le liquide continue toujours à s'écouler de la conduite vers le réservoir, La réflexion de l'onde de dépression engendre derrière elle un abaissement de pression au niveau de la vanne (une transformation de l'énergie cinétique en dépression), Après un temps $T=3L/a$, cette onde arrive au réservoir, l'eau sera immobilisée et la pression sera inférieure à la pression initiale, ce qui engendre une contraction de la conduite.

Quatrième phase : $3L/a < t < 4L/a$

La pression est inférieure à celle du réservoir qui est maintenue constante, l'eau s'écoulera alors du réservoir vers la vanne, donc on assiste au remplissage de la conduite

augmentant ainsi sa pression. Après un temps $T=4L/a$, la dépression aura été complètement supprimée, la conduite va reprendre son état initial.

On constate que le phénomène de coup de bélier est périodique et de période $4L/a$, théoriquement il se reproduira à l'infini. Mais en réalité, la présence des pertes de charge par frottement sert davantage pour amortir ce phénomène.

Tableau 2.1 : Récapitulation de l'évolution des paramètres hydrauliques dans la conduite en fonction du temps

Temps après fermeture	Vitesse	Pression	Diamètre
0	V_0	P_0	D_0
L/a	0	$P_0+\Delta P$	$D_0+\Delta D$
$2L/a$	$-V_0$	P_0	D_0
$3L/a$	0	$P_0-\Delta P$	$D_0-\Delta D$
$4L/a$	V_0	P_0	D_0

2.3. Risques et dommages conséquents aux coups de bélier :

Les risques dus aux coups de bélier sont de plusieurs ordres (Meunier, 1980) :

Risque de forte pression :

Les coups de bélier provoquent des surpressions qui s'ajoutent à la pression initiale. Si la somme « pression initiale » plus « surpression » est supérieure à la pression maximale admissible des tuyaux, il y a des risques de rupture des tuyaux et de déboîtement des joints.

Risque de pression négative :

Une autre conséquence des coups de bélier peut être l'apparition d'une pression relative négative. Si cette pression devient inférieure à (-10 mce), il se produit une poche de cavitation. Si le profil en long de la canalisation est défavorable, c'est-à-dire si la poche de vapeur peut se former sur une grande distance, la canalisation peut être aplatie par implosion et les joints peuvent être aspirés.

Une autre conséquence de la cavitation est la détérioration de l'enduit intérieur du tuyau, mais le risque le plus grave est celui d'éclatement de la conduite lors du retour à des pressions positives : les pressions obtenus à ce moment sont en effet souvent très importantes. C'est surtout ce risque de fortes pressions qui oblige à se protéger contre la cavitation.

Fatigue de tuyau :

Comme autre conséquence des coups de bélier, on peut citer la fatigue qu'entraîne pour le matériau une alternance rapide de fortes et de faibles pressions, même si chaque onde de surpression n'est pas suffisante en elle-même pour créer la rupture. Malheureusement, cet effet des coups de bélier est encore peu étudié, surtout dans le cas concret des canalisations enterrées, entre autre on peut citer l'article de Chaplain (1974) qui permet de déterminer notamment la durée de vie de PVC en fonction des alternances de démarrage et arrêt des pompes.

2.4. Protection anti bélier :

Devant le problème de protection anti bélier, deux attitudes peuvent être envisagées, la première consiste à éviter les manœuvres brusques et la deuxième consiste en l'utilisation des appareils de protection.

2.4.1. Agir sur la vitesse des manœuvres :

La surpression dépend de la variation de vitesse et de débit créée par la manœuvre. Il serait intéressant, dans la mesure du possible, de remplacer une manœuvre brusque par des petites manœuvres espacées dans le temps. Le cas de fermeture d'une vanne à l'extrémité d'une conduite montre que l'onde de surpression créée et qui se propage à l'amont de la conduite revient à la vanne après un temps $(2L/a)$ sous forme de dépression. Si l'on envisage une fermeture divisée en plusieurs étapes et espacées d'au moins $(2L/a)$, on permet ainsi aux ondes de retour en dépression de contrebalancer les surpressions qui continuent à être produites par les étapes de fermetures suivantes. C'est ce raisonnement qui conduit à qualifier une manœuvre de vanne comme brusque si la durée de manœuvre complète est inférieure à $(2L/a)$.

Il est donc vivement conseillé d'éviter les manœuvres brusques. Dans le cas des vannes motorisées, il est possible de commander la loi de fermeture pour augmenter le temps de fermeture et éviter la fermeture brusque. Néanmoins, il est important de signaler ici que lors de la fermeture d'une vanne, la variation du débit reste faible sur une grande partie de la loi de fermeture. La fermeture efficace qui produit une variation significative du débit se trouve vers la fin de fermeture. Ainsi, pour agir contre le coup de bélier sans augmenter inutilement la durée totale de fermeture, la manœuvre de vanne doit être ralentie surtout dans la zone de fermeture efficace. Ceci peut être contrôlé dans le cas des vannes motorisées. Certains fabricants de vannes manuelles ont trouvé une solution intelligente qui consiste à prévoir deux

pas de vis différents sur le mécanisme qui commande la fermeture de la vanne. Au début, la fermeture avance avec le grand pas, mais en arrivant dans la zone de fermeture efficace, le petit pas s'engage et la fermeture est ainsi ralentie même si l'opérateur continue à manœuvrer la vanne avec le même rythme initial.

2.4.2. Installer des dispositifs de protection :

Il existe plusieurs sortes d'appareils pour la protection des réseaux de conduites contre les coups de béliers. Certains ne sont efficaces que contre la surpression comme les soupapes de décharge. D'autres agissant uniquement contre la dépression comme le système d'aspiration auxiliaire bye passe. Les appareils agissant à la fois contre la surpression et la dépression sont de type : cheminée d'équilibre, ballon hydropneumatique, volant d'inertie ou amortisseur en ligne. Dans ce qui suit nous allons présenter quelques appareils de protection antibélier.

a) Volant d'inertie :

Théoriquement, un volant d'inertie monté sur l'arbre d'une pompe permet de protéger contre la surpression et la dépression à la suite de démarrage et de l'arrêt d'une pompe. Cependant, le volant peut poser des problèmes pour le démarrage, c'est pour cette raison il est utilisé le plus souvent pour la protection en cas d'arrêt de pompe. Grâce à son inertie, le volant permet en cas de disjonction des pompes de maintenir la pompe en rotation durant un certain temps, ce qui a pour effet d'empêcher l'apparition de forte dépression ou de cavitation.

b) Ballon antibélier (contacte directe eau-air) :

Le ballon hydropneumatique est une bonne solution contre le coup de bélier et peut être efficace contre la surpression et la dépression. Son principe est basé sur l'effet capacitif créé par la compressibilité de l'air emmagasiné dans le ballon. Lors d'une surpression, un débit peut être dévié du réseau vers le ballon ce qui permet de réduire la surpression dans le réseau. Au contraire, dans un cas de dépression, le ballon peut fournir un certain débit au réseau ce qui a pour effet de limiter la dépression.

En pratique il existe deux technologies de fonctionnement des ballons : contacte directe eau-air et membrane, dans ce cas, il existe le problème de dissolution d'air au contact de l'eau, pour cela il faut prévoir un équipement permanent pour compenser l'air dissous, à savoir :

-compresseur avec un réservoir d'air tampon et une électrovanne d'alimentation d'air

-équipements de mesure et de commande de démarrage et d'arrêt de compresseur

Il faut également prévoir un traitement anticorrosion des parois du ballon, ce type de ballon a donc besoin d'entretien et de maintenance régulière.

c) Ballon antibélier (sans contact eau-air) :

Dans le cas des ballons antibélier sans contact direct eau-air, une membrane en caoutchouc est utilisée pour assurer la séparation, il est même possible d'éviter le contact entre l'eau et la paroi du ballon grâce à l'utilisation d'une vessie en caoutchouc pour emmagasiner l'eau à l'intérieur. Ceci évite les risques de corrosion des parois par l'eau, l'air se trouve alors stocké dans l'espace entre la vessie et les parois du ballon. Pour réduire encore plus les risques de corrosion, on peut utiliser un gaz neutre comme l'azote au lieu de l'air, ce type de ballon a donc besoin d'une maintenance très réduite pour assurer la pression gaz.

d) Amortisseur en ligne :

Cet amortisseur est simplement constitué d'un tronçon très déformable placé en série avec la conduite à protéger, d'où l'appellation « en ligne ». Cet appareil est donc traversé par la totalité de l'onde et du débit de la conduite, contrairement aux autres systèmes antibéliers qui sont installés en dérivation. L'appareil joue son rôle d'antibélier en réduisant la célérité de propagation sur une partie du parcours de l'onde. La réduction de célérité est obtenue grâce à la grande déformabilité du tronçon constituant l'appareil.

2.5. Les équations fondamentales régissant les écoulements transitoires en charge :

Nous allons présenter les deux équations connues sous le nom d'équations de Saint Venant à partir des équations générales de continuité et de quantité de mouvement. Ces équations permettent d'étudier tous les phénomènes transitoires que l'on rencontre en écoulement monophasique sous pression. Pour cela, nous allons d'abord rappeler certains résultats de la mécanique des matériaux pour déterminer les contraintes dans les tuyaux en charge.

Expression des contraintes dans les tuyaux sous pression :

Appelons σ_1 et σ_2 les contraintes longitudinale et radiale, ζ_1 et ζ_2 les déformations correspondantes.

E : module d'élasticité longitudinale du matériau ou module de *Young*.

ν : Coefficient de proportionnalité sans dimension ou module de *Poisson*.

La loi de Hooke permet d'écrire :

$$\begin{cases} \zeta_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \zeta_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \end{cases} \quad (2.1)$$

Si on considère une conduite de diamètre D , de longueur L et d'épaisseur e , soumise à une pression interne P , la mise en équilibre statique de la moitié de cette conduite permet d'écrire :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P \cos \alpha . L . r . d\alpha - 2\sigma_2 L . e = 0 \quad (2.2)$$

Donc :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P \cos \alpha . L . r . d\alpha = 2\sigma_2 L . e$$

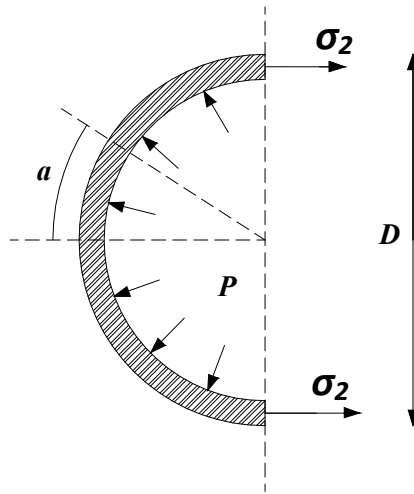


Figure 2.2 : Forces exercées sur une conduite en équilibre statique

Après intégration on obtient :

$$\sigma_2 = \frac{PD}{2e} \quad (2.3)$$

Pour la contrainte longitudinale , elle est exprimée généralement en fonction de la contrainte radiale :

$$\sigma_1 = k\sigma_2 \quad (2.4)$$

Sachant que : k est le coefficient d'ancrage, il est variable selon les trois cas suivantes :
1^{er} cas : conduite avec de nombreux joints ($k = 0$)

2^{ème} cas : conduite sans joints, libre à une extrémité ($k = 1/2$)

3^{ème} cas : conduite sans joints, ancrée aux deux extrémités ($k = \nu$)

2.5.1. L'équation de continuité :

Elle est basée sur le principe de conservation de la masse, pour cela on va l'exprimer en analysant les déformations à masse constante d'un volume de liquide entre les instants t et $t+\Delta t$.

Nous avons :

$$m = \rho V = \rho.S.\Delta L \quad (2.5)$$

La masse m reste constante, donc la somme des déformations : d / ρ , dS/S et $d(\Delta L)/\Delta L$ est nulle.

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = 0 \quad (2.6)$$

Par définition le module d'élasticité du fluide K est égal à $dP / (d\rho / \rho)$. On en déduit alors l'égalité suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{K} \quad (2.7)$$

Pour la section de l'élément liquide, elle reste en permanence égale à celle de tuyau qui l'entoure. On a donc :

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dR}{R} = 2\zeta_2 = \frac{2}{E} (d\sigma_2 - \nu d\sigma_1)$$

On a vu que la contrainte σ_1 s'exprime par $\sigma_1 = k \sigma_2$. si on pose $c=1- kv$, on obtient :

$$\frac{dS}{S} = \frac{2c}{E} d\sigma_2 = \frac{D}{Ee} c dP \quad (2.8)$$

La variation de longueur de l'élément liquide est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = \frac{\partial U}{\partial x} .dt \quad (2.9)$$

Pour obtenir l'équation de continuité, il suffit de remplacer chaque terme de l'équation (2.6) par les expressions données dans les équations (2.7, 2.8 et 2.9)

$$\frac{\partial U}{\partial x} .dt + \frac{dP}{K} + \frac{D}{Ee} c dP = 0 \quad (2.10)$$

En divisant les membres de cette équation par dt , on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} c \right) \frac{dP}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

On voit que le terme $\left(\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} c \right)$ dépend d'une part de la compressibilité de l'eau K , d'autre part des caractéristiques de tuyau $\left(\frac{D}{Ee} \right)$ et la façon dont ce dernier est assemblé et ancré (c).

Tel que :

$c=1$: s'il y a beaucoup de joints

$c=1-v^2$: si la canalisation est rigide et ancrée aux deux extrémités

$c=1-v/2$: si elle est rigide et libre à une extrémité.

On pose donc :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} c \right) \quad (2.12)$$

On obtient la nouvelle expression de l'équation de continuité :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.13)$$

2.5.2. L'équation dynamique :

En appliquant le théorème des quantité de mouvement sur un élément de volume de fluide, qui indique que la variation de la quantité de mouvement par rapport au temps, est égale à la somme des forces extérieures appliquées à cet élément fluide, on trouve :

$$\frac{d(mU)}{dt} = \sum F_{ext} = m \frac{dU}{dt} + U \frac{dm}{dt} \quad (2.14)$$

Comme la masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement, on peut écrire alors :

$$\frac{d(mU)}{dt} = m \frac{dU}{dt} = \rho S dx \cdot \frac{dU}{dt} \quad (2.15)$$

Les forces extérieures qui s'exercent sur cet élément de volume liquide projetées sur l'axe de la conduite sont :

- la force de pression normale sur la face amont F_1 , tel que :

$$F_1 = PS$$

- la force de pression normale sur la face aval F_2 , telque :

$$F_2 = PS + \frac{\partial(PS)}{\partial x} dx$$

La résultante des forces de pression est donc F , tel que:

$$F = -\frac{\partial(PS)}{\partial x} dx \quad (2.16)$$

- La composante de la force de pesanteur F_g projetée sur l'axe de l'écoulement :

$$F_g = -\rho g S . dx . \sin \alpha \quad (2.17)$$

Où α est l'angle que forme l'axe de la conduite avec l'horizontale.

- La force de frottement de liquide avec la paroi de la conduite F_f :

$$F_f = \tau_0 \pi D dx \quad (2.18)$$

τ_0 étant la contrainte de cisaillement entre le liquide et la paroi de la conduite.

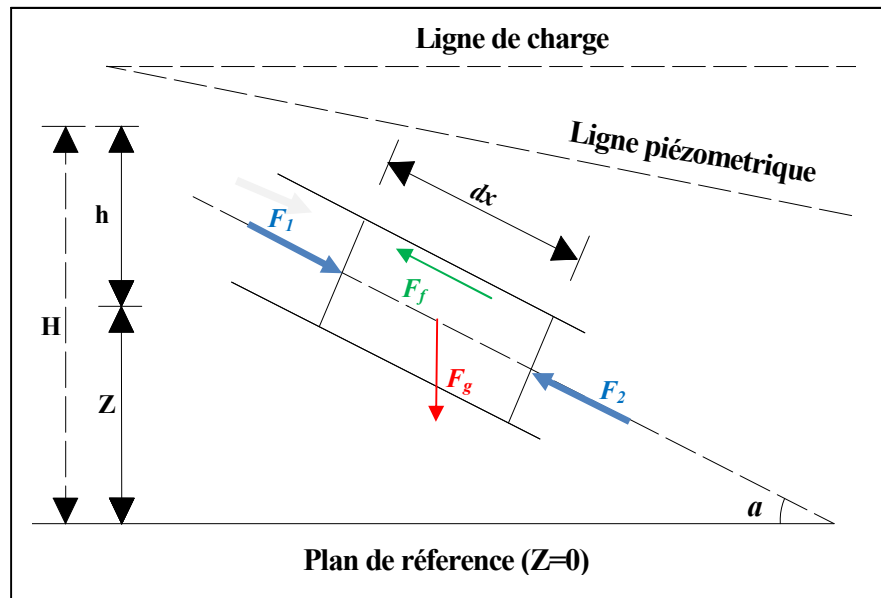


Figure 2.3 : Forces exercées sur un volume de contrôle liquide

En remplaçant les expressions (2.16), (2.17) et (2.18) dans l'expression (2.14), on trouve :

$$\rho S dx . \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} S dx - \rho g S . dx . \sin \alpha - \tau_0 \pi D dx \quad (2.19)$$

La vitesse U dépend de x et de t , donc $U=U(x,t)$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

Donc :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.20)$$

En faisant l'hypothèse que la contrainte de cisaillement τ_0 est identique à celle en régime permanent, La force de frottement F_f peut être aussi calculée par la formule suivante :

$$F_f = \Delta P \frac{\pi D^2}{4} = \rho g \Delta h \frac{\pi D^2}{4} \quad (2.21)$$

En introduisant l'équation de Darcy Weisbach :

$$\Delta h = \frac{\lambda dx}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (2.22)$$

Tel que : λ est le coefficient de frottement.

Ce qui permet d'écrire :

$$F_f = \rho g \frac{\lambda dx}{D} \frac{U^2}{2g} \frac{\pi D^2}{4} = \tau_0 \pi D dx$$

Après simplification, on trouve:

$$\tau_0 = \frac{1}{4} \rho g D \left(\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{1}{4} \rho g D j \quad (2.23)$$

Avec : j représente le gradient hydraulique.

En remplaçant τ_0 par sa valeur dans l'équation (2.19) et en simplifiant par $\rho \cdot S \cdot dx$, on obtient l'équation dynamique suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin \alpha + j) \quad (2.24)$$

Donc les équations de Saint Venant décrivant les phénomènes transitoires en écoulement monophasique sous pression sont représentées par le système (2.25) suivant :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin \alpha + j) \end{cases} \quad (2.25)$$

2.6. Discussion des équations de Saint Venant :

Le système (2.25) établi ci-dessus permet de traduire tout les mouvements transitoires. Nous allons les transformer pour avoir des équations plus maniables et ayant un sens physique plus évident :

Pour les phénomènes de propagations étudiés, les termes d'inertie convective du type $U (\partial U / \partial x)$ et $U (\partial P / \partial x)$ peuvent être négligés devant $(\partial U / \partial t)$ et $(\partial P / \partial t)$ (Chaudhry, 1979).

$$\text{Ainsi, } \sin \alpha = \partial Z / \partial x$$

En considérant que la conduite est horizontale ou faiblement inclinée, Le système (2.25) devient :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + gj = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

La pression P dans la conduite est donnée par $P = \rho gh = \rho g(H - Z)$, tel que :

h : hauteur piézométrique.

H : cote piézométrique.

Z : cote de point considéré (pour notre cas $Z = 0$).

La vitesse d'écoulement s'exprime par $U = Q/S$

En remplaçant la vitesse par son expression, Le gradient hydraulique j devient :

$$j = \frac{\lambda U^2}{D 2g} = \frac{\lambda Q|Q|}{D 2gS^2}$$

En considérant que la conduite n'admet pas des déplacements verticaux ($\partial Z / \partial t = 0$), donc on peut réarranger le système (2.26) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda Q|Q|}{2DS} = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Le système d'équations (2.27) régissant les écoulements transitoires en charge, est constitué d'un ensemble d'équations différentielles de premier ordre. Dans ce système, le déplacement x et le temps t sont des variables indépendantes, la charge h et le débit d'écoulement Q sont des variables dépendantes. Pour les autres variables, comme la célérité

de l'onde a , le diamètre D et la section S , ils ne changent pas dans le temps mais peuvent évidemment varier selon x . Le coefficient de frottement λ varie avec le nombre de Reynolds.

Cependant, λ est considéré constant parce que les effets d'une telle variation sont négligeables en régime transitoire (**Chaudhry**, 1979).

2.7. Célérité d'ondes des coups de bélier :

2.7.1. Expression générale de la célérité d'onde de coup de bélier :

Supposons que l'onde se déplace sans être amortie, donc un paramètre quelconque F du fluide se déplace avec elle sans être modifié, alors qu'il est modifié pendant le temps dt pour la particule physique situé en M à l'instant t . (figure 2.4)

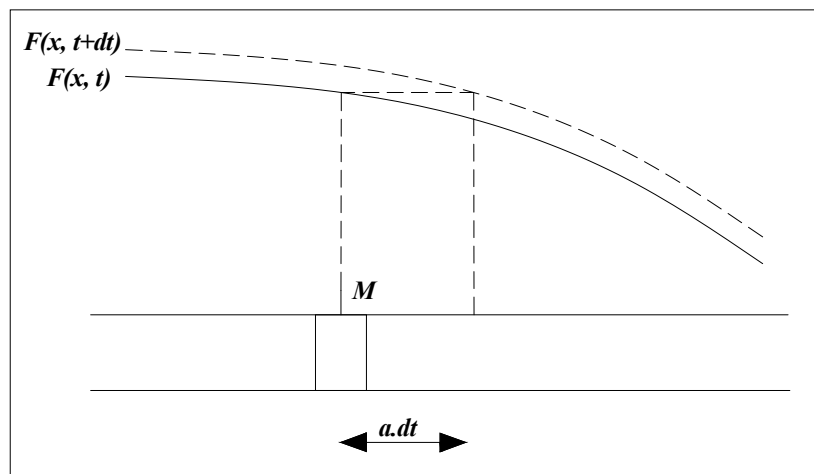


Figure 2.4: Déplacement d'une onde non amortie

On peut écrire :

Pour l'onde :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx_{onde} = 0 \quad (2.28)$$

Pour la particule :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx_{particule} \neq 0 \quad (2.29)$$

Comme $dx_{onde} = a dt$, l'équation (2.28) permet d'écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -a \frac{\partial F}{\partial x} \quad (2.30)$$

En remplaçant (2.30) dans (2.29), sachant que $dx_{particule} = U dt$ on trouve :

$$\frac{dF}{dt} = (U - a) \frac{\partial F}{\partial x} \quad (2.31)$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = 0 \quad (2.32)$$

En remplaçant $\frac{d(\Delta L)}{\Delta L}$ par sa valeur, on obtient :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{\partial U}{\partial x} dt = 0 \quad (2.33)$$

En appliquant à la vitesse U, le résultat de l'équation (2.31), on aura :

$$\frac{dU}{dt} = -(U - a) \left(\frac{\partial \rho}{\rho \partial t} + \frac{\partial S}{S \partial t} \right) \quad (2.34)$$

En supposant que la conduite est horizontale et l'onde non amortie, l'équation dynamique (2.24) s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad (2.35)$$

En appliquant à la pression P le résultat de l'équation (2.31), on aura :

$$\frac{dP}{dt} = -\rho(U - a) \frac{dU}{dt} \quad (2.36)$$

En remplaçant l'équation (2.34) dans (2.36), on obtient :

$$\frac{1}{(U - a)^2} = \rho \left(\frac{\partial \rho}{\rho \partial P} + \frac{\partial S}{S \partial P} \right) \quad (2.37)$$

Puisque la vitesse de l'écoulement U est négligeable devant la célérité d'onde a, on peut écrire alors :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{\partial \rho}{\rho \partial P} + \frac{\partial S}{S \partial P} \right) \quad (2.38)$$

L'équation (2.38) représente l'expression générale de la célérité d'onde, valable pour un tuyau quelconque, transportant un fluide quelconque.

2.7.2. Expression de la célérité d'onde de coup de bélier pour les conduites non enterrées :

L'expression (2.38) sert de base pour la détermination de la formule donnant la célérité d'ondes dans les conduites non enterrées suivante :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} c \right) \quad (2.39)$$

On peut aussi exprimer la célérité a par l'expression :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K D}{E e} c}} \quad (2.40)$$

Pour une eau ayant un module d'élasticité $K=2.10^9$ Pa et une masse volumique $\rho=1000$ Kg/m³, la célérité prend la forme suivante :

$$a = \frac{1430}{\sqrt{1 + \frac{2.10^9 D}{E e} c}} \quad (2.41)$$

Où : E est exprimé en Pascal, la célérité ne peut pas donc dépasser 1430 m/s, qui représente la célérité du son dans l'eau.

Ceci nous montre que la célérité dépend de trois paramètres :

- Le rapport $(\frac{K}{E})$ donc le matériau qui compose la conduite ;
- Le rapport $(\frac{D}{e})$ donc les dimensions de la conduite ;
- Le terme (c) qui traduit l'influence de la contrainte longitudinale du tuyau et dépend du mode d'ancrage de la conduite.

2.7.2.1. Conduites à paroi minces élastiques :

Pour les tuyaux minces, plusieurs auteurs ont étudié la célérité d'onde de coup de bélier, ils ont presque tous abouti à la même expression, sauf que le terme (c) est différent.

Allievi (1902), dans sa théorie générale a négligé l'influence des contraintes axiales et a directement pris le coefficient c égal à 1, il a trouvé l'expression suivante :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K D}{E e}}} \quad (2.42)$$

Parmakian (1963) a déterminé la célérité d'onde pour les conduites en acier, en fonte et en amiante-ciment, il a trouvé l'expression suivante :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K D}{E e} c_1}} \quad (2.43)$$

Parmakian a défini le coefficient c_1 comme suit :

$c_1=1 - \nu/2$: pour une conduite ayant beaucoup de joints

$c_1=1-\nu^2$: si la conduite est ancrée aux deux extrémités

$c_1= 5/4 - \nu$: si elle est libre à une extrémité.

Halliwell (1963) a aussi étudié la célérité d'onde dans les tuyaux minces, il a proposé l'expression suivante :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K}{E} c_2}} \quad (2.44)$$

Halliwell a considéré les mêmes cas d'ancrage que Parmakian, il a obtenu pour le coefficient c_2 les valeurs suivantes :

$c_2= D/e$: pour une conduite ayant beaucoup de joints

$c_2= D/e (1-\nu^2)$: si la conduite est ancrée aux deux extrémités

$c_2= D/e (5/4 - \nu)$: si elle est libre à une extrémité.

On voit que Parmakian et Halliwell ont trouvé les mêmes coefficients traduisant l'effet des contraintes axiales pour des conduites ancrées à une ou aux deux extrémités ($c_2=D/e c_1$), cependant dans le cas où la conduite est dotée de plusieurs joints, les avis des deux auteurs divergent puisque Parmakian, a pris en considération le coefficient de Poisson ν , tandis que Halliwell a négligé ce dernier devant le rapport D/e considérant que la conduite subit des déformations longitudinales mais que ces dernières sont perdues au niveau des nombreux joints qu'elle comporte.

Pour les tuyaux minces, Meunier a présenté un tableau, qui montre les différences introduites par le terme c dans les valeurs numériques de la célérité d'onde.

Tableau 2.2 : Variation de la célérité d'onde en fonction de l'état d'ancrage de la conduite

	ν	E Pascal	D/e	Valeurs des célérités en (m/s)		
				$c=1$	$c=1-\nu^2$	$c= 1- \nu/2$
Acier	0.3	2.10^{11}	70	1100	1120	1132
Fonte	0.3	1.10^{11}	50	1000	1020	1040
Amiante ciment	0.3	$2.28 \cdot 10^{10}$	10	1032	1054	1070
Béton	0.15	$1 \text{ à } 5 \cdot 10^{10}$	10	1050	1060	1070
PVC	0.46 à 0.5	$3 \cdot 10^9$	16	413	465	468
PEHD	0.45 à 0.5	$1.2 \cdot 10^9$	10	336	385	385

2.7.2.2. Conduites à paroi épaisses élastiques :

L'expression de terme « c » est alors plus complexe à calculer, on va simplement donner les résultats tirés de la thèse de M.Massouh (1979).

Pour une conduite ayant beaucoup de joints :

$$c = \frac{D}{D+e} + \frac{2e}{D}(1+\nu)$$

Si la conduite est ancrée aux deux extrémités :

$$c = (1-\nu^2) \frac{D}{D+e} + \frac{2e}{D}(1+\nu)$$

Si la conduite est libre à une extrémité :

$$c = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{D}{D+e} + \frac{2e}{D}(1+\nu)$$

On voit que dans tous les cas, c 'est la même relation qui lie l'expression de c pour les tuyaux épais et les tuyaux minces.

$$c_{\text{épais}} = c_{\text{mince}} \frac{1}{1 + \frac{e}{D}} + \frac{2e}{D}(1+\nu) \quad (2.45)$$

2.7.2.3. Conduites en béton armé et précontraint :

Ces conduites présentent la difficulté d'être en matériau composite : acier et béton, dont les modules d'élasticité sont différents. De plus, le problème de fissuration de béton peut intervenir, ce problème est très difficile à prendre en compte lors d'une étude théorique.

Dans le cas d'absence des expérimentations, les constructeurs proposent d'appliquer simplement la formule de calcul de la célérité des tuyaux minces en prenant $E=3$ à 4.10^{10} Pascal pour le béton armé, et 4.10^{10} Pascal pour le béton précontraint.

A partir de quelques expérimentations, Gariel a établi une méthode simplifiée qui calcul la célérité comme si la conduite était en acier, mais avec une épaisseur équivalente e donnée par l'expression suivante :

$$e = e_a \left(1 + \frac{1}{n} \frac{e_b}{e_a} \right) \quad (2.46)$$

Tel que :

e_b : Epaisseur du béton ;

e_a : Epaisseur de l'armature circonférentielle supposée uniformément répartie ;

n : Rapport des modules d'élasticité (E_a/E_b), il est variable entre 8 et 15.

En prenant en compte de la répartition non uniforme des contraintes dans l'épaisseur de tuyau, Massouh a présenté dans sa thèse une solution théoriquement plus correcte et analogue à celle de Gariel, mais en prenant une épaisseur équivalente en béton

$$e = e_b \left(1 + n \frac{e_a}{e_b} \right) \quad (2.47)$$

Cette méthode donne des solutions plus proches de la solution théorique que la solution de Gariel, mais quoi qu'il en soit, les écarts entre les résultats de toutes ces méthodes sont inférieur à 10% ou à 15%.

2.7.3. Expression de la célérité d'onde de coup de bélier pour les conduites enterrées :

Meunier (1980) a mentionné dans son travail, que seules les expérimentations permettraient d'approcher de façon satisfaisante le problème de la modification introduite par l'enterrement des conduites sur la valeur de la célérité, Meunier a présenté à titre précaire et avec une grande plage d'incertitude une courbe donnant le pourcentage d'augmentation de la célérité pour tenir compte du fait que les tuyaux sont enterrés.

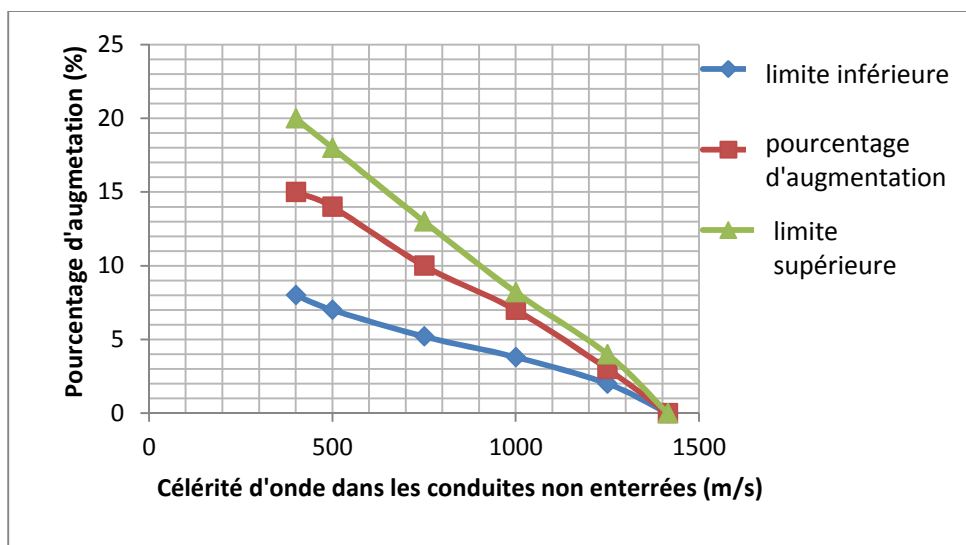


Figure 2.5 : Pourcentage d'augmentation de la célérité pour les tuyaux enterrés

Plus tard, Salah et Massouh (2001) ont proposé une expression de la célérité d'onde pour les conduites enterrées et les galeries rocheuses qu'elles soient blindées ou pas, ces auteurs ont introduit les caractéristiques mécaniques du sol environnant, et les efforts longitudinaux en analysant l'effet de la charge externe exercée par le remblai qui surmonte une conduite enterrée, pour cela ils ont considéré le sol comme un cylindre d'épaisseur infinie agissant autour de la conduite comme un ressort. Ainsi, pour montrer l'effet de la charge externe sur l'augmentation de la célérité, des exemples numériques ont été présentés en considérant différents matériaux de conduites, ils ont obtenu l'expression suivante :

$$a = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{1 + K \frac{2b(1-\nu_m^2)G}{(1+\nu_m)bE_c + E_m e_m G}}} \quad (2.48)$$

Où :

b: rayon intérieur de la conduite ;

G : c'est un facteur qui dépend des coefficients de Poisson et des modules d'élasticité de béton et de sol, ainsi que le rayon intérieur de la conduite.

$$G = \frac{E_c(1-\nu_s)(1-\nu_c)[c^2 + b^2(1-2\nu_c)] + E_s(1-\nu_s)^2(1-2\nu_c)(c^2 - b^2)}{E_c(c^2 - b^2)(1-\nu_M)(1-\nu_s) + E_s(1-\nu_c)(1-\nu_M)[b^2 + c^2(1-2\nu_c)]} \quad (2.49)$$

Très récemment en 2010, ces mêmes auteurs ont considéré un autre modèle des conduites enterrées dans un remblai infini homogène et isotrope, dans ce travail, les auteurs modélisent le sol par une contrainte uniformément répartie sur le contour de la conduite et qui dépend de la profondeur à laquelle est enterrée la conduite ainsi que du type de remblai qui la surmonte. Le matériau formant les conduites utilisées est le PVC haute densité avec un rapport diamètre/épaisseur variable à l'intérieur des limites $5 < D/e < 12$.

Ils ont obtenu l'expression suivante :

$$a = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{1 + K(1-\nu_m^2) \frac{2b}{E_m e_m} [1 + B(P - P_e)]}} \quad (2.50)$$

Où B représente la déformabilité donnée par :

$$B = \frac{(1 + \nu_m^2) b^2}{E_m e_m} (1 - 2\nu) \quad (2.51)$$

2.8. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons formulé les équations différentielles de base gouvernant les écoulements transitoires en charge, ainsi que les différents avis donnés par les auteurs concernant la détermination de la célérité d'onde du coup de bélier. Il a été également présenté les différents cas d'ancrage.

Les équations différentielles auxquelles nous avons aboutis n'ont malheureusement pas de solution analytique connue, sauf pour quelques cas hypothétiques simples. Cette difficulté nous a obligés de faire recours à l'application des méthodes numériques, ce qui fera l'objet de chapitre suivant.

Chapitre-3-

**METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DU
REGIME TRANSITOIRE**

Chapitre-3-

METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DU REGIME TRANSITOIRE

3.1. Introduction :

Pour résoudre les problèmes des écoulements transitoires, plusieurs approches ont été envisagées :

La première consiste à rechercher des solutions analytiques pour des cas hypothétiques simples, c'est l'approche théorique. Les informations se présentent sous forme d'expressions mathématiques faciles à résoudre (équations linéaires) mais elle est restreinte à des géométries simples.

La deuxième consiste à recourir à l'expérimentation en laboratoire, c'est l'approche expérimentale, elle est apte d'être plus réaliste et proche de la réalité, mais dans ce cas on est confronté à certains inconvénients comme les équipements requis, les problèmes d'échelles, les difficultés de mesures et le coût des opérations.

La troisième consiste à rechercher une solution numérique approchée des équations du problème, dans ce cas on n'est pas restreint à des problèmes linéaires, on peut traiter aussi des équations et des géométries plus complexes. C'est cette dernière approche qui sera abordée dans notre travail.

3.2. Quelques définitions :**3.2.1. Consistance, stabilité et convergence:**

Il existe plusieurs critères pour mesurer la performance des méthodes numériques, les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.

Ces différents liens, résumés sur la figure (3.1), sont :

- **La consistance** : c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque les pas de discrétisation (Δt et Δx) tendent vers zéro.

- **La stabilité** : c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée, autrement dit, la stabilité indique la capacité à contrôler l'accumulation des erreurs.

- **La convergence** : c'est la propriété qui assure que la solution numérique tende vers la (ou une) solution exacte des équations continues, c'est-à-dire la possibilité de faire tendre l'erreur globale vers 0 avec le pas.

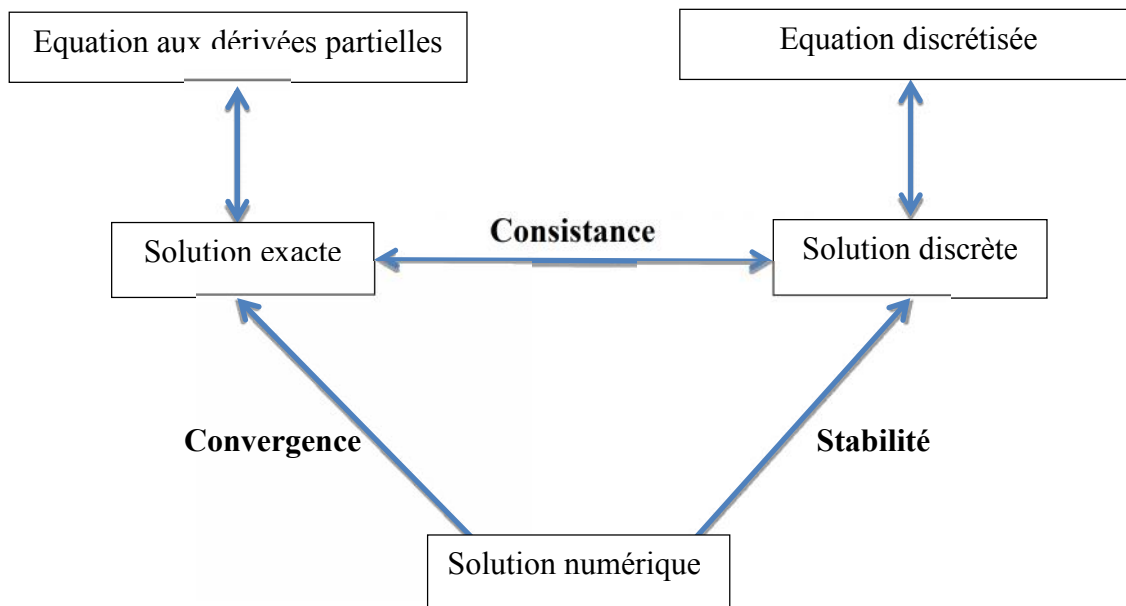


Figure 3.1 : Solution exacte, numérique et discrète.

3.2.2. Le théorème de Lax :

La consistance et la stabilité sont en général relativement faciles à démontrer, par contre la convergence demande souvent des démonstrations longues et parfois difficiles. Le théorème de Lax s'énonce comme suit : la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes à la convergence.

Autrement dit, si on discrétise une équation aux dérivées partielles de façon consistante et si la solution de cette équation est stable, alors elle est également convergente.

3.2.3. Schéma numérique :

Ce terme désigne la manière dont on discrétise l'équation aux dérivées partielles (et non pas l'EDP discrétisée elle-même). Le même schéma numérique peut être appliqué à différentes EDP. (Dans notre cas nous allons appliquer différents schémas numériques pour le système d'équations aux dérivées partielles de BSV).

3.2.4. Ordre d'un schéma numérique :

L'exactitude d'un schéma numérique mesure la qualité de l'approximation de la solution exacte du problème. L'erreur totale est obtenue en retranchant la solution exacte du problème de la solution discrétisée. Cette erreur est fonction de $(\Delta t)^q$ et $(\Delta x)^p$ où Δx et Δt sont respectivement le pas d'espace et de temps de discrétisation. L'ordre du schéma numérique est alors q dans le temps et p dans l'espace.

3.2.5. Stabilité d'un schéma numérique :

La notion de stabilité s'applique à des schémas, pour lesquels on calcule des solutions de façon itérative. Les calculs s'effectuent sur des ordinateurs avec une précision finie, donc ils sont sujets à des erreurs d'arrondis. Lors d'un calcul itératif, ces erreurs peuvent être amplifiées par le schéma numérique. Un schéma itératif est dit stable, si les perturbations de la solution numérique ne sont pas amplifiées au cours des itérations.

A l'opposé des schémas aux différences finies implicites qui sont inconditionnellement stables, les schémas explicites quant à eux réclament la satisfaction de la condition de stabilité CFL "Courant-Friedrich-Levy" du nom des auteurs (Richard Courant, Kurt Friedrich et Hans Lévy. 1928)

Cette condition de stabilité s'énonce comme suit : le pas de temps doit être tel qu'une onde se propage à la vitesse a , ne parcourt pas plus d'un pas d'espace en un pas de temps. Elle se traduit par :

$$\Delta t \leq \frac{Cr \cdot \Delta x}{\max(|V| + a)}$$

Et comme la célérité des ondes " a " est très grande comparée à la vitesse d'écoulement dans la conduite et garde sa valeur constante durant l'apparition du régime transitoire, on obtient donc :

$$\Delta t \leq \frac{Cr \cdot \Delta x}{a}$$

D'après les travaux de Chaudhry et Hussaini (1985), de bons résultats numériques ont été obtenus pour $Cr=1$, En faisant le choix de $Cr=1$, l'équation précédente devient :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$$

3.3. Equations d'Alliévi :

Les équations d'Alliévi découlent aussi en partant de l'équation de continuité et l'équation dynamique, il suffit de les simplifier en négligeant les pertes de charge et les termes infiniment petits relativement aux autres termes tel que $U \cdot (\partial U / \partial t)$ soit négligeable devant $(\partial U / \partial t)$ ainsi que $U \cdot (\partial P / \partial t)$ soit négligeable devant $(\partial P / \partial t)$. On obtient ainsi les équations suivantes qui constituent les équations d'Alliévi:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

En dérivant la première équation par rapport à x et la deuxième équation par rapport à t , on obtient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

En dérivant la première équation par rapport à t et la deuxième équation par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

Les équations (3.2) et (3.3) sont dites équations des ondes. La solution d'un pareil système a été donnée par d'Alembert (pour a constante)

Soit :

$$\begin{cases} H = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) + cte \\ U = -\frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] + cte \end{cases} \quad (3.4)$$

Si on considère en un point M que la pression et la vitesse à l'instant initial sont H_0 et U_0 , on obtient les équations d'alliévi :

$$\begin{cases} H - H_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \\ U - U_0 = -\frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \end{cases} \quad (3.5)$$

Il est d'usage dans la théorie du coup de bélier de porter souvent les abscisses x en direction positive à partir de l'organe de fermeture aval B vers le point A. (Figure 3.2)
Par contre, les vitesses U sont comptées positivement dans la direction de l'écoulement en régime permanent (de A à B).

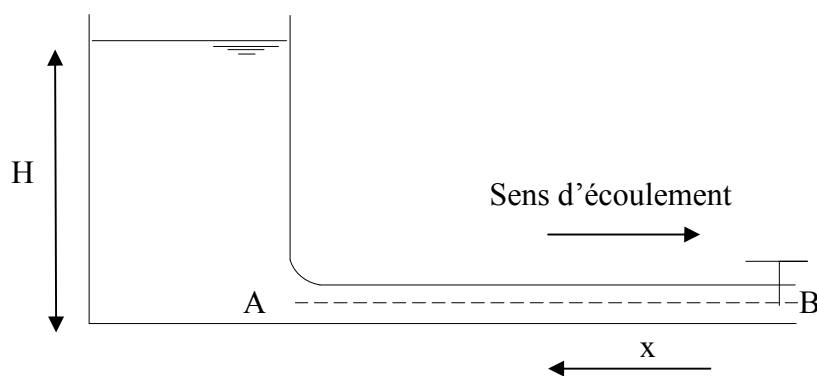


Figure 3.2 : Schéma d'une conduite en charge

La fonction F représente une onde de pression se propageant sans déformation à la célérité (a) le long de la conduite dans le sens inverse de l'écoulement, Une explication physique similaire s'applique pour la fonction f , elle représente une seconde onde de pression se propageant sans déformation à la célérité ($-a$) le long de la conduite dans le sens de l'écoulement. (Parmakian, 1963)

La forme mathématique des fonctions F et f dépend des conditions aux limites et de la loi de fermeture ou d'ouverture de la vanne.

Alliévi a effectué une série d'expérience où il a étudié successivement les différentes manœuvres des organes hydrauliques (fermeture, ouverture...), ainsi il a résumé tous les résultats graphiquement, ces graphes permettent de voir immédiatement comment varie la pression en fonction du temps de fermeture ou d'ouverture.

Mais, l'application de cette méthode dans le calcul des écoulements transitoires en charge est assez restreinte surtout lorsque la conduite présente des variations de section (des bifurcations). Un autre inconvénient de cette méthode est que les équations d'Alliévi ont été établies en négligeant les pertes de charge.

3.4. Méthode graphique :

La résolution des équations d'Alliévi par la méthode analytique nécessite des calculs longs et compliqués, c'est pourquoi des solutions graphiques plus rapides ont été imaginées et mises au point. Cette méthode a été créée indépendamment l'un de l'autre par Schneider (1929) et Bergeron (1931) en France et qui porte son nom « méthode de Bergeron ».

En additionnant et en retranchant membre à membre les équations d'Alliévi on trouve :

$$(H - H_0) - \frac{a}{g}(U - U_0) = 2F \quad (3.6)$$

$$(H - H_0) + \frac{a}{g}(U - U_0) = 2f \quad (3.7)$$

Désignant par S la section droite de la conduite qui est constante et Q le débit qui traverse cette section, au temps t nous avons $S.U=Q$ et à l'instant initiale $S.U_0=Q_0$

Les équations ci-dessus deviennent alors :

$$H - H_0 = \frac{a}{gS}(Q - Q_0) + 2F \quad (3.8)$$

$$H - H_0 = -\frac{a}{gS}(Q - Q_0) + 2f \quad (3.9)$$

Il en résulte que dans un plan (H, Q) et pour chaque valeur possible de F et f, les deux équations (3.8) et (3.9) représentent des droites de pente (a/gS) et $(- a/gS)$ respectivement. Ces deux droites définissent le régime d'écoulement dans la conduite et servent de base pour la solution graphique du coup de bélier.

Cette méthode a pour avantage d'être la base de la méthode des caractéristiques, mais l'utilisation de cette méthode dans des cas complexes (présence de plusieurs équipements hydrauliques, branchements...) se fait au prix d'un travail long et délicat, c'est pourquoi, elle n'est utilisée actuellement que pour des cas simples ou pour la compréhension physique du phénomène.

De plus, la complexité des problèmes qu'on rencontre en pratique d'une part et le développement de l'outil informatique d'autre part ont favorisé l'ingénieur pour créer des programmes plus sophistiqués. En effet, le calcul des écoulements transitoires en charge par les méthodes analytique (méthode d'Alliévi) ou graphique (méthode de Bergeron) a été surmonté par l'utilisation des méthodes numériques, ces dernières permettent de tester un grand nombre de cas de fonctionnement et d'étudier plusieurs variantes en modifiant les données d'entrée, ainsi

elles permettent le calcul des paramètres recherchés (débit, pression) aux divers points du réseau même les plus compliqués.

Nous allons présenter ci-après les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles hyperboliques et quasi linéaires, il s'agit de :

- Méthodes des éléments finis ;
- Méthode des volumes finis ;
- Méthodes des différences finies ;
- Méthode des caractéristiques.

3.5. Les méthodes numériques :

3.5.1. Méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis permet de résoudre, de manière discrète, les équations différentielles partielles complexes pour lesquelles une solution approchée suffisamment fiable est requise. C'est une technique nouvelle et son utilisation reste limitée en hydraulique urbaine comparativement aux autres méthodes numériques. Elle a trouvé une large application dans les différents problèmes d'écoulement (dans le domaine des solides, mécanique des fluides...), cependant son succès dans le calcul des écoulements transitoires est très restreint.

La méthode des éléments finis se différencie de celle des différences finies par le mode de discrétisation du domaine de définition de la solution: alors que le domaine de solution est subdivisé en grilles de points individuels dans la méthode des différences finies, il est subdivisé en grille d'éléments dans la méthode des éléments finis. Dans le cas de son application à la résolution des équations de Barré de Saint-Venant, la démarche consiste à utiliser des techniques hybrides mettant en œuvre des éléments finis dans le domaine spatial et les différences finies dans le domaine temporel (Young Il Kim, 2008). Il faut noter qu'avec cette méthode on peut choisir autant de nœuds qu'on veut par élément, ce qui donne une meilleure précision de la solution.

Elle a l'avantage de permettre une prise en compte des géométries complexes du domaine et pourrait être bien adaptée à des problèmes du type jonction de collecteurs. A l'opposé, le temps et le volume des calculs restent les inconvénients majeurs de cette méthode.

3.5.2. Méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis permet également de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles. Cependant, à la différence des méthodes à différences finies pour lesquelles les approximations sont effectuées au niveau des dérivées, la méthode de volumes finis utilise des approximations d'intégrales. D'après Ghidaoui et *al.* (2005), les schémas de type volumes finis ont été appliqués pour la première fois par Guinot (2000).

La résolution approchée de l'équation aux dérivées partielles se fait en subdivisant le domaine d'étude en unités élémentaires appelées cellules de calcul qui peuvent prendre la forme de petits volumes, de petites surfaces ou de petits segments selon que celui-ci est tridimensionnel, bidimensionnel ou unidimensionnel.

Les méthodes basées sur les volumes finis ont été mises au point pour les lois de conservation pour lesquelles les équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. Les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface en utilisant le théorème de flux-divergence. Comme le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives. Ce qui est particulièrement important lorsqu'on résout des lois de conservation.

Après écriture des équations sous forme intégrale, une discrétisation des flux entrant et sortant de celle-ci permet de déterminer l'évolution du système en fonction du temps (LeVeque, 2002), l'intégrale est applicable localement sur chaque volume et conserve la même valeur dans chaque cellule de calcul.

Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés puisque la formulation d'une méthode basée sur les volumes finis ne tient aucun compte de la complexité du maillage, de plus, après avoir fait ses preuves dans la résolution des équations hyperboliques, spécialement la dynamique des gaz, la méthode a trouvé application dans les problèmes d'écoulement à surface libre (Toro et Garcia-Navarro, 2007)

3.5.3. Méthode des différences finies :

Cette méthode consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs basés sur des intervalles de temps et d'espace finis Δt et Δx , tout en basant sur les développements de Taylor des fonctions continues et dérivables, puis à résoudre le système d'équations algébriques ainsi obtenu en tenant compte des conditions initiales et aux limites.

Lorsque les pas de temps et d'espace sont petits, les développements limités sont proches des valeurs exactes.

Un bon nombre de schémas aux différences finies implicites et explicites ont été mis au point, dès le début des années 1970 plusieurs travaux ont été effectués dans ce contexte, à l'image de Wylie et Streeter qui présentèrent une méthode implicite aux différences finies centrées afin de permettre l'usage d'incrément de temps plus grand que les schémas explicites.

La méthode des différences finies vise à déterminer les valeurs de la fonction recherchée notée « f » en quelques points particuliers. Dans le cas de la résolution des équations de BSV on recherche les valeurs de débit Q (ou la vitesse U) et la charge H (ou la pression P).

Pour cela On commence par quadriller le plan (x, t) afin d'obtenir des mailles de taille (Δx , Δt) où Δx est le pas d'espace et Δt le pas de temps. (Figure 3.3)

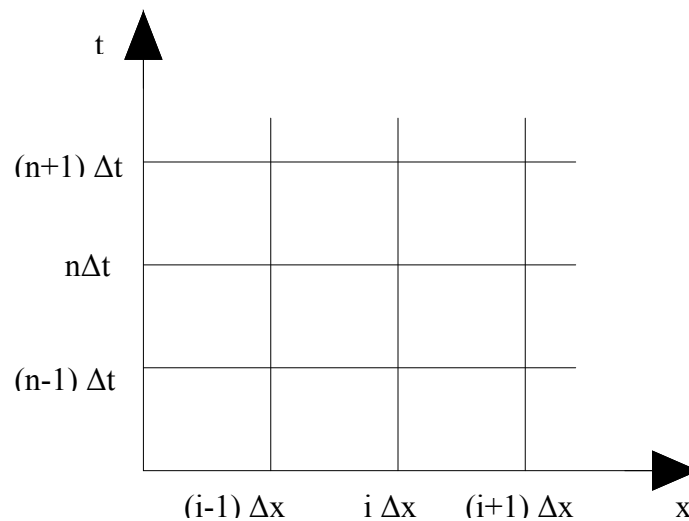


Figure 3.3 : *Quadrillage du plan (x, t).*

Selon l'utilisation des développements limités, on obtient des expressions différentes des dérivées par rapport à x qui engendrent généralement trois types de schémas (centré, progressif ou régressif).

Soit $f(x)$ une fonction continue et dérivable, Taylor a proposé les formulations suivantes pour l'approximation de $f(x)$:

$$f_{i+1} = f(x_i + \Delta x) = f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4) \quad (3.10)$$

$$f_{i-1} = f(x_i - \Delta x) = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4) \quad (3.11)$$

Tel que $O(\Delta x)$ représente le reste ou l'erreur de troncature, appelée aussi erreur de discrétisation.

La soustraction de ces deux relations donne :

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2)$$

En négligeant l'erreur de troncature on obtient le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de f :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

L'approximation de la dérivée première de f à partir de l'équation (3.10) permet d'obtenir le schéma progressif appelé aussi décentré amont de premier ordre de précision :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

De même, l'approximation de la dérivée première de f à partir de l'équation (3.11) permet d'obtenir le schéma régressif appelé aussi décentré aval de premier ordre de précision :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

Pour l'approximation de la dérivée seconde de f, on procède de la même manière, en faisant la somme des deux équations (3.10) et (3.11), on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées troisième, quatrième etc..., mais pour le cas des équations de BSV qui régissent le phénomène transitoire, que les dérivées premières de Q et H par rapport à x (l'espace) et t (le temps) apparaissent, donc on n'a pas intérêt à faire les approximations des dérivées d'ordre supérieur.

D'après Kovacs (1988), L'expression la plus générale de la dérivée de f par rapport à x est donnée comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_3 \frac{\alpha_1 [f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}] + (1-\alpha_1) [f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}]}{\Delta x} + (1-\alpha_3) \frac{\alpha_2 [f_{i+1}^n - f_i^n] + (1-\alpha_2) [f_i^n - f_{i-1}^n]}{\Delta x} \quad (3.12)$$

Selon la valeur de α_1 , α_2 et α_3 , on a les différents types de schémas numériques (tableau 3.1) :

Tableau 3.1 : Divers types de schémas numériques

Pondération		schéma
$\alpha_3 = 0$		explicite
$\alpha_3 = 0.5$		Implicite centré dans le temps
$\alpha_3 = 1$		Totalement implicite
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 1$	Progressif
$\alpha_1 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.5$	centré
$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 0$	régressif
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 0$	Mixte décentré

La dérivée partielle par rapport au temps s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{[f_i^{n+1} - f_i^n]}{\Delta t} + (1-\nu) \frac{[f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n]}{\Delta t} \quad (3.13)$$

ν étant un paramètre appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

On distingue généralement deux grandes familles dans les méthodes de différences finies: les différences finies explicites et implicites.

3.5.3.1. Les différences finies explicites :

Un schéma explicite est caractérisé par le fait que l'on puisse exprimer explicitement une valeur inconnue en fonction de valeurs connues, donc la solution au pas de temps $(t + \Delta t)$ est entièrement définie à partir de celle obtenue au pas de temps t , donc On calcule la valeur de f_i^{n+1} connaissant les valeurs de f calculées au temps $n \Delta t$ pour, en général, les pas d'espaces $i-1$, i et $i+1$. (Figure 3.4)

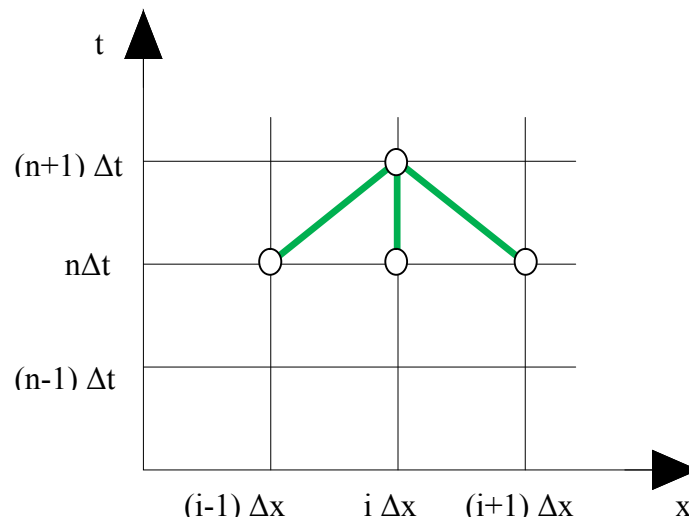


Figure 3.4 : Schéma de type explicite

L'avantage de ces schémas est leur simplicité de mise en œuvre, néanmoins, la stabilité de ces derniers est toujours liée au choix du pas de temps à utiliser pour la résolution, de ce choix dépend la stabilité du schéma numérique considéré.

Pour les problèmes non linéaires, à chaque pas de temps, on a plusieurs vitesses de propagation. Pour qu'un schéma explicite soit stable, il faut que l'onde la plus rapide ne parcoure pas plus que la longueur d'une cellule Δx pendant le temps Δt .

En ce qui concerne l'emploi des schémas explicites, Chaudhry et Hussaini (1985), ont appliqué des méthodes développées dans d'autres domaines (notamment en aérodynamique), au calcul du coup de bélier dans les réseaux simples. Leurs résultats démontrent clairement l'intérêt de ces méthodes. Chaudhry et *al.* (1994) ont donc poursuivi dans cette voie, en appliquant ces méthodes au calcul d'un écoulement plus complexe ; un pseudo fluide composé d'un liquide dans lequel se trouve une faible concentration d'air. Les schémas explicites étudiés par ces auteurs sont représentés par la méthode de Mac Cormack (1971), le schéma de Lambda et le schéma de Gabutti (1983), ils sont introduits pour résoudre les équations différentielles, partielles hyperboliques quasi-linéaire décrivant le phénomène de coup de bélier en phase de fermeture dans une conduite. Beauchemin (1992) a étendu la formulation du modèle aux différences finies explicites pour prendre en compte tous les termes non linéaires des équations principales, permettant ainsi le calcul d'écoulement très complexes. En particulier, il a été mis en œuvre pour étudier l'écoulement non permanent du liquide dans les réseaux multi-branches avec différents appareils de protection. Pour plus de compréhension, on décrit un bref raisonnement de chacun de ces trois schémas utilisés par Chaudhry.

a) Schéma de Mac Cormack :

Le schéma de Mac Cormack est un schéma du deuxième ordre de précision, en temps et en espace. Il comprend deux étapes : étape de prédiction et étape de correction, dans chacune sont utilisées des approximations à différences finies, pour cela deux alternatives sont possibles :

Première alternative : les approximations aux différences finies des pas suivants sont utilisées dans la partie prédicteur et des approximations aux différences finies dans le pas avant sont utilisées dans la partie correcteur.

Deuxième alternative : les approximations aux différences finies dans le pas précédent sont utilisées dans la partie prédicteur et les approximations aux différences finies dans le pas suivant sont utilisées dans la partie correcteur.

Mac Cormack recommande l'utilisation de ces deux alternatives dans une séquence : c'est-à-dire : la première alternative à une étape de temps et la deuxième alternative pendant la prochaine étape de temps suivi par la première alternative encore une fois.

La conduite a pour longueur L divisée en (N) pas de distance Δx . Le premier nœud est de numéro 1, et le dernier est de numéro (N+1). Les valeurs de H et Q sont connues au temps t en n.dt (à partir des conditions initiales) et sont déterminées au temps (t+dt) en (n+1)dt. (Figure 3.5)

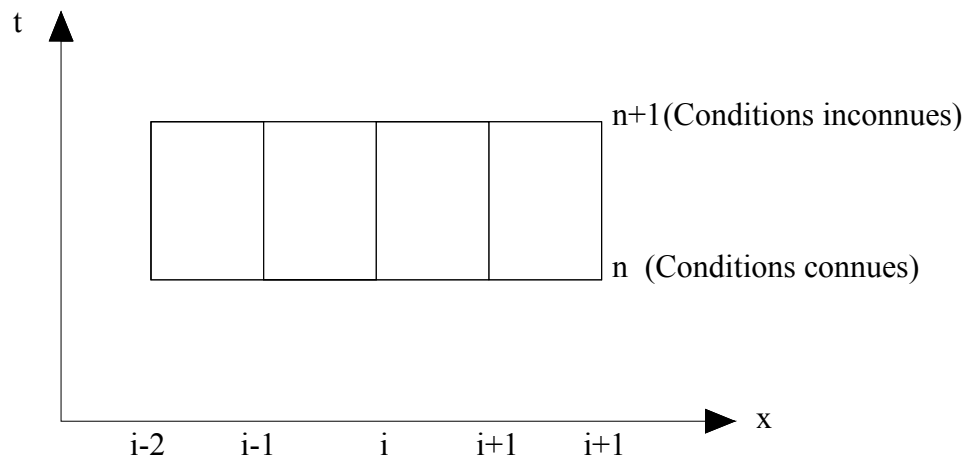


Figure 3.5 : Schéma de discrétisation du domaine

On peut écrire selon Maccormack :

- **Première alternance :**

Partie prédicteur :

$$H_i^* = H_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_{i+1}^n - Q_i^n) \quad (3.14)$$

$$Q_i^* = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_{i+1}^n - H_i^n) - R |Q_i^n| \cdot Q_i^n \quad (3.15)$$

Avec : $i = 1, 2, \dots, N$

Le signe (*) désigne les valeurs prédites.

Partie correcteur :

$$H_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[H_i^n + H_i^* - \frac{\Delta t \cdot a^2}{gS} (Q_i^* - Q_{i-1}^*) \right] \quad (3.16)$$

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[Q_i^n + Q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_i^* - H_{i-1}^*) - R |Q_i^*| \cdot Q_i^* \Delta t \right] \quad (3.17)$$

Avec : $i = 2, 3, \dots, N+1$

- **Deuxième alternance :**

Partie prédicteur :

$$H_i^* = H_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_i^n - Q_{i-1}^n) \quad (3.18)$$

$$Q_i^* = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_i^n - H_{i-1}^n) - R |Q_i^n| \cdot Q_i^n \Delta t \quad (3.19)$$

Avec : $i = 2, 3, \dots, N+1$

Partie correcteur :

$$H_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[H_i^n + H_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_{i+1}^* - Q_i^*) \right] \quad (3.20)$$

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[Q_i^n + Q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_{i+1}^* - H_i^*) - R |Q_i^*| \cdot Q_i^* \Delta t \right] \quad (3.21)$$

Avec : $i = 1, 2, \dots, N$

Le Schéma de MacCormack a été utilisé avec succès par Kessal (1987) dans la simulation du problème d'écoulement homogène transitoire avec cavitation. Ultérieurement Chaudhry et *al.* (1990) appliquèrent le schéma de MacCormack et de Gabutti pour la simulation des écoulements non permanents diphasiques liquide-gaz avec un faible nombre de Mach. Les résultats obtenus par les auteurs montrent que le schéma de MacCormack aboutit à de meilleurs résultats pour l'analyse des écoulements transitoires en charge.

b) schéma de Lambda :

Le schéma de Lambda se base sur les équations qui régissent le phénomène transitoire obtenues précédemment :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial x} + R|Q|.Q = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

En multipliant la deuxième équation du système (3.22) par un nombre (n) et en l'additionnant avec la première équation on obtient :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + n.gS \frac{\partial H}{\partial x} \right) + n \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{a^2}{n.gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + n.R|Q|.Q = 0 \quad (3.23)$$

Posons :

$$n.gS = \frac{dx}{dt} = \frac{a^2}{n.gS} \quad (3.24)$$

Donc :

$$n = \pm \frac{a}{gS} \quad (3.25)$$

Ce sont les directions des caractéristiques.

Posons :

$$\lambda = \frac{dx}{dt} \quad (3.26)$$

Les caractéristiques positive et négative sont représentées par λ^+ et λ^- respectivement, tel que :

$$\begin{cases} \lambda^+ = \frac{dx}{dt} = a \\ \lambda^- = \frac{dx}{dt} = -a \end{cases} \quad (3.27)$$

L'équation (3.23) devient :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial H^+}{\partial x} \right) + \frac{a}{gS} \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial Q^+}{\partial x} \right) + \frac{a}{gS} R|Q|.Q = 0 \\ \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial H^-}{\partial x} \right) - \frac{a}{gS} \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial Q^-}{\partial x} \right) - \frac{a}{gS} R|Q|.Q = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Nous soustrayons la deuxième équation du système (3.28) de la première équation et en multipliant par $(g S/n)$ nous obtenant :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{gS}{a} \left(\lambda^+ \frac{\partial H^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial H^-}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\lambda^+ \frac{\partial Q^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial Q^-}{\partial x} \right) + R|Q|Q = 0 \quad (3.29)$$

En additionnant la deuxième équation du système (3.28) avec la première équation nous trouvons :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\lambda^+ \frac{\partial H^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial H^-}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{a}{gS} \left(\lambda^+ \frac{\partial Q^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial Q^-}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.30)$$

Dans ce schéma les dérivées partielles sont remplacées par les approximations de différences finies.

- **Algorithme du schéma de Lambda :**

Partie de prédiction :

$$f_x^+ = \frac{2f_i^j - 3f_{i-1}^j + f_{i-2}^j}{\Delta x} \quad (3.31)$$

$$f_x^- = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \quad (3.32)$$

Le terme (f) représente le débit Q ou la charge H ;

$$Q_i^* = Q_i^j - \Delta t \left[\frac{1}{2} \frac{gS}{a} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R|Q_i^j| Q_i^j \right] \quad (3.33)$$

$$H_i^* = H_i^j - \Delta t \left[\frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{a}{gS} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right] \quad (3.34)$$

Partie de correction :

$$f_x^+ = \frac{f_i^* - f_{i-1}^*}{\Delta x} \quad (3.35)$$

$$f_x^- = \frac{-2f_i^* + 3f_{i+1}^* - f_{i+2}^*}{\Delta x} \quad (3.36)$$

$$Q_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[Q_i^j + Q_i^* - \Delta t \left[\frac{1}{2} \frac{gS}{a} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R|Q_i^*| Q_i^* \right] \right] \quad (3.37)$$

$$H_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[H_i^j + H_i^* - \Delta t \left[\frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{a}{gS} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right] \right] \quad (3.38)$$

c) Schéma de Gabutti :

Le schéma de Gabutti est similaire au schéma de Lambda. Dans ce schéma, les dérivées partielles sont remplacées par les approximations aux différences finies.

- **Algorithme du schéma de Gabutti :**

- **Partie prédicteur :**

$$f_x^+ = \frac{f_i^j - f_{i-1}^j}{\Delta x} \quad (3.39)$$

$$f_x^- = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \quad (3.40)$$

Dans les expressions précédentes, le terme (f) représente le débit Q ou la charge H ;

En tenant compte de ces approximations aux différences finies et des expressions (3.29) et (3.30), on obtient les valeurs prédites du débit Q' et de la charge H' :

$$Q_i' = Q_i^j - \Delta t \left[\frac{1}{2} \frac{gS}{a} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R |Q_i^j| \cdot Q_i^j \right] \quad (3.41)$$

Et :

$$H_i' = H_i^j - \Delta t \left[\frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{a}{gS} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right] \quad (3.42)$$

- **Partie correcteur :**

$$f_x^+ = \frac{f_i' - f_{i-1}'}{\Delta x} \quad (3.43)$$

$$f_x^- = \frac{f_{i+1}' - f_i'}{\Delta x} \quad (3.44)$$

En utilisant ces approximations aux différences finies et en tenant compte des relations (3.29) et (3.30), Et on détermine Q_i^* et H_i^* qui sont les même que dans le schéma de Lambda :

$$Q_i^* = Q_i^j - \Delta t \left[\frac{1}{2} \frac{gS}{a} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R |Q_i^j| \cdot Q_i^j \right] \quad (3.45)$$

$$H_i^* = H_i^j - \Delta t \left[\frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{a}{gS} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right] \quad (3.46)$$

Les paramètres Q_i et H_i au pas de temps (j+1) sont calculés comme suit :

$$Q_i^{j+1} = Q_i^j + \frac{1}{2} \Delta t (Q_i^* + Q_i') \quad (3.47)$$

$$H_i^{j+1} = Q_i^j + \frac{1}{2} \Delta t (H_i^* + H_i') \quad (3.48)$$

Il a été ainsi démontré que ces trois schémas donnaient une meilleure solution que la méthode des caractéristiques de premier ordre pour un nombre de Courant $Cr < 1$.

3.5.3.2. Les différences finies implicites :

Le caractère implicite d'un schéma numérique implicite est lié au fait que l'on ne puisse pas exprimer explicitement chaque valeur inconnue en fonction uniquement de valeurs connues. Dans la famille des schémas implicites, les variables sont calculées simultanément à un nouveau pas de temps, par la résolution d'un système avec autant d'inconnues que de nœuds du maillage. Dans le cas présenté ci-dessus (figure 3.6) la valeur de f_i^{n+1} est calculée en fonction de f_i^n et également en fonction de f_{i-1} et de f_{i+1} au pas de temps $(n+1) \Delta t$.

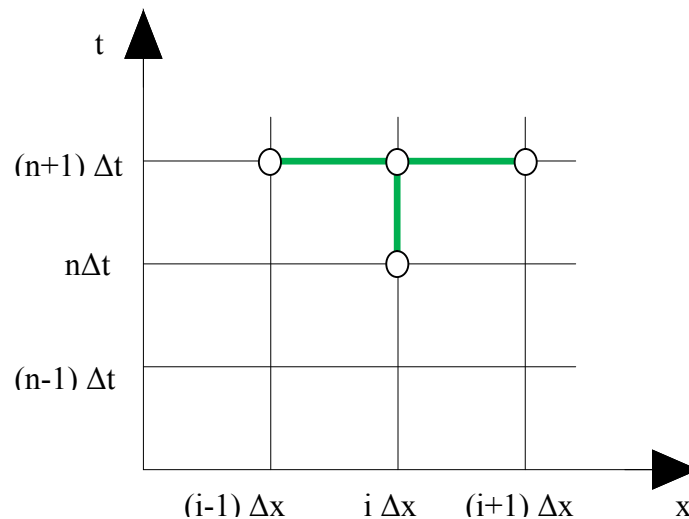


Figure 3.6 : Schéma de type implicite

Le principal avantage d'un schéma implicite est qu'il est stable quel que soit le pas de temps choisi, néanmoins, si le domaine est discrétisé en N mailles, alors le schéma implicite mène à un système de N équations à N inconnues (complexité de calcul).

3.5.4. Méthode des caractéristiques :

Comme il a été mentionné précédemment, la méthode des caractéristiques (MDC) est une méthode numérique de principe similaire à celui de la méthode graphique développée par Bergeron, elle est apparue dès les années 1960 suite à l'essor des moyens de calcul

informatique. Cette méthode a reçu une intense application dans le calcul des régimes transitoires en charge.

Le système de deux équations aux dérivées partielles (Equation dynamique, équation de continuité) régissant le phénomène transitoire sont transformées par la méthode des caractéristiques en quatre équations aux dérivées totales, une paire appelée équations des caractéristiques et l'autre paire, équation de compatibilité.

La méthode des caractéristiques est certainement la plus utilisée pour le calcul du coup de bélier, elle permet d'avoir les caractéristiques de l'écoulement en n'importe quel point de la conduite et à n'importe quel temps. Toutefois, l'analyse du coup de bélier par cette méthode peut se faire manuellement, néanmoins c'est une procédure de calcul extrêmement longue. Les avantages que présente sont une simulation correcte de l'onde, une illustration simple de sa propagation, une programmation présentant peu de difficultés et une efficacité en termes de calcul, elle peut être facilement manipulée comparativement aux autres méthodes, cette méthode est particulièrement adaptée pour les systèmes avec des conditions aux limites constantes. L'inconvénient de cette méthode est que le pas de temps adopté doit être réduit pour satisfaire la condition de stabilité. Les différents schémas implicites et explicites examinés dans le cas où les pieds des caractéristiques n'aboutissent pas aux nœuds de calcul, ont montré que l'utilisation de la méthode des caractéristiques admet des erreurs temporelles et spatiales. Afin de quantifier ces dernières, l'utilisation des séries de Fourier, le développement de Taylor, et la méthode de l'interpolation linéaire entre deux nœuds, ont été utilisés en 2009 par Salah et Massouh.

Reprenons le système d'équations de Saint Venant (2.25) de chapitre précédant :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin \alpha + j) \end{cases} \quad (3.49)$$

Multiplions la première équation du système (3.49) par a/ρ on trouve :

$$\begin{cases} a \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin \alpha + j) \end{cases} \quad (3.50)$$

En additionnant membre à membre les équations formant le système (3.50), on obtient :

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} + (a+U) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho a} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + (a+U) \frac{\partial P}{\partial x} \right] = -g(\sin \alpha + j) \quad (3.51)$$

En soustrayant membre à membre les équations formant le système (3.50), on obtient :

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U-a) \frac{\partial U}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho a} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + (U-a) \frac{\partial P}{\partial x} \right] = -g(\sin \alpha + j) \quad (3.52)$$

En observant les expressions entre crochets, et considérant que $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}$ le système d'équations de Saint Venant devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U + a \\ \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} = -g(\sin \alpha + j) \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U - a \\ \frac{dU}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} = -g(\sin \alpha + j) \end{cases} \quad (3.54)$$

Comme la vitesse d'écoulement U est négligeable devant la célérité d'onde a , et en multipliant la deuxième équation du système (3.54) par $(a \cdot dt/g)$ on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \pm a \\ \frac{a}{g} dU \pm \frac{1}{\rho g} dP = -(\sin \alpha + j) \cdot a dt \end{cases} \quad (3.55)$$

tel que :

$a \cdot dt = dx$, $\sin \alpha \cdot dx = dz$ où z représente la cote du point considéré, $H = \frac{P}{\rho g} + z$ où H est la cote piézométrique, le système d'équations (3.55) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \pm a \\ \frac{a}{g} dU \pm dH = -j.a \end{cases} \quad (3.56)$$

Le système (3.56) peut être écrit sous forme de deux systèmes de deux paires d'équations, lesquelles sont regroupées et notées, équations C^+ et C^- :

$$C^+ \begin{cases} \frac{dx}{dt} = +a \\ \frac{a}{g} \frac{dU}{dt} + \frac{dH}{dt} = -j.a \end{cases} \quad (3.57)$$

$$C^- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a \\ \frac{a}{g} \frac{dU}{dt} - \frac{dH}{dt} = -j.a \end{cases} \quad (3.58)$$

En remplaçant la vitesse U par Q/S nous obtenons les équations aux caractéristiques :

$$C^+ \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \\ \frac{a}{gS} \frac{dQ}{dt} + \frac{dH}{dt} + ja = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

$$C^- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a \\ \frac{a}{gS} \frac{dQ}{dt} - \frac{dH}{dt} + ja = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

Les deux premières équations des systèmes (3.59) et (3.60) c'est-à-dire celles donnant dx / dt sont dites "équations des caractéristiques" et les deux autres sont appelées "équations de compatibilités".

Il est à noter que les équations de compatibilité ne sont valides que le long des lignes caractéristiques $dx / dt = \pm a$, alors que le système d'équations de départ (3.49) est valable dans tout le plan (x, t) . (Boillat et De Souza, 2004)

La solution du système d'équations sera représentée donc, dans le domaine formé par les variables indépendantes, qui est le plan (x, t) . Et puisque la célérité des ondes a est

généralement constante, les équations des caractéristiques représentent ainsi deux droites de pentes $\pm dx / dt$. (Figure 3.7).

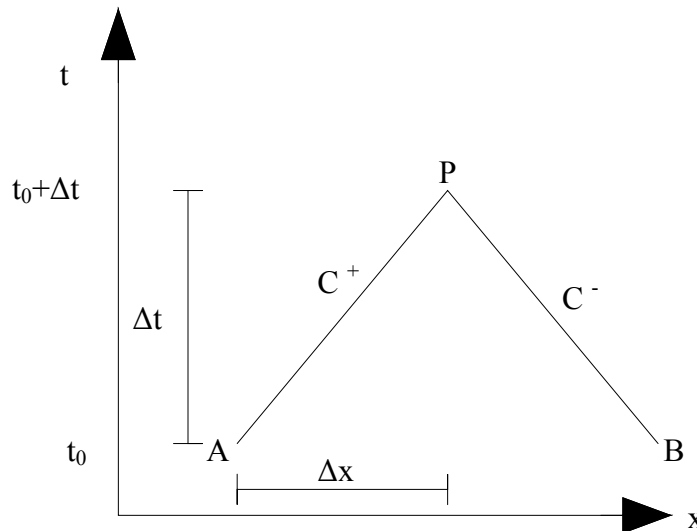


Figure 3.7 : Lignes caractéristiques dans le plan (x, t) (Chaudhry, 1979)

3.6. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont des équations complémentaires et nécessaires chaque fois que les caractéristiques de l'écoulement se varient brusquement en un point donné de la conduite.

L'un des avantages des conditions aux limites est de simplifier les équations du mouvement généralement difficile à résoudre. Donc elles sont nécessaires aux problèmes numériques, surtout pour les équations différentielles et aux dérivées partielles.

Les auteurs ont fait usage de deux techniques pour le traitement des conditions aux limites, l'une par l'ajout de nœuds fictifs aux frontières (extrapolation) et l'autre en exploitant les lignes caractéristiques, qui est la plus facile à implémenter.

On peut facilement se rendre compte que la procédure de calcul de la solution numérique par le schéma de MacCormack ne peut être exécutée aux limites du domaine de calcul du fait de l'absence d'un nœud de part et d'autre de la grille de calcul. (Figure 3.8)

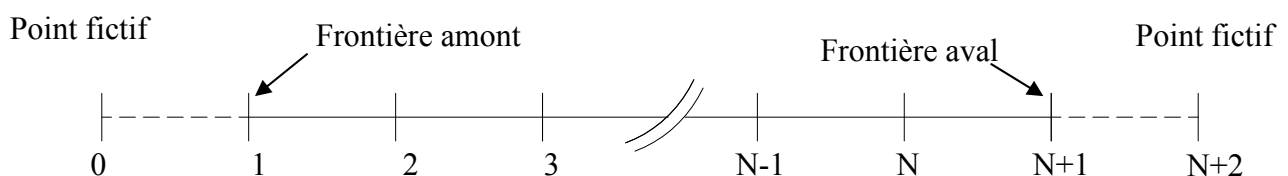


Figure 3.8 : Frontières du domaine et point fictifs de calcul

En effet, en utilisant la première alternative du schéma de *MacCormack*, on ne peut pas écrire la différence finie progressive à la limite aval ($i=N+1$) dans l'étape de prédiction, et de manière similaire, l'usage de la différence finie régressive durant l'étape de correction se trouve inopérable à la limite amont ($i=1$). Pour l'implémentation des conditions aux limites face à cette difficulté, Chaudhry et Hussaini (1985) présentent deux techniques à cet effet, la première est l'utilisation de la méthode d'extrapolation des flux au-delà des frontières du domaine, et la seconde repose sur l'application de la théorie des caractéristiques.

- **Méthode d'extrapolation des flux :**

Pour illustrer cette technique d'extrapolation des flux, considérons l'équation scalaire suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

En supposant des points de calcul fictifs de part et d'autre du domaine, c'est-à-dire $i=0$ à l'amont et $i=N+2$ à l'aval de ce dernier (Figure 3.8), le flux f en ces nœuds fictifs peut être extrapolé par l'utilisation de ces équations :

$$f_{N+2}^j = 2f_{N+1}^j - f_N^j$$

$$f_0^j = 2f_1^j - f_2^j$$

Par le biais de cette technique, on peut alors utiliser la différence progressive durant la phase de prédiction et la différence régressive pendant l'étape de correction pendant le calcul.

- **Méthode de la théorie des caractéristiques :**

Dans cette technique, on se sert de la théorie des caractéristiques pour l'écriture et l'implémentation des conditions aux limites. Les équations de compatibilité des droites caractéristiques C^+ et C^- aux extrémités du domaine seront couplées avec les équations spécifiques aux organes hydrauliques (vanne, réservoir, cheminée d'équilibre...etc.) présents en cet endroit et dont la résolution simultanée conduit à la solution recherchée.

Aux extrémités de la conduite unique, seule une des deux équations de compatibilité est valide. Pour l'extrémité amont, seule la deuxième équation du système (3.60) est valide le long de C^- , de même pour la limite aval, la deuxième équation du système (3.59) est la seule disponible le long de C^+ (Figure 3.9). Ces deux équations transmettent l'information du régime aux organes d'extrémités.

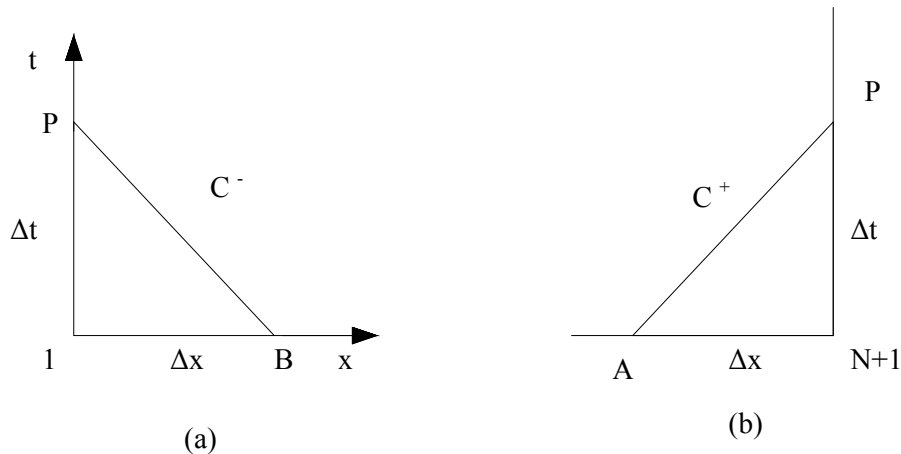


Figure 3.9 : Droites caractéristiques aux limites du domaine (Wylie et Streeter, 1978)

Pour obtenir la solution à l'extrémité de la conduite, une équation complémentaire à cet endroit est nécessaire, cette équation auxiliaire propre à l'appareil hydraulique présent au nœud considéré, est associée à l'équation de compatibilité pour trouver les variables H_P et Q_P . Parmi ces appareils, citons :

- réservoir à charge constante ;
- vanne de régulation ;
- turbomachine ;
- réservoir d'air ;
- cheminée d'équilibre.

Du point de vue mathématique, ces appareils hydrauliques présents à l'extrémité d'une conduite sont de deux types (Bergeron, 1949): appareils imposant une fonction explicite entre H et Q de type $H = f(Q)$, comme par exemple les vannes et les réservoirs ; et les appareils imposant une relation différentielle liant H et Q au temps t , exemple des cheminées d'équilibre et des réservoirs d'air. Chaque condition à la limite formée par l'un de ces organes est résolue indépendamment de l'autre limite, et aussi indépendamment des points intérieurs de calcul.

Comme ceci a été souligné précédemment, pour compléter la solution numérique aux points frontières du domaine (extrémités de la conduite), il faut procéder à la résolution simultanée des équations de compatibilité sur les droites C^+ et C^- (si l'on utilise la théorie des caractéristiques) avec les équations spécifiques aux organes hydrauliques installés en ces nœuds de calcul. Il en résulte alors la nécessité d'exposer succinctement ici les équations caractéristiques propres à chaque appareil hydraulique fréquemment rencontré en pratique (Wylie et Streeter, 1978)

3.6.1. Conditions aux limites au niveau d'un réservoir :

On supposera tout d'abord que le réservoir est de grande dimension a fin de négliger la variation du niveau du plan d'eau dans celui-ci en fonction de temps, c'est-à-dire :

Lorsque $x = 0$, on a :

$$\left. \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \right|_{x=0}$$

C'est-à-dire la charge est constante au premier point de la conduite dans le temps, on peut écrire alors :

$$H_{P1} = H_R, \text{ quel que soit } t \geq 0.$$

Où, H_R est la cote de la surface libre de l'eau par rapport au plan de référence.

Si par contre, la charge du réservoir décrit un comportement temporel connu, comme un mouvement sinusoïdal, alors la condition exigée au nœud considéré deviendrait :

$$H_{P1} = H_R + \Delta H \sin(\omega t)$$

Dans laquelle ω est la fréquence angulaire d'excitation et ΔH l'amplitude de l'onde se superposant à la charge initiale du réservoir.

3.6.2. Conditions aux limites au niveau d'une vanne :

a. Fermeture brusque :

On parle de fermeture brusque lorsqu'au temps ($t = 2. L / a$) la vanne est complètement fermée. Cela signifie que le débit est nul pendant le temps :

$$Q(n+1, t) = 0, \text{ quel que soit } t \geq 0.$$

Pour ($t = 0$) la fermeture est instantanée.

b. Fermeture lente :

Une fermeture est dite lente si la fermeture totale de la vanne aura lieu au-delà du temps caractéristique ($t = 2. L / a$), donc le débit ne serait plus brusquement interrompu, mais variera suivant une loi de fermeture bien précise que l'on pourra exprimer par :

$$Q(n+1, t) = f(t) \cdot Q_0, \text{ pour } t < t_f$$

$$Q(n+1, t) = 0, \text{ pour } t \geq t_f$$

3.6.3. Appareil imposant une fonction connue du débit

Ça sera l'exemple d'une pompe à piston dont le débit déplacé décrit une fonction explicite connue dans le temps (impulsion de débit). Nous prendrons l'exemple de la fonction suivante :

$$Q_{p1} = Q_R + \Delta Q |\sin(\omega t)|$$

3.6.4. Pompe centrifuge

La condition hydraulique imposée par cette turbomachine étant la courbe caractéristique $H(Q)$ à vitesse constante, cette relation est du type :

$$H_{p1} = B + a_1 Q_P + a_2 Q_P^2$$

Sachant que B est le point de barbotage de la pompe, a_1 et a_2 sont des coefficients dépendant du tracé de cette pompe (Stepanoff, 1961, Stroskolanski, 1977). En résolvant simultanément l'équation polynomiale précédente et l'équation de compatibilité, il est alors possible de déterminer les variables H_P et Q_P en ce lieu.

3.6.5. Bout mort

Si l'extrémité d'une conduite est fermée, par une plaque pleine par exemple, ceci constitue donc un bout mort de la canalisation. Intuitivement, la condition imposée en ce lieu étant un débit nul :

$$Q_P = 0$$

A partir de l'équation de compatibilité, on obtient facilement H_P .

3.7. Conclusion et étude comparative :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes numériques utilisées couramment pour l'analyse du régime transitoire soit en charge soit en écoulement à surface libre. Au point de vue avantages et inconvénients, certaines ont des points de vue qui convergent d'autres non. Néanmoins, nous pouvons facilement conclure que la méthode des caractéristiques et celle des différences finies sont beaucoup mieux adaptées aux calculs des écoulements transitoires en charge. La méthode des caractéristiques se distingue nettement des autres par la stabilité selon CFL une fois les caractéristiques de pas de temps et d'espace

varient. Cette propriété trouve sa justification notamment pour le calcul des erreurs temporelles ou spatiales. Cependant la méthode des éléments finis s'applique beaucoup plus au calcul des solides, ainsi que celle des volumes finis qui est basée sur les calculs d'intégrales, parfois trop compliquées, de plus, le temps et le volume de calcul constituent l'inconvénient majeur de ces deux dernières méthodes une fois que les écarts augmentent et qui échappent à la condition de stabilité.

Pour les limitations de stabilité des schémas explicites aux différences finies, elles peuvent être surmontées en ayant recours à une implémentation de ces schémas par la satisfaction de la condition de CFL.

Dans les prochains chapitres, à travers un exemple et pour une étude comparative, nous nous intéressons uniquement à la méthode des caractéristiques vue sa souplesse numériquement et la méthode des différences finies.

Chapitre -4-

**INTERPOLATION DE LA METHODE DES
CARACTERISTIQUES AVEC CALCUL
D'ERREURS**

*Chapitre -4-*INTERPOLATION DE LA METHODE DES CARACTERISTIQUES
ET CALCUL D'ERREURS**4.1. Introduction :**

D'après les chapitres précédents, notamment la partie comparative, il en ressort que la méthode des caractéristiques s'avère plus maniable à son application malgré les erreurs qu'elle peut commettre.

Habituellement, cette méthode considère le maillage de discrétisation à pas constant, limité par le critère de stabilité de la méthode. Ainsi, son utilisation considère toujours les pieds des caractéristiques aboutissant aux nœuds de calcul.

Cependant, lorsqu'on a un réseau de conduites à caractéristiques différentes cette méthode présente l'inconvénient d'imposer souvent le même pas de temps pour tous les tronçons.

Pour cela, le réseau étudié doit être découpé en longueurs élémentaires. Ces dernières sont choisies de telle façon que les temps de parcours par les ondes des différents tronçons constituant le réseau, soient des multiples entiers d'un temps de parcours élémentaire commun Δt . On a donc intérêt à modifier légèrement la longueur de certains tronçons, de manière à trouver un pas de temps commun pour tous les tronçons et réduire le coût de l'étude. Il existe bien un moyen d'éliminer l'erreur due à la différence entre la longueur réelle du tronçon et la longueur provenant de l'utilisation d'un nombre entier de Δt , il s'agit de processus d'interpolation. Selon la bibliographie, ces erreurs peuvent être temporelles ou spatiales, où leur évaluation dépend de la méthode utilisée (linéaire, Lagrange, Hermite ... etc.).

4.2 Intégration du système différentielle:

Admettons que la hauteur de pression H et le débit Q soient connus au temps (t) , soit par condition initiale au temps $(t = 0)$, soit par calcul de l'incrément temporel précédent. Le but est de calculer H et Q au temps $(t+\Delta t)$. Connaissant alors H et Q des points R et S de la figure (4.1), leur valeur est recherchée au point P .

Pour effectuer l'intégration des deux équations de compatibilité de chapitre précédent successivement le long des caractéristiques C^+ et C^- , nous allons discrétiser la conduite en un

certain nombre N de tronçons. Les points de calcul engendrés par cette discrétisation sont supposés suffisamment proches pour pouvoir écrire la différence finie suivante :

$$df(x,t) = f_{i+1} - f_i \tag{4.1}$$

Avec $f(x, t)$ une fonction telle que la charge H ou le débit Q, aux points de discrétisation successifs (i) et (i+1).

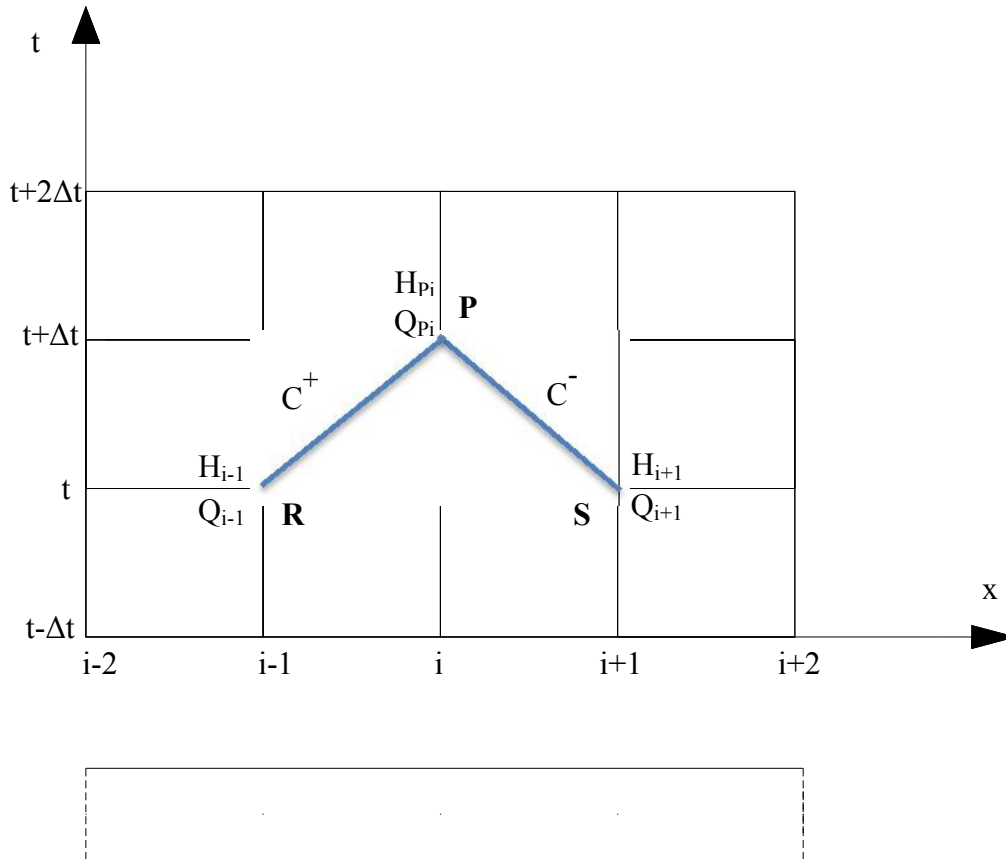


Figure (4.1) : Discrétisation de la conduite .

La condition de stabilité, dite condition de Courant- Friedrich-Levy, est la suivante :

$$Cr = \frac{\Delta t}{\Delta x} a \leq 1 \tag{4.2}$$

Ou encore :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a} \tag{4.3}$$

Soit le pas de temps de calcul $\Delta t = \Delta x / a$, ce qui satisfait l'équation caractéristique de pente positive caractérisée par la droite RP. (Figure (4.1))

Si les variables dépendantes H et Q sont connues aux points R et S , alors les équations de compatibilité, lesquelles sont valides le long des caractéristiques C^+ et C^- respectivement, peuvent être intégrées entre les limites R et P (respectivement, S et P) et écrites en terme des variables inconnues H_P et Q_P .

En multipliant les deux équations de compatibilité par dt, les équations de compatibilité peuvent s'écrire de la manière suivante :

Le long de la caractéristique C^+ :

$$\frac{a}{gS} dQ + dH + jdx = 0 \quad (4.4)$$

Le long de la caractéristique C^- :

$$\frac{a}{gS} dQ - dH + jdx = 0 \quad (4.5)$$

En intégrant les équations (4.4) et (4.5) entre l'instant (t), où les variables H et Q sont connus le long de la conduite (régime permanent) et l'instant (t + Δt) :

Le long de la caractéristique C^+ :

$$\frac{a}{gS} \int_R^P dQ + \int_R^P dH + \int_R^P jdx = 0 \quad (4.6)$$

En remplaçant j par sa valeur on obtient :

$$\frac{a}{gS} \int_R^P dQ + \int_R^P dH + \frac{\lambda}{2gDS^2} \int_R^P Q|Q| dx = 0 \quad (4.7)$$

En posant $A = a/gS$ et $B = \lambda/2gDS^2$ on aura :

$$A \int_R^P dQ + \int_R^P dH + B \int_R^P Q|Q| dx = 0 \quad (4.8)$$

Les deux premières intégrations sont immédiates, mais la troisième qui représente la perte de charge pose quand même un problème et son calcul nécessite l'utilisation d'une approximation parce que on ne dispose pas de la fonction Q(x), pour cela, différentes techniques peuvent être choisies pour l'évaluation numérique de cette intégrale. Selon De Almeida et Koelle (1992), trois approches simples pour les problèmes pratiques ont été envisagés:

Première approche (schéma de premier ordre) :

$$B \int_R^P Q|Q| dx = B Q_R |Q_R| \Delta x \quad (4.9)$$

Deuxième approche (schéma de deuxième ordre) :

$$B \int_R^P Q|Q| dx = \frac{B}{2} (Q_R |Q_R| + Q_P |Q_P|) \Delta x \quad (4.10)$$

Troisième approche (schéma mixte) :

$$B \int_R^P Q|Q| dx = B Q_P |Q_R| \Delta x \quad (4.11)$$

Selon Wylie et Streeter (1978), le schéma de premier ordre est considéré satisfaisant pour la plupart des cas pratiques (excepté le cas où la dissipation par frottement est prépondérante). Ceci suppose donc que le débit Q est constant pendant le pas de temps Δt et est égal à celui au pied de la ligne caractéristique. En adoptant ce schéma de premier ordre, l'équation de compatibilité (4.8) s'écrit comme suit :

$$A(Q_P - Q_R) + (H_P - H_R) + B Q_R |Q_R| \Delta x = 0 \quad (4.12)$$

Soit le paramètre T qui traduit l'effet de la résistance à l'écoulement, tel que :

$$T = B \Delta x = \frac{\lambda}{2gDS^2} \Delta x \quad (4.13)$$

Donc :

$$A(Q_P - Q_R) + (H_P - H_R) + T Q_R |Q_R| = 0 \quad (4.14)$$

Par analogie à l'équation (4.14), l'intégration le long de la caractéristique C- donne :

$$A(Q_P - Q_S) + (H_P - H_S) + T Q_S |Q_S| = 0 \quad (4.15)$$

En écrivant la solution pour H_P , ces dernières équations s'écrivent alors :

Pour la caractéristique C^+ :

$$H_P = H_R - A(Q_P - Q_R) - T Q_R |Q_R| \quad (4.16)$$

Pour la caractéristique C^- :

$$H_P = H_S + A(Q_P - Q_S) + T Q_S |Q_S| \quad (4.17)$$

Soient C_P et C_M les parties connues des équations (4.16) et (4.17), avec :

$$C_P = H_{i-1} + A Q_{i-1} - T Q_{i-1} |Q_{i-1}| \quad (4.18)$$

$$C_M = H_{i+1} - A Q_{i+1} + T Q_{i+1} |Q_{i+1}| \quad (4.19)$$

Remplaçant ces deux termes dans les équations (4.16) et (4.17), ces dernières peuvent s'écrire sous la forme simple suivante :

Pour la caractéristique C^+ :

$$H_{P_i} = C_P - A Q_{P_i} \quad (4.20)$$

Pour la caractéristique C^- :

$$H_{Pi} = C_M + AQ_{Pi} \quad (4.21)$$

En additionnant ces deux équations, on aura :

$$H_{Pi} = \frac{C_P + C_M}{2} \quad (4.22)$$

Donc :

$$Q_{Pi} = \frac{C_P - H_{Pi}}{A} \quad (4.23)$$

Ou bien :

$$Q_{Pi} = \frac{H_{Pi} - C_M}{A} \quad (4.24)$$

La résolution numérique du régime transitoire commence alors à partir des conditions initiales, ressortant d'un calcul en régime permanent. A l'instant initiale (t), H et Q sont connues à chaque section de calcul le long de la conduite. Ainsi, le calcul du régime transitoire consiste à retrouver H et Q à chaque point de la grille au temps ($t = t + \Delta t$), (Figure (4.1)), ensuite le procédé est répété à chaque incrément de temps ($t = t + n \Delta t$), tel que ($n = 2, 3, 4, \dots$ etc), jusqu'à l'achèvement du temps de simulation. On pourra donc calculer les variables H et Q en régime transitoire aux points intérieurs du réseau des caractéristiques à chaque pas de temps connaissant ces mêmes variables au pas de temps précédent.

En tout point intérieur de la grille " i ", les deux équations de compatibilité sont résolues simultanément afin de déterminer les inconnues H_{Pi} et Q_{Pi} (Wylie et Streeter, 1978).

Dans le cas où le point " i " est situé à la limite de la conduite, ($x = 0$ ou $x = L$), on ne dispose alors que d'une seule équation (le long de C^- ou le long de C^+) et la détermination des inconnues H_{Pi} et Q_{Pi} se fait en faisant recours à une équation spéciale adaptée à la condition au limite considérée.

La figure (4.2) montre un réseau de nœuds types où la distinction a été faite entre des conditions limites amont et aval, la condition initiale et les points de calcul.

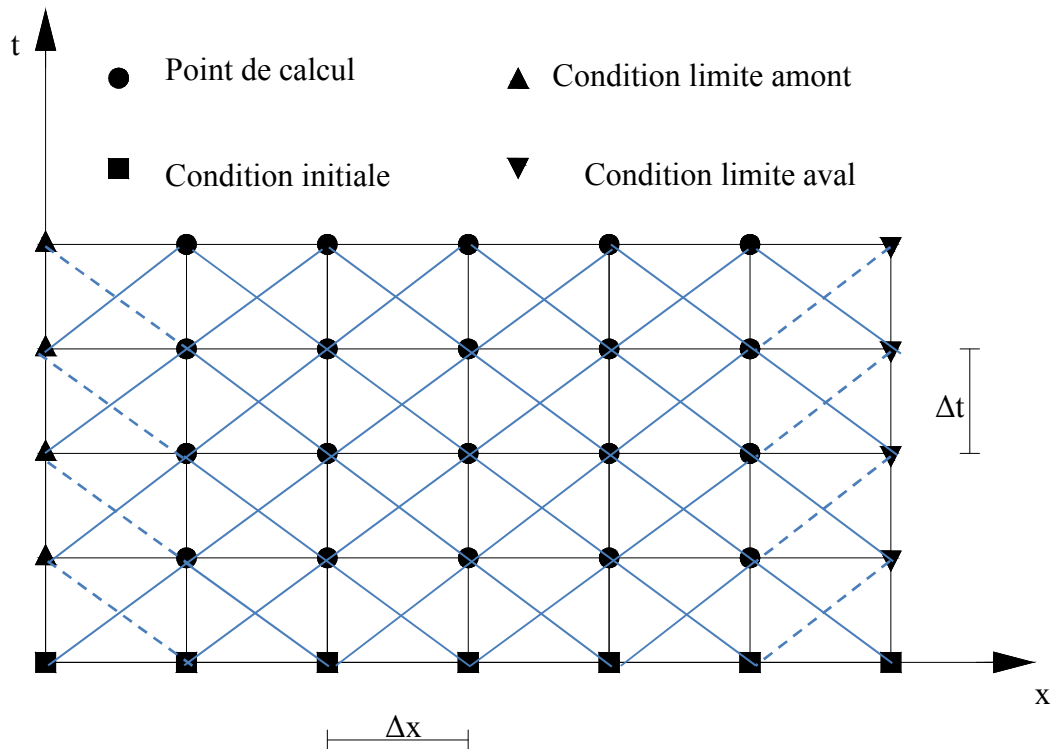


Figure (4.2) : Réseau de caractéristiques pour le calcul de régime transitoire (Chaudhry, 1979)

Jusqu'à maintenant nous avons traité le cas où les lignes caractéristiques s'intersectent à chaque point de calcul " i " du maillage considéré ($C_r = 1$ donc $\Delta x = a \cdot \Delta t$), le calcul est alors facile. Si par contre les lignes $C+$ et $C-$ issues du point de calcul P (où les variables sont recherchées) ne recouperont pas les points A et B au temps où la solution est connue ($C_r < 1$ donc $\Delta x > a \cdot \Delta t$), dans ce cas une interpolation s'impose pour déterminer les variables de l'écoulement aux points R et S, connaissant ceux en A et B (figure (4.3)), (Larock et al. 2000). Pour ce faire, plusieurs techniques d'interpolation se présentent, mais la plus pratiquée étant l'interpolation linéaire.

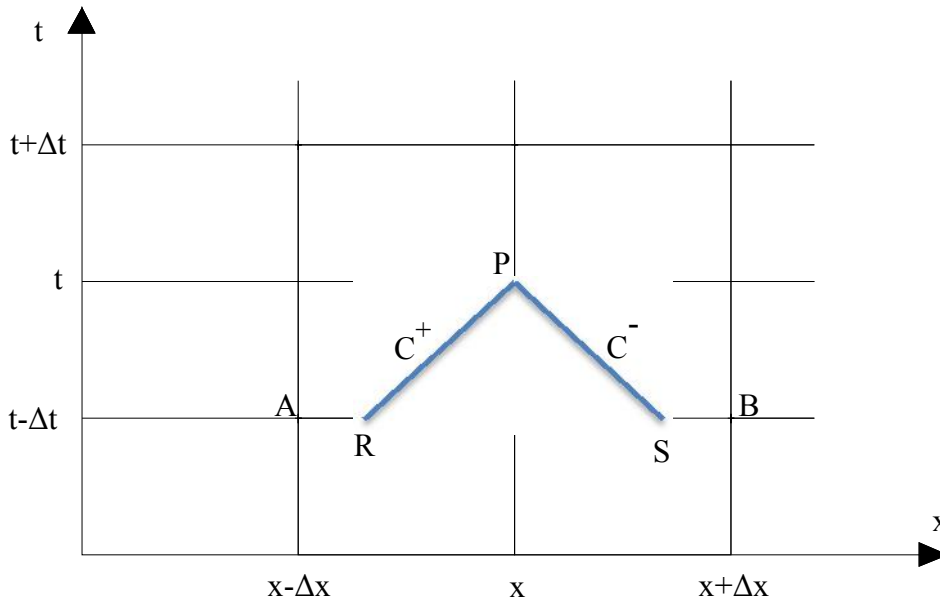


Figure (4.3) : Interpolation des variables, H et Q aux pieds des caractéristiques.

4.3. Différents schémas numériques issus de la méthode des caractéristiques :

Les interpolations résultant de ces types de schémas peuvent être réalisées soit dans l'espace, soit dans le temps soit une combinaison des deux.

4.3.1 Schéma avec interpolation spatiale :

4.3.1.1. La méthode d'Hartree :

Le schéma de l'interpolation spatiale (figure (4.4)) est attribué à Hartree (Hartree, 1952). Les valeurs des variables aux points R et S sont interpolées en utilisant les valeurs connues aux points A, B et C. Puis connaissant ces différentes valeurs et les équations des droites caractéristiques, il est facile de déterminer les valeurs des variables recherchés au point P, Cette méthode est explicite.

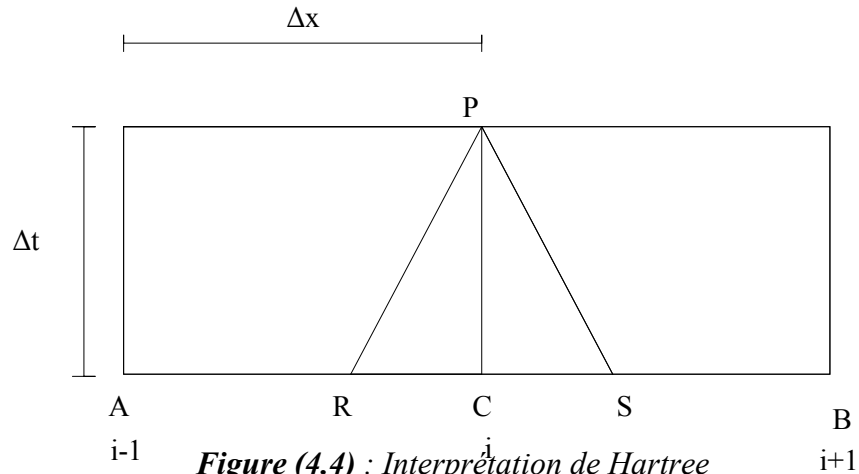


Figure (4.4) : Interprétation de Hartree

4.3.1.2. La méthode de Price et Vardy :

Le schéma de l'interpolation spatiale est amélioré en prenant cette fois ci plusieurs pas d'espace de chaque côté du point P comme c'est présenté sur la figure (4.5).

La méthode de Price et Vardy (Vardy, 1977) peut elle aussi être améliorée en remontant avec plus d'un pas de temps.

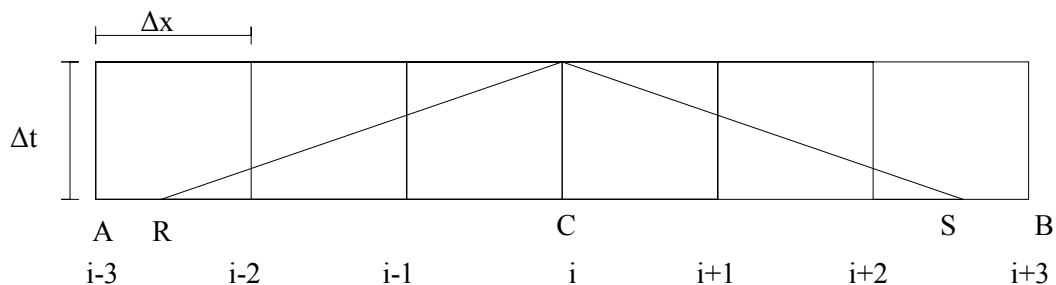


Figure (4.5) : Interprétation de Price et Vardy

4.3.1.3. La modification de Streeter :

Streeter (Wylie et *al.*, 1993) a eu l'idée d'effectuer les interpolations d'un schéma numérique en remontant de plus d'un pas de temps : c'est le concept de « remontée dans le temps » ou « reachback » plus souvent rencontré dans la littérature, (figure (4.6)). Cette méthode introduit un coefficient de remontée dans le temps, noté (m), qui prend toute son importance dans les calculs, comme on le montre dans les paragraphes suivants.

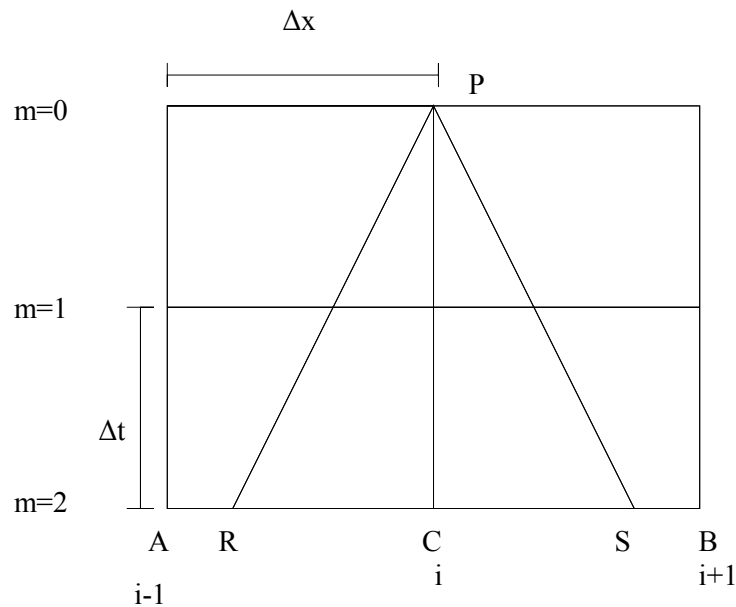


Figure (4.6) : Amélioration du schéma spatial par Streeter

4.3.2. Schémas avec interpolation temporelle :

4.3.2.1. Schéma à un pas de temps :

Le schéma utilise des interpolations dans le pas de temps courant, ce qui le rend implicite. Il a l'avantage de ne pas contraindre la solution à un pas de temps maximal, (figure (4.7)).

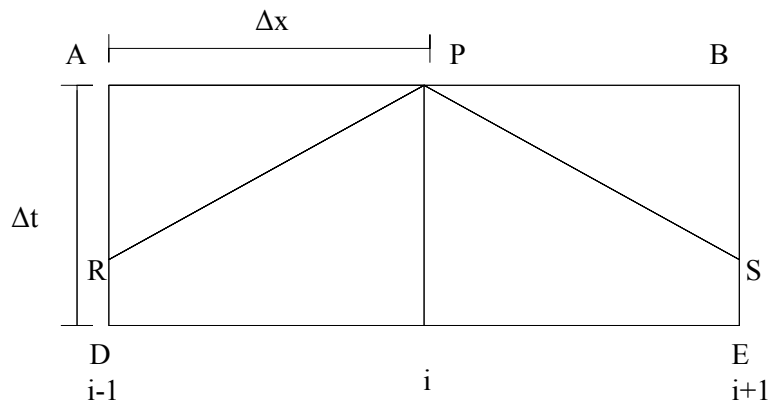


Figure (4.7) : Schéma implicite dans le pas de temps courant

4.3.2.2. Schéma avec remontée dans le temps :

On peut utiliser l'amélioration de Streeter appliquée à un schéma avec une interpolation temporelle. Ce schéma est explicite puisque le point P est calculé grâce à des interpolations effectuées sur les lignes caractéristiques aux pas de temps précédent. Mais le

pas de temps est limité pour des raisons de convergence et de stabilité de la méthode (figure (4.8)).

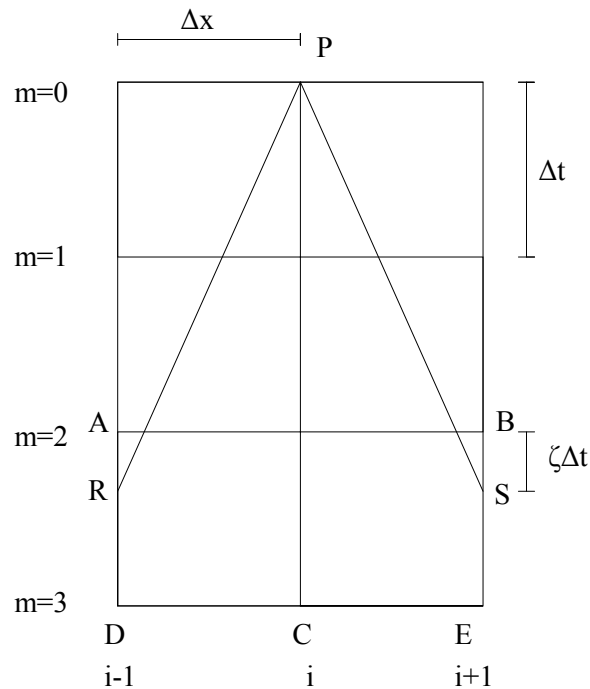


Figure (4.8) : Schéma explicite avec remontée dans le temps.

Dans la plupart des cas, c'est un schéma d'interpolation temporelle qui est préféré à une interpolation spatiale. En effet, même pour des petites parties du domaine espace-temps, les deux types de schémas donnent sensiblement les mêmes résultats, on obtient une erreur plus petite avec des interpolations spatiales dans des domaines plus grands. On étudie tout au long de cette présentation le problème de coup de bélier en considérant une conduite cylindrique horizontale avec un réservoir à l'amont et un robinet vanne à l'aval (figure (4.9))

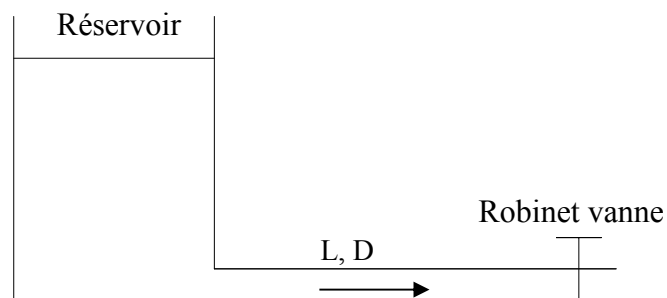


Figure 4.9 : Schéma du dispositif étudiée

On applique à cette conduite un schéma explicite avec interpolation temporelle et remontée dans le temps. Même s'il est aisé de choisir un pas de temps convenable dans cet exemple, il l'est beaucoup moins dans le cas des conduites de longueurs multiples avec des célérités différentes.

La conduite de longueurs L et de caractéristiques uniques sera considérée de façon unidimensionnelle et décomposée avec un pas d'espace Δx . on décompose la durée de calcul en sous intervalles Δt .

4.4. Interpolation numérique :

On envisage le cas où les pieds des caractéristiques C^+ et C^- aboutissent entre deux nœuds limitant un intervalle de temps spécifique. La procédure de la méthode d'interpolation est nécessaire pour définir la position des points internodaux, on se sert de l'interpolation linéaire dans le temps qu'on applique pour le cas de la figure (4.10).

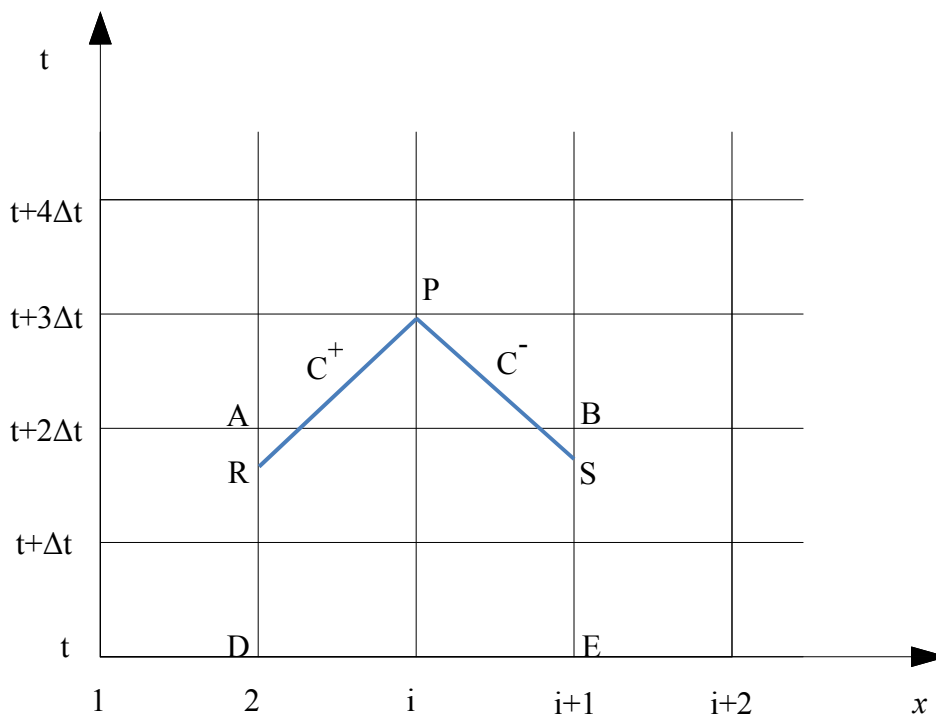


Figure (4.10) : Méthode d'interpolation pour l'intervalle de temps spécifique

Le système d'équations pour les caractéristiques C^+ et C^- donne :

$$C^+ \begin{cases} \frac{dx}{dt} = U + a \\ \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} + g(\sin \alpha + j) = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

$$C^- \begin{cases} \frac{dx}{dt} = U - a \\ \frac{dU}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} + g(\sin \alpha + j) = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

Après intégration le long de la caractéristique C^+ et C^- sachant que :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{K_e} \quad (4.27)$$

On obtient :

Pour la caractéristique C^+ :

$$C^+ \begin{cases} (x_P - x_R) = (U_R + a)(t_P - t_R) \\ a(U_P - U_R) - K_e \left(\frac{1}{\rho_P} - \frac{1}{\rho_R} \right) + a.g.\sin \alpha (t_P - t_R) + \frac{a.\lambda.U_P|U_R|}{2D} (t_P - t_R) = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Pour la caractéristique C^- :

$$C^- \begin{cases} (x_P - x_R) = (U_R - a)(t_P - t_R) \\ a(U_P - U_R) + K_e \left(\frac{1}{\rho_P} - \frac{1}{\rho_R} \right) + a.g.\sin \alpha (t_P - t_R) + \frac{a.\lambda.U_P|U_R|}{2D} (t_P - t_R) = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Pour cette interpolation linéaire on peut écrire :

$$\frac{U_A - U_R}{U_A - U_D} = \frac{t_P - t_R - \Delta t}{2\Delta t} \quad (4.30)$$

$$U_A - U_R = \frac{t_P - t_R - \Delta t}{2\Delta t} (U_A - U_D) \quad (4.31)$$

$$U_A - U_R = \left[\frac{t_P - t_R}{2\Delta t} \cdot (U_A - U_D) - \frac{U_A - U_D}{2} \right] \quad (4.32)$$

Et :

$$(x_P - x_R) = (U_R + a)(t_P - t_R) \quad (4.33)$$

En posant : $x_P - x_R = \Delta x$

$$\frac{\Delta x}{U_R + a} = (t_P - t_R) \quad (4.34)$$

$$U_A - U_R = \left[\frac{\Delta x}{2\Delta t(U_R + a)} \cdot (U_A - U_D) - \frac{U_A - U_D}{2} \right] \quad (4.35)$$

$$U_A - U_R = \left[\frac{\Delta x}{2\Delta t(U_R + a)} - \frac{1}{2} \right] (U_A - U_D) \quad (4.36)$$

On aboutit à :

$$(U_A - U_R)(U_R + a) = \left[\frac{\Delta x}{2\Delta t} - \frac{U_R + a}{2} \right] (U_A - U_D) \quad (4.37)$$

C'est une équation de second degré par rapport à U_R , dont la solution est :

$$U_R = U_x + \sqrt{U_x^2 - \left[(U_A - U_D) \left(\frac{\Delta x}{2\Delta t} - \frac{a}{2} \right) - aU_A \right]} \quad (4.38)$$

Avec :

$$U_x = 3\frac{U_A}{4} - \frac{U_D}{4} - \frac{a}{2} \quad (4.39)$$

D'une façon similaire, par interpolation linéaire, le système (4.25) donne pour la masse volumique :

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho_A} - \left(\frac{a}{U_R + a} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\rho_A} - \frac{1}{\rho_D} \right) \quad (4.40)$$

Maintenant, on considère le système (4.26) représentant la caractéristique C^- . D'une façon similaire à la caractéristique C^+ , on obtient :

$$U_S = U_y + \sqrt{U_y^2 - \left[(U_B - U_E) \left(\frac{\Delta x}{2\Delta t} - \frac{a}{2} \right) - aU_B \right]} \quad (4.41)$$

$$U_y = 3 \frac{U_B}{4} - \frac{U_E}{4} + \frac{a}{2} \quad (4.42)$$

Et la masse volumique est :

$$\frac{1}{\rho_S} = \frac{1}{\rho_B} + \left(\frac{\Delta x}{2\Delta t(U_S - a)} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\rho_B} - \frac{1}{\rho_E} \right) \quad (4.43)$$

Pour retrouver les valeurs de ρ_P et U_P il faut résoudre simultanément les équations de compatibilité de système (4.28) et (4.29). Pour la commodité des calculs et de programmation, ces équations peuvent être simplifiées en introduisant les paramètres suivant (Wylie et *al.* 1933) :

$$C_P = \frac{1}{\rho_R} - BU_R + \frac{B \cdot g \Delta x \cdot \sin \alpha}{U_R + a} \quad (4.44)$$

$$B_P = B + \frac{R|U_R|}{U_R + a} \quad (4.45)$$

$$C_M = \frac{1}{\rho_S} + BU_S + \frac{B \cdot g \Delta x \cdot \sin \alpha}{U_S - a} \quad (4.46)$$

$$B_M = B - \frac{R|U_S|}{U_S - a} \quad (4.47)$$

Avec : $B = a/K_e$ et $R = a \cdot \lambda \Delta x / (2DK_e)$. Les équations de compatibilité de système (4.28) et (4.29) deviennent :

$$\frac{1}{\rho_P} = C_P + B_P U_P \quad (4.48)$$

$$\frac{1}{\rho_P} = C_M - B_M U_P \quad (4.49)$$

En retranchant ces deux équations on obtient la vitesse au point P :

$$U_P = \frac{C_M - C_P}{B_M + B_P} \quad (4.50)$$

En remplaçant l'expression de U_P dans l'une des équations (4.48) ou (4.48) on obtient :

$$\rho_P = \frac{B_P + B_M}{C_P B_M + C_M B_P} \quad (4.51)$$

4.5. Autre méthode d'analyse du phénomène :

4.5.1. Interpolation temporelle :

On considère que les caractéristiques C^+ et C^- aboutissent entre deux nœuds de calcul. Dans ce cas, on envisage l'interpolation entre deux points du maillage par rapport au facteur temps (t).

Soit $F_{ex}(t)$ la fonction exacte passant par les nœuds du maillage et $F_{app}(t)$ la fonction approchée. Il en résulte donc une certaine erreur entre ces deux fonctions.

On propose le développement de Taylor et on essaye d'explicitier ces deux fonctions par rapport à la variable temps entre deux points (figure (4.11)).

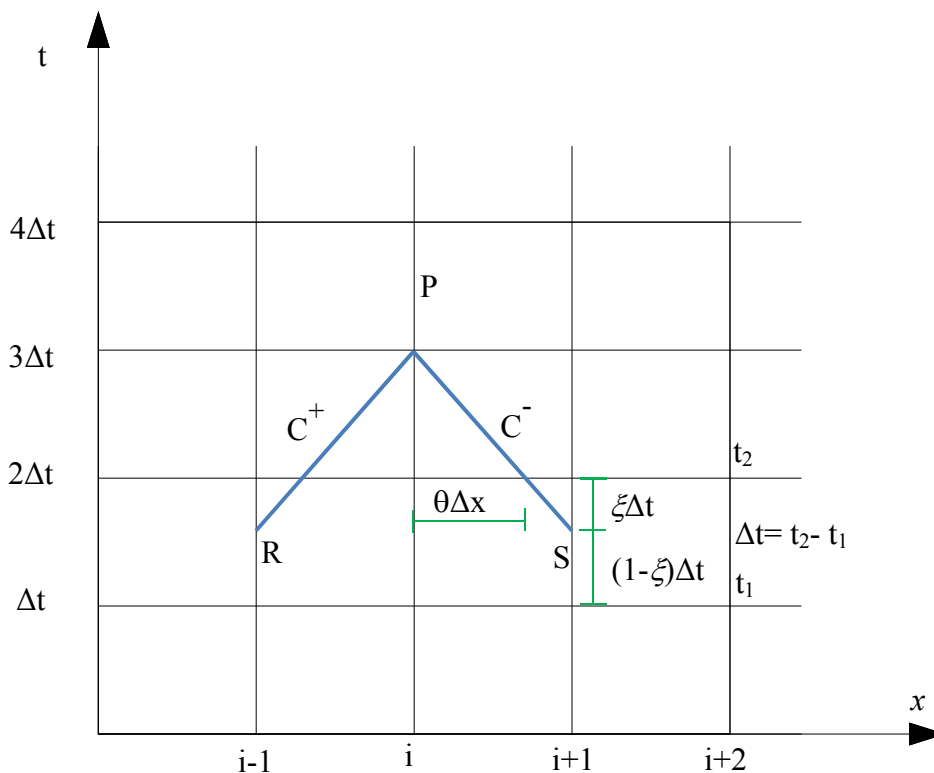


Figure (4.11) : Interpolation entre deux points

On peut donc écrire :

$$F_{ex}(t+h) = F_{ex}(t) + h \frac{\partial F_{ex}(t)}{\partial t} + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} F_{ex}(t)}{\partial t^{n-1}} + \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n F_{ex}(t)}{\partial t^n} \quad (4.52)$$

h étant le pas de temps.

Après avoir discrétisé le temps en n nœuds de calcul de coordonnées t_1, t_2, \dots, t_n , choisissant $h = t_i - t$, l'expression (4.52) prend pour valeur (Gouri et Gilbert, 1981) :

$$F_{ex}(t_i) = F_i = F_{ex}(t) + (t_i - t) \frac{\partial F_{ex}(t)}{\partial t} + \dots + \frac{(t_i - t)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} F_{ex}(t)}{\partial t^{n-1}} + \frac{(t_i - t)^n}{n!} \frac{\partial^n F_{ex}(t)}{\partial t^n} \quad (4.53)$$

En introduisant le polynôme d'interpolation de Lagrange, la fonction exacte peut être reliée avec la fonction approchée par l'équation (4.54) suivante :

$$F_{app} = \sum L_i F_{ex}(x_i) = \sum L_i F_i \quad (4.54)$$

L'équation (4.53) devient :

$$F_{app}(t) = \sum L_i F_{ex}(t) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left[\sum L_i (t_i - t)^{n-1} \right] \frac{\partial^{n-1} F_{ex}(t)}{\partial t^{n-1}} + \frac{1}{n!} \left[\sum L_i (t_i - t)^n \right] \frac{\partial^n F_{ex}(t)}{\partial t^n} \quad (4.55)$$

Avec : L_i représente le polynôme d'interpolation de Lagrange. Par application entre deux points ($n=2$) on obtient :

$$L_1 = \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

On pose :

$$t_2 - t_1 = \Delta t ; t - t_2 = \xi \Delta t \text{ et } t - t_1 = (1 - \xi) \Delta t.$$

Après remplacement et arrangement, on obtient :

$$F_{app}(t) = F_{ex} + 2 \cdot \xi \cdot \Delta t \cdot (1 - \xi) F'_{ex} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \cdot \xi \cdot (1 - \xi) F''_{ex} \quad (4.56)$$

On cherche une solution de la forme : $F_{ex} = e^{kt}$.

Donc :

$$F'_{ex} = k' e^{kt}, \quad F''_{ex} = k'^2 e^{kt}$$

Tel que k' désigne une constante.

On obtient une équation de second degré en k' (**Lai**, C. 1988) :

$$F_{app}(t) = \frac{1}{2} \Delta t^2 \xi (1-\xi) k'^2 e^{kt} + 2 \xi \Delta t (1-\xi) k' e^{kt} + e^{kt} \quad (4.57)$$

$$F_{app}(t) = e^{kt} \left[\frac{1}{2} \Delta t^2 \xi (1-\xi) k'^2 + 2 \xi \Delta t (1-\xi) k' + 1 \right] \quad (4.58)$$

On trouve que le nombre k' doit vérifier l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \Delta t^2 \xi (1-\xi) k'^2 + 2 \xi \Delta t (1-\xi) k' + 1 = 0 \quad (4.59)$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = 4 \xi^2 \Delta t^2 (1-\xi)^2 - 2 \Delta t^2 \xi (1-\xi) \quad (4.60)$$

On remarque que : $\Delta < 0$ pour $0 < \xi < 1$, donc la relation (4.59) admet des racines complexes de la forme : $k'_{1,2} = a \pm i\beta$

La solution sera de la forme :

$$F_{app}(t) = e^{at} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \quad (4.61)$$

Avec : $a = -2/\Delta t$, $\beta = (2\pi/T)$ et d'une façon générale : $\Delta x = a \Delta t$

$$F_{app}(t) = e^{\frac{-2a}{\Delta x} t} \left(C_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + C_2 \sin \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (4.62)$$

C_1 et C_2 représentent des constantes qui sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Par ailleurs, d'après le schéma indiqué (figure (4.11)), on peut écrire :

$$\Delta x = a \Delta t (m + \xi) \quad (4.63)$$

Les conditions aux limites donnent :

$$C_1 = H \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{T.H}{\pi.\Delta t.(m + \xi)}$$

Par conséquent la fonction sera :

$$F_{app}(t) = He^{\frac{-2t}{\Delta t(m+\xi)}} \left(\cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{T}{\pi.\Delta t.(m + \xi)} \sin \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (4.64)$$

La fonction exacte s'obtient pour $\xi = 0$, les pieds des caractéristiques aboutissent aux nœuds du maillage :

$$F_{ex}(t) = H.e^{\frac{-2t}{m\Delta t}} \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{T}{\pi.\Delta t.m} \sin \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (4.65)$$

On remarque que lorsque le nombre de pas (m) tend vers l'infini, la fonction exacte $F_{ex}(t)$ tend vers la fonction approchée $F_{app}(t)$.

$$F_{ex}(t) = F_{app}(t) = H.\cos \frac{2\pi}{T} t \quad (4.66)$$

La représentation graphique des fonctions approchée et exacte pour différentes valeurs de m est donnée par les figures (4.12) et (4.13).

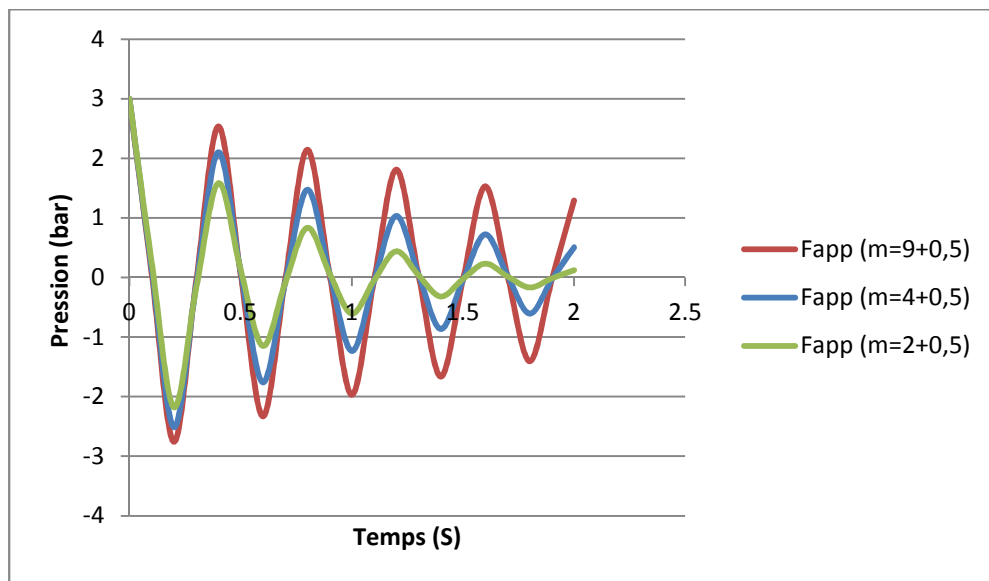


Figure (4.12) : Amortissement de F_{app} , $\xi = 0,5$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et m variable.

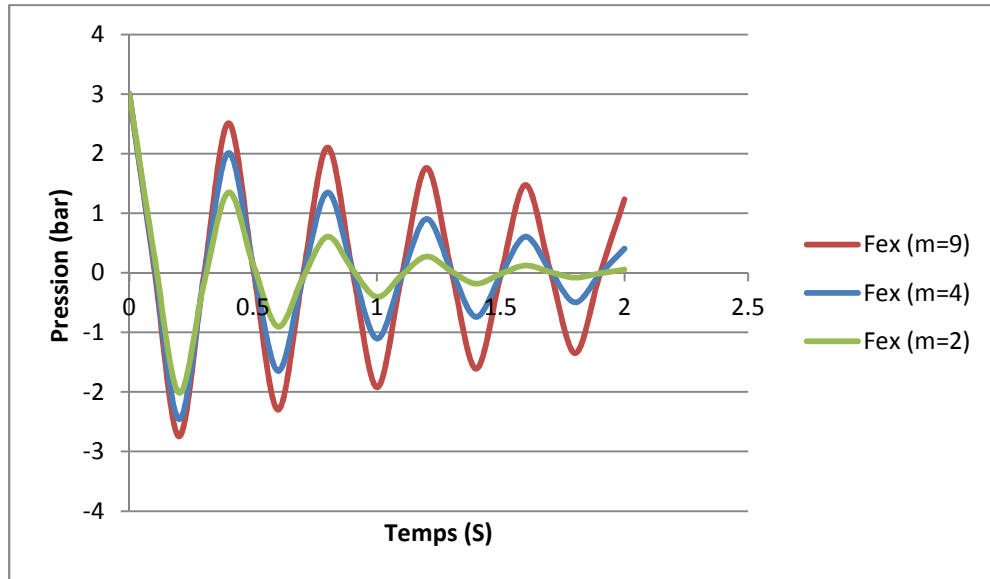


Figure (4.13) : Amortissement de F_{ex} , $\xi = 0$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et m variable.

D'après ces figures, on constate que pour des valeurs données de paramètre m , il y a un amortissement des fonctions F_{ex} et F_{app} dans le temps. Ainsi, plus la remontée dans le temps est importante, moins l'amortissement numérique est important.

4.5.2. Interpolation spatiale :

Le même raisonnement s'opère pour une interpolation spatiale en remplaçant t par x , m par j et ξ par θ , on obtient ainsi :

La fonction approchée :

$$F_{app}(x) = He^{\frac{-2x}{\Delta x(j+\theta)}} \left(\cos \frac{2\pi}{L_k} x + \frac{L_k}{\pi \cdot \Delta x(j+\theta)} \sin \frac{2\pi}{L_k} x \right) \quad (4.67)$$

La fonction exacte :

$$F_{ex}(x) = He^{\frac{-2x}{j\Delta x}} \left(\cos \frac{2\pi}{L_k} x + \frac{L_k}{\pi \cdot j\Delta x} \sin \frac{2\pi}{L_k} x \right) \quad (4.68)$$

Pour une longueur d'onde donnée L_k , si l'intervalle d'espace augmente, la fonction exacte tend vers la fonction approchée et l'erreur tend vers zéro. On peut écrire donc :

$$F_{ex}(x) = F_{app}(x) = H \cdot \cos \frac{2\pi}{L_k} x \quad (4.69)$$

4.6. Détermination de l'erreur due à l'interpolation temporelle :

La théorie de calcul des erreurs dues à l'interpolation permet de donner la fonction erreur $E(t)$ qui sera déduite à partir des relations (4.64) et (4.65) comme étant la différence entre la fonction exacte et la fonction approchée.

$$E(t) = F_{ex}(t) - F_{app}(t) \quad (4.70)$$

Ou bien :

$$E(t) = H \left[e^{\frac{-2t}{m\Delta t}} \left(\cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{T}{\pi \cdot \Delta t \cdot m} \sin \frac{2\pi}{T} t \right) - e^{\frac{-2t}{\Delta t(m+\xi)}} \left(\cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{T}{\pi \cdot \Delta t \cdot (m+\xi)} \sin \frac{2\pi}{T} t \right) \right] \quad (4.71)$$

On remarque que lorsque le paramètre ξ d'interpolation est égale à zéro, l'erreur est nulle, par conséquent la fonction approchée sera égale à la fonction exacte, avec aboutissement des pieds des caractéristiques aux nœuds de calcul.

Afin d'illustrer cette étude, on représente graphiquement les fonctions exacte et approchée pour différentes valeurs de paramètre (m).

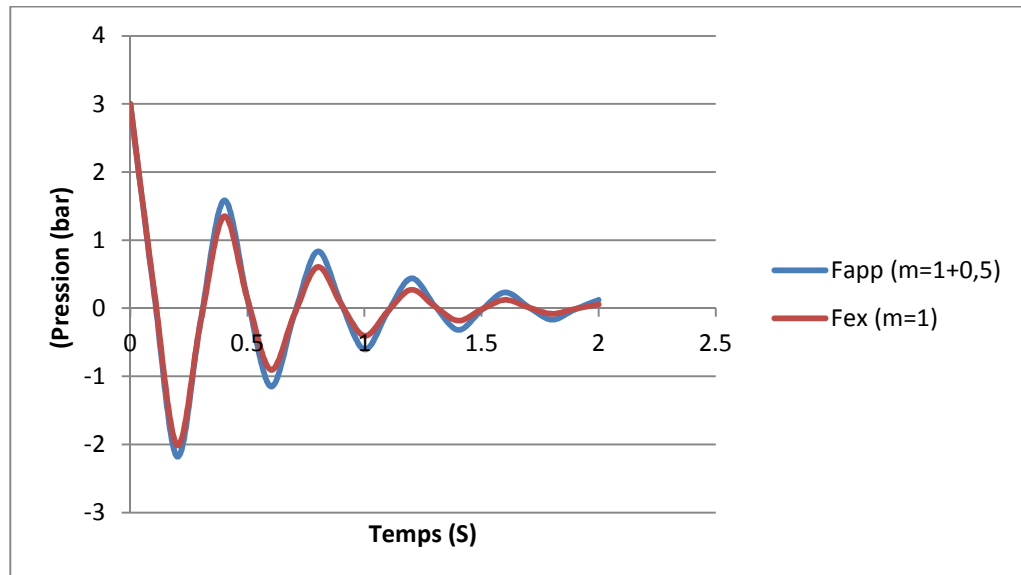


Figure (4.14) : Fonction erreur, $\xi = 0,5$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et $m=1$.

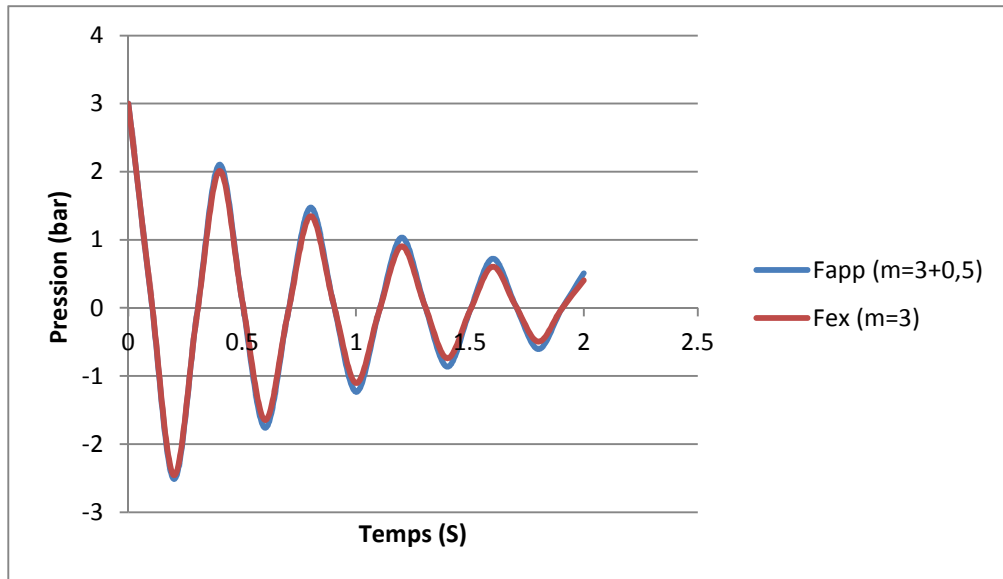


Figure (4.15) : Fonction erreur, $\xi = 0,5$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et $m=3$.

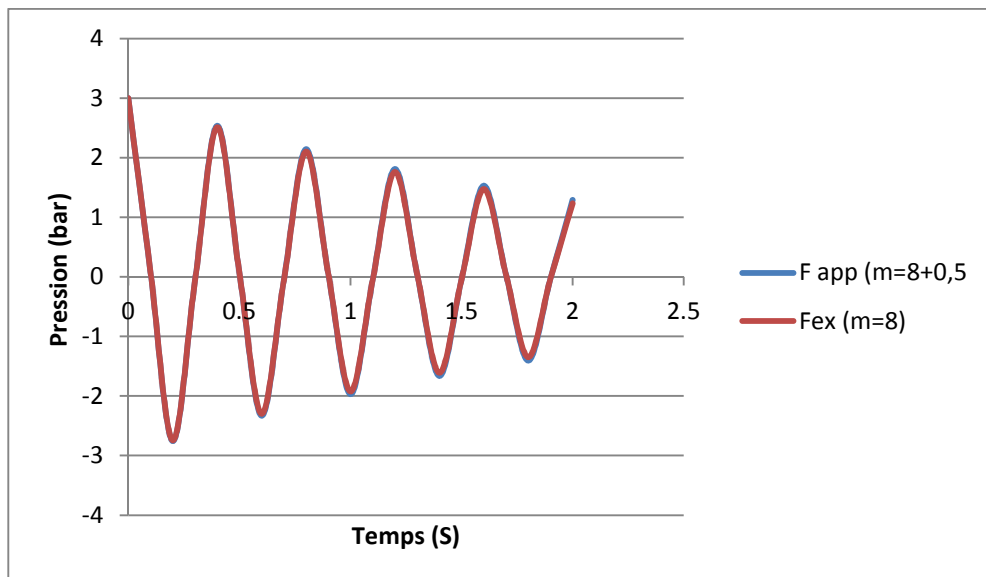


Figure (4.16) : Fonction erreur, $\xi = 0,5$, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,5$ et $m=8$.

A travers ces figures, on remarque que, plus le paramètre (m) diminue, plus les deux graphes de F_{ex} et F_{app} s'éloignent l'un de l'autre et plus l'erreur est importante.

De même, plus le coefficient de remontée dans le temps (m) augmente, plus les deux graphes s'approchent l'un de l'autre et moins l'erreur entre les deux fonctions est importante. Ainsi, pour une valeur donnée importante de paramètre (m), les deux graphes de F_{app} et F_{ex} se superposent. On peut dire que la précision du schéma augmente avec l'augmentation du coefficient (m).

L'expression (4.71) est aussi représentée graphiquement pour différentes valeurs de ξ , (figure (4.17) et (4.18)).

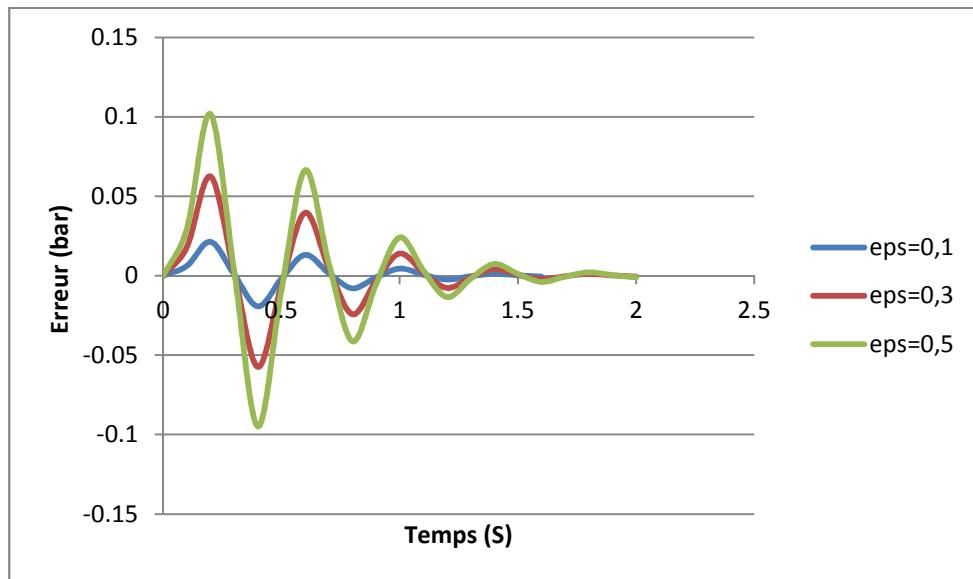


Figure (4.17) : Fonction erreur, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,1s$, $m = 5$ et ξ variable

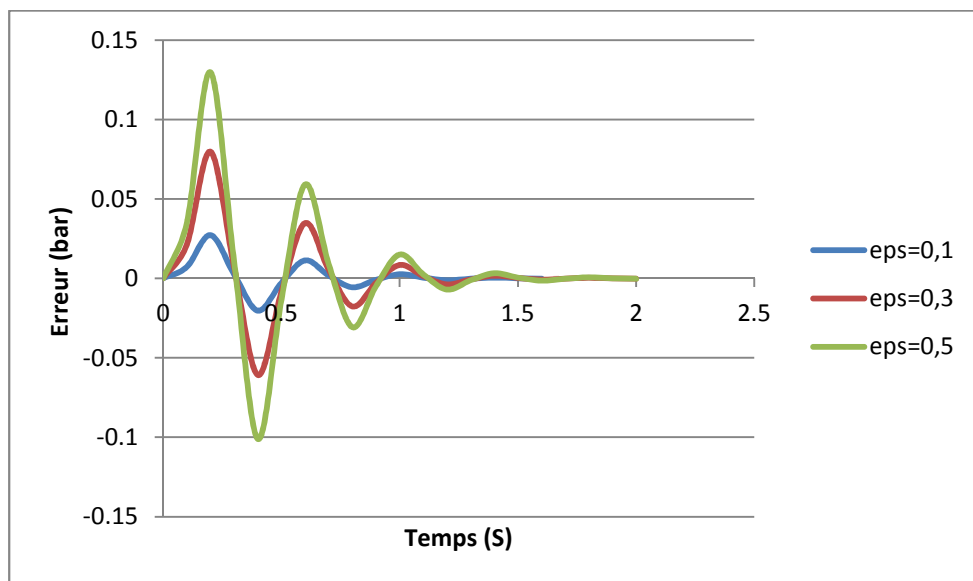


Figure (4.18) : Fonction erreur, $T=0.4s$, $\Delta t = 0,1s$, $m = 4$ et ξ variable

A travers ces figures on constate que pour des valeurs données de paramètre (ξ), il y a amortissement de l'erreur dans le temps. Ainsi, l'erreur diminue lorsque la valeur de (ξ) diminue.

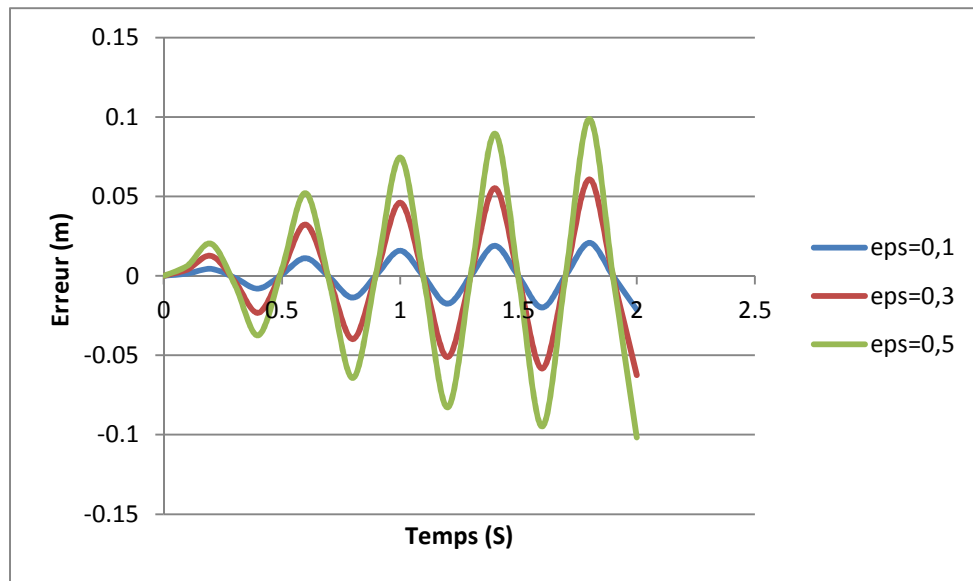


Figure (4.19): Fonction erreur, $T=0,4s$, $\Delta t = 1s$, $m = 5$ et ξ variable

A travers cette figure on remarque que la fonction erreur ne s'amortie pas, ainsi, nous avons l'amplification des erreurs dans le temps et cela revient au fait de l'augmentation de pas de temps Δt , c'est pour cette raison qu'on doit toujours respecter la condition de courant pour garantir la stabilité et la convergence des schémas numériques.

4.7. Conclusion :

Dans le domaine du régime transitoire, la méthode des caractéristiques considère toujours les pieds des caractéristiques aboutissant aux nœuds de calcul.

Le calcul aux nœuds n'est pas pris en considération dans cette variante. Les différents schémas implicites et explicites examinés dans ce chapitre, montrent que l'utilisation de la méthode des caractéristiques admet des erreurs, lorsque les pieds des caractéristiques aboutissent entre deux nœuds. Il a été constaté que ces erreurs sont temporelles et spatiales. Afin de quantifier ces dernières, la méthode d'interpolation linéaire entre deux nœuds et l'utilisation de développement de Taylor ont été utilisés. A travers ce raisonnement, deux fonctions numériques exactes et approchées ont été développées. La représentation graphique de ces fonctions a permis la déduction de deux coefficients numériques qui dépendent du nombre de pas de remontée dans le temps et dans l'espace, ainsi on a constaté que la précision du schéma numérique augmente avec l'augmentation du coefficient (m), par conséquent l'erreur entre les deux fonctions exacte et approchée est moins importante.

Chapitre -5-

**ETUDE D'UN CAS ET INTERPRETATION
DES RESULTATS**

Chapitre -5-**ETUDE D'UN CAS ET INTERPRETATION DES RESULTATS****5.1 Introduction**

Dans le but de tester les performances des méthodes numériques, ce chapitre traitera alors la mise en application d'un schéma aux différences finies de MacCormack et la méthode des caractéristiques. Les cas étudiés choisis découlent entre autres des problèmes réels rencontrés en pratique, ce qui confère ainsi au travail une double dimension, théorique et pratique.

Dans la mesure où une solution analytique du problème est disponible, les exemples traités permettront en fonction des résultats obtenus de faire la comparaison entre les méthodes utilisées.

5.2. Programmes et organigrammes de calcul :**5.2.1 Pour la méthode des caractéristiques :**

- Lecture des données (longueur de la conduite (L), diamètre de la conduite (D), coefficient de frottement (λ), vitesse d'écoulement en régime permanent (U_0), accélération de gravité (g), célérité des ondes (a), la charge initiale (H_0) et le débit initial (Q_0)).
- Discrétisation spatiale et temporelle de la conduite, pour cela, on décompose la conduite en (N) tronçons de pas d'espace (Δx), soit (N+1) points. Le choix de pas de temps (Δt) se fait tout en respectant le critère de stabilité de Courant.
- Calcul des grandeurs invariables : $A = a/(g.S)$, $B = \lambda / (2.g.D.S^2)$ et $T = B.\Delta x$
- Choix du temps de fermeture de la vanne (T_f) en fonction de type de fermeture (brusque, rapide ou lente) ainsi que la durée de simulation (T_s)
- Définition des conditions initiales et les conditions aux limites comme suit :
 - *Conditions initiales :*

$$H(i,0) = H_0 - \Delta H_i ; \Delta H_i = \lambda.L_i.U_0^2/(2.g.D)$$

$$Q(i,0) = Q_0$$

- *Condition à la limite gauche (au niveau du réservoir) :*

$$H(1,n) = H_0$$

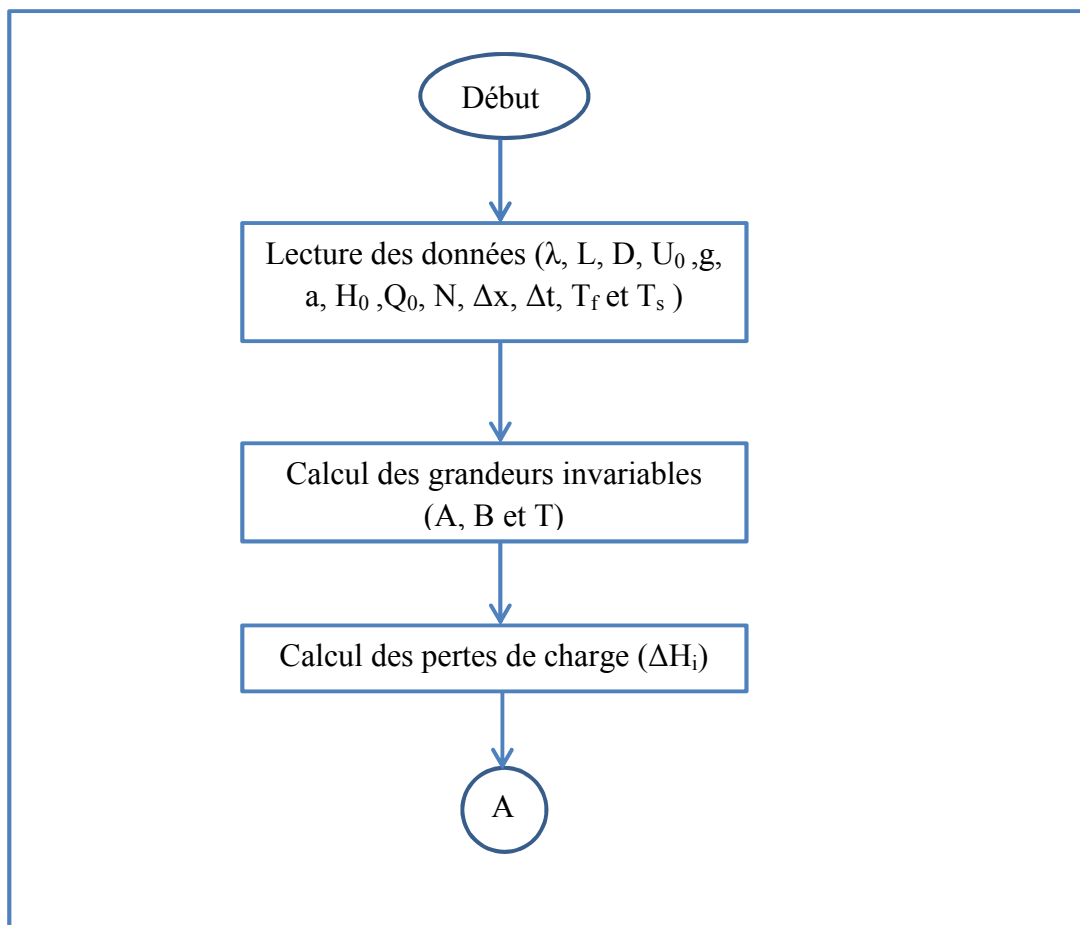
- Condition à la limite droite (au niveau de la vanne qui se ferme linéairement) :

$$\text{Si } T_s < T_f: Q(N+1, n) = Q_0 - Q_0 \cdot t_s(N+1, n) / T_f$$

$$\text{Si } T_s \geq T_f: Q(N+1, n) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Connaissant les valeurs initiales de la charge $H(i, 0)$ et du débit $Q(i, 0)$ en régime permanent, on détermine les paramètres $H(i, n)$ et $Q(i, n)$ en écoulement transitoire comme suit :
- A la sortie du réservoir, en utilisant la condition à la limite gauche pour déterminer $H(1, n)$ et l'équation (4.15) pour calculer $Q(1,n)$.
- Pour les points intérieurs de la conduite on utilise les formules (4.22) et (4.23) ou (4.24).
- Au niveau de la vanne, en utilisant la condition à la limite droite pour déterminer $Q(N+1,n)$ et l'expression (4.14) pour calculer $H(N+1,n)$.

L'organigramme de calcul est donné par la figure (5.1) :



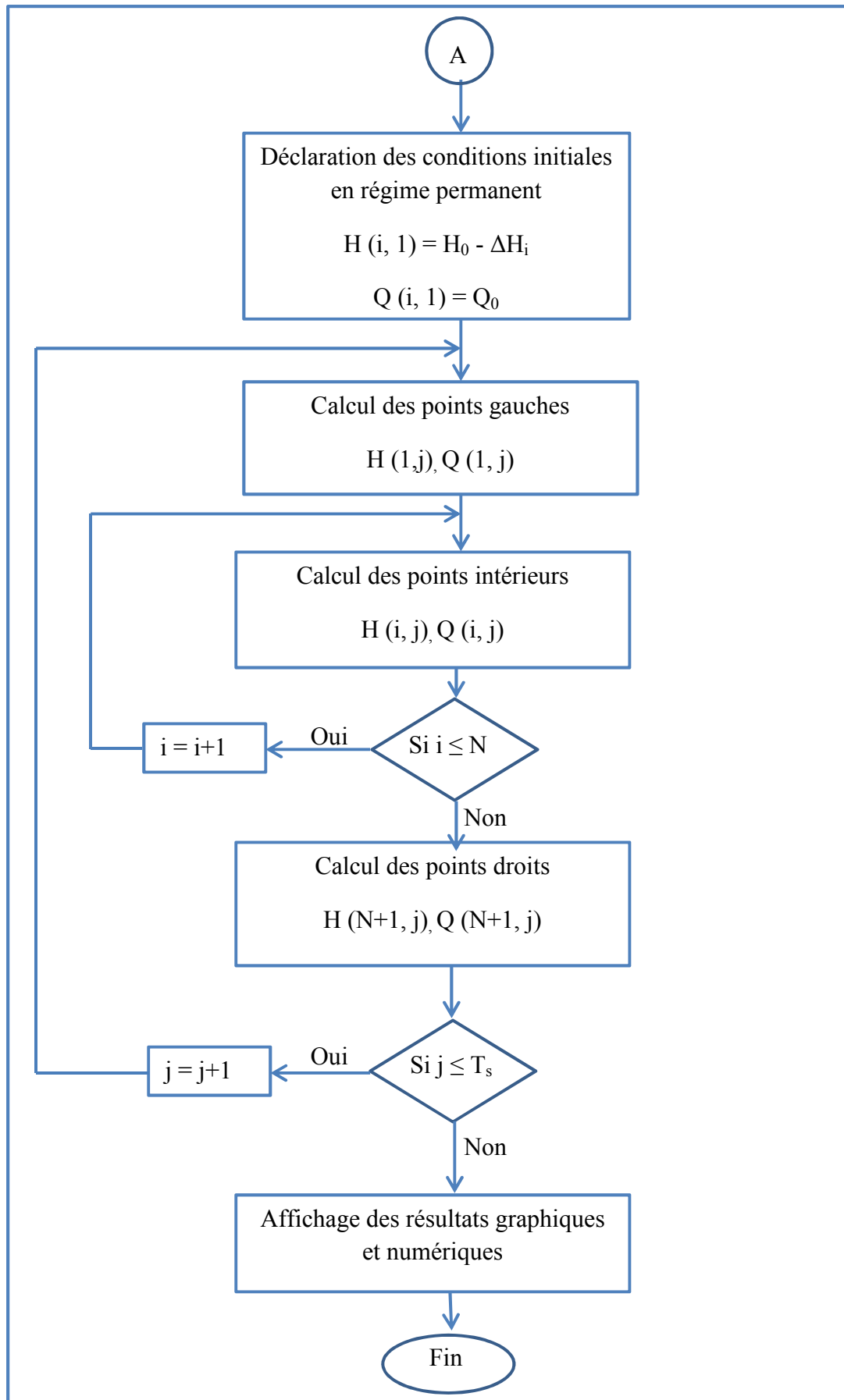
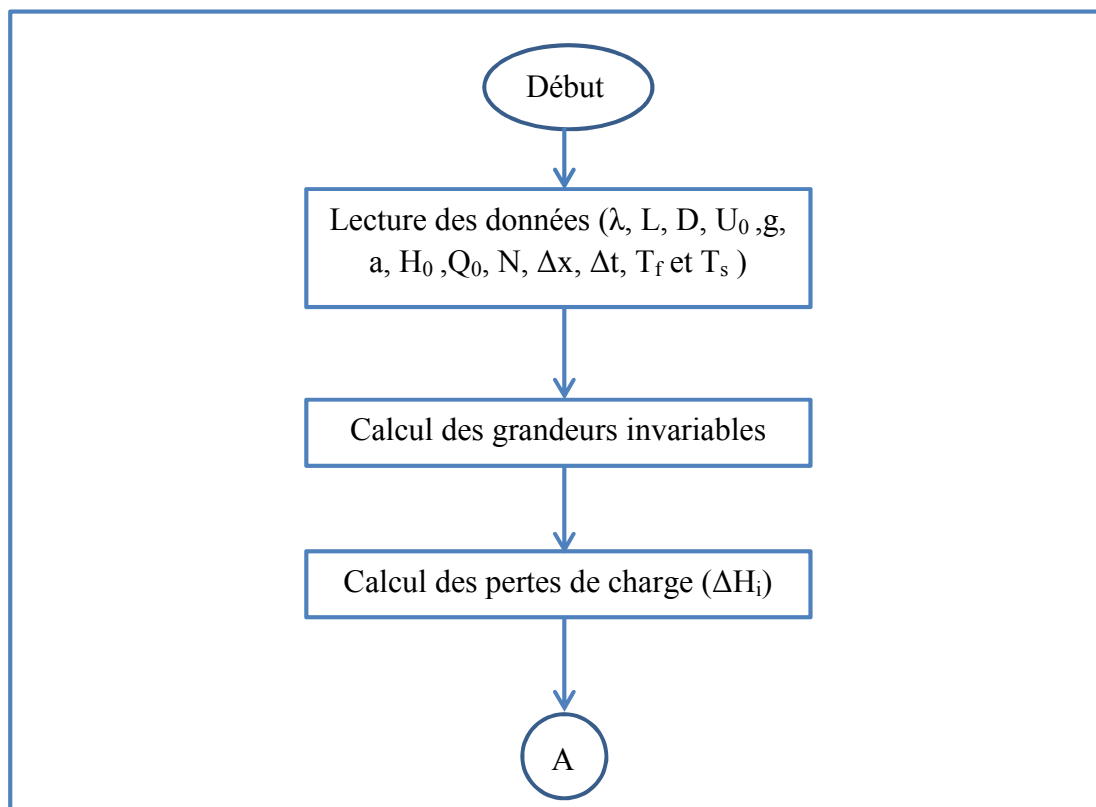


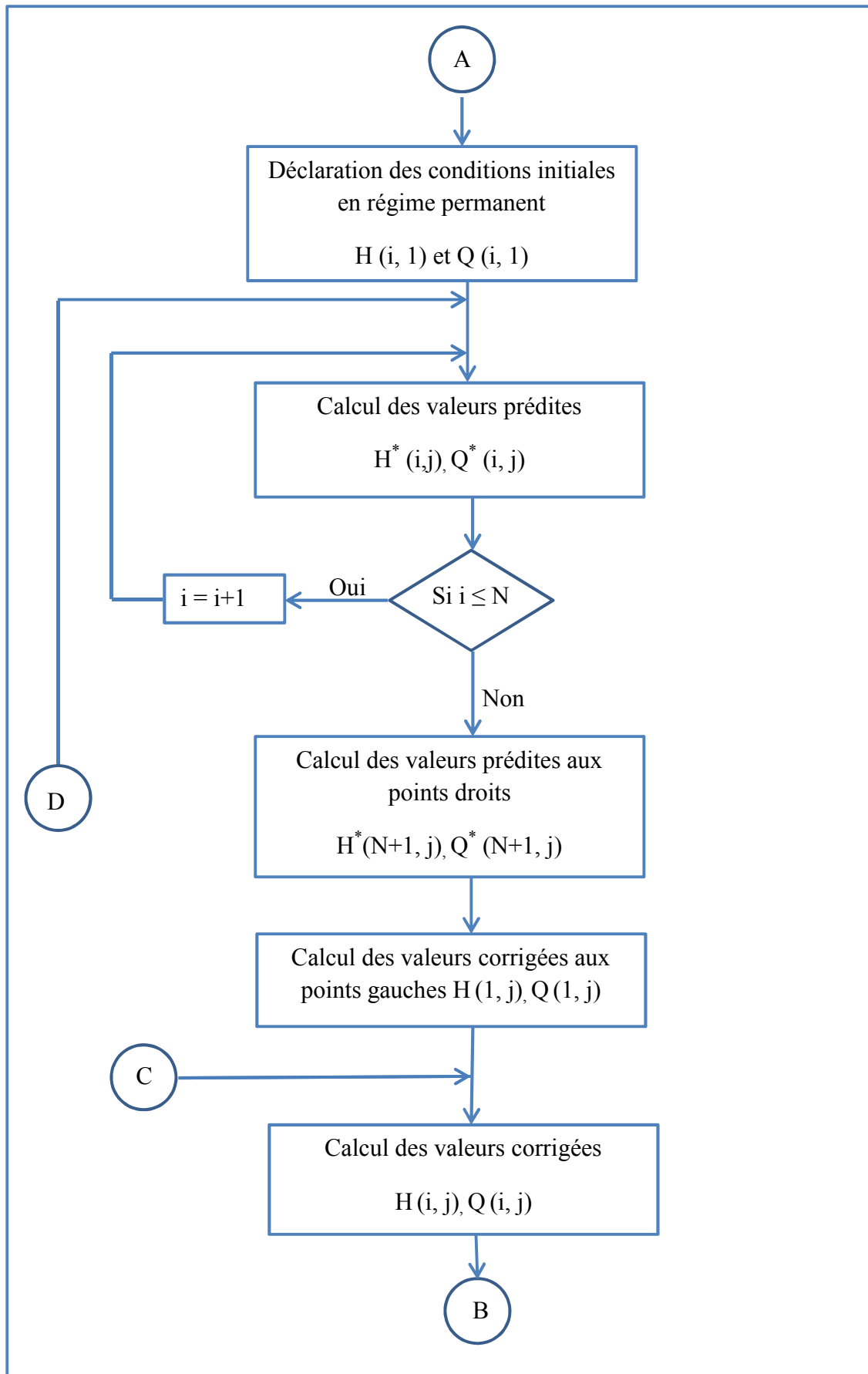
Figure (5.1) : Organigramme de résolution par la MDC

5.2.2 Pour le schéma de MacCormack :

- Lecture des données ($\lambda, L, D, U_0, g, a, H_0, Q_0$)
- Discrétisation spatiale et temporelle de la conduite.
- Calcul des grandeurs invariables
- Choix du temps de fermeture de la vanne (T_f) en fonction de type de fermeture (brusque, rapide ou lente) ainsi que la durée de simulation (T_s)
- Définition des conditions initiales et les conditions aux limites
- Connaissant les valeurs initiales de la charge $H(i, 0)$ et du débit $Q(i, 0)$ en régime permanent, on détermine les paramètres $H(i, n)$ et $Q(i, n)$ en écoulement transitoire comme suit :
 - *Pour la partie prédiction* : On calcul les valeurs prédites de la charge et du débit H_i^* et Q_i^* à l'aide des équations (3.14) et (3.15). Pour le dernier nœud, on utilise la condition à la limite droite pour déterminer $Q^*(N+1, n)$ et l'expression (4.14) pour calculer $H^*(N+1, n)$.
 - *Pour l'étape de correction* : on introduit d'abord la condition à la limite gauche pour déterminer $H(1, n)$ et l'équation (4.15) pour calculer $Q(1, n)$. Pour les points intérieurs de la conduite on utilise les formules (3.16) et (3.17).

L'organigramme de calcul est donné par la figure (5.2) :





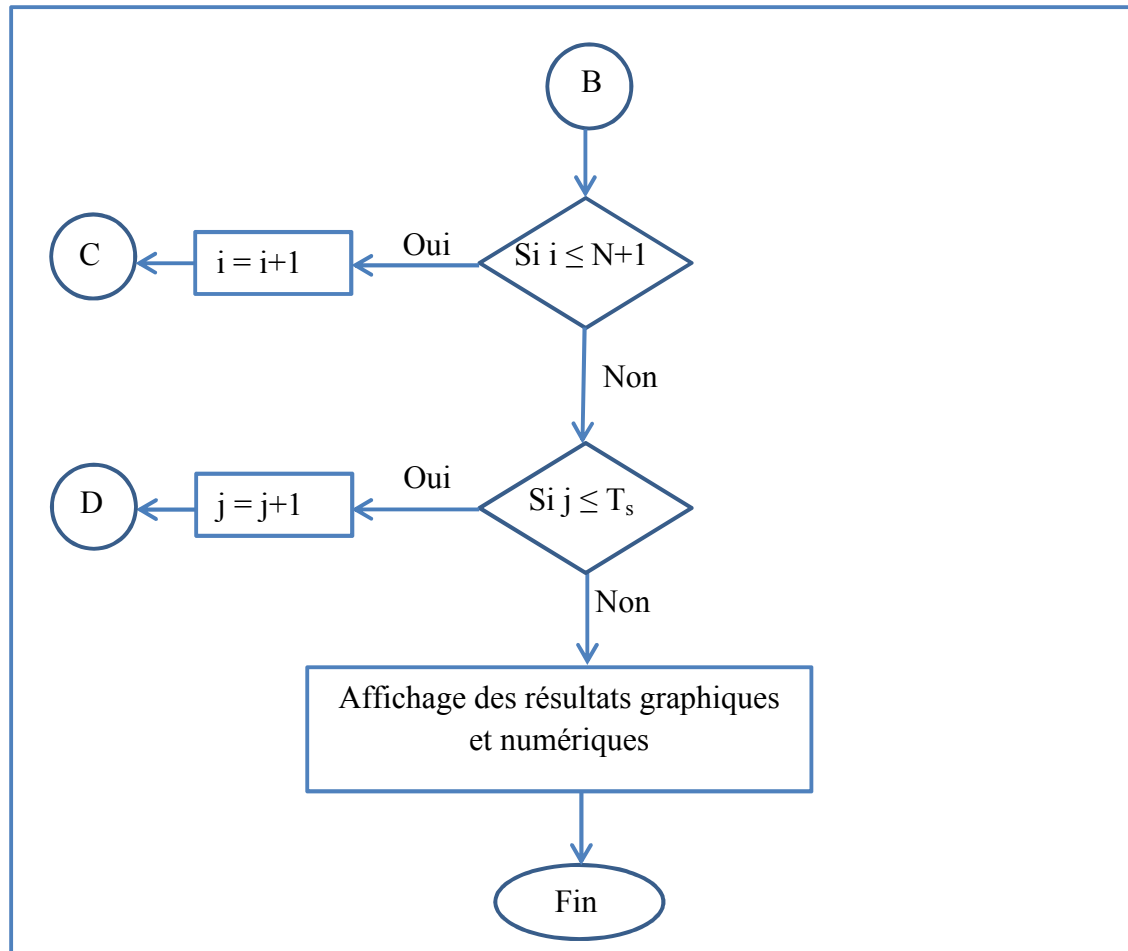


Figure (5.2) : Organigramme de résolution par le schéma de MacCormack

5.3. Applications numériques :

L'un des anciens problèmes posés par le coup de bélier dans les installations industrielles en hydraulique est bien celui de la manœuvre des obturateurs au bout des conduites forcées gravitaires. Ce type de problème a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, donnant lieu à de nombreuses recherches théoriques et expérimentales visant à éviter des dommages dans les installations en charge, souvent conséquence des mauvaises manœuvres.

Nous présentons ici la simulation numérique de ce type classique de problème par les différentes méthodes de calcul numérique, à savoir, la méthode des caractéristiques (MDC), le schéma aux différences finies de MacCormack. L'examen du régime transitoire dans ce cas d'étude se portera sur les manœuvres suivantes :

- Fermeture brusque,
- Fermeture rapide,
- Fermeture lente.

La loi de fermeture sera telle que le débit décroisse linéairement en fonction du temps. Ce choix se justifie par le souci de valider les résultats numériques avec la solution analytique du problème (cas sans pertes de charge) donnée par les séries enchaînées d'Allievi (Jaeger, 1933). (**Annexe N°1**)

Ces cas seront étudiés avec et sans pertes de charge successivement dans le but de comparer les résultats obtenus. La simulation du cas sans pertes de charge permet de valider les résultats avec les solutions analytiques disponibles dans ces conditions. (**Annexe N°1**)

L'installation que l'on se propose d'étudier est donnée par la figure (5.3), elle est composée d'une conduite de diamètre D , de longueur L , à l'extrémité de laquelle se trouve un robinet vanne qui se ferme linéairement, cette conduite est alimentée à l'amont par un réservoir de charge constante H_0 (niveau du plan d'eau constant).

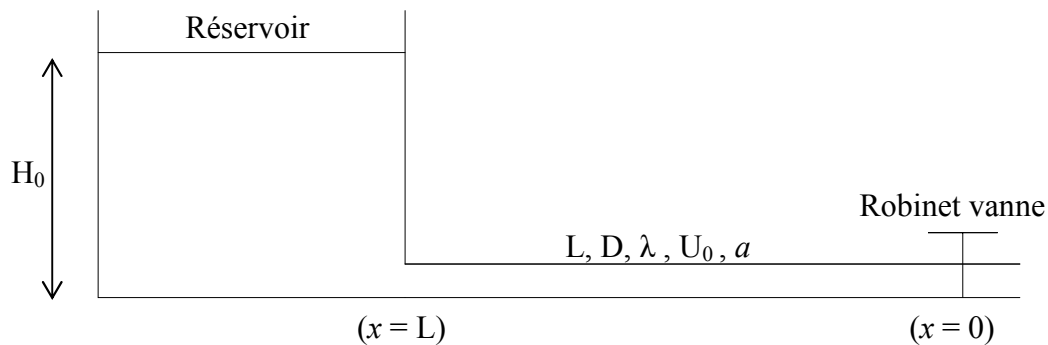


Figure (5.3) : Schéma de l'installation étudiée

Avec :

H_0 (mce) : Charge en régime d'écoulement permanent uniforme

Q_0 (m^3/s) : Débit en régime d'écoulement permanent uniforme

D (mm) : Diamètre de la conduite

L (m) : Longueur de la conduite

a (m/s) : Célérité de propagation de l'onde élastique

λ : Coefficient de résistance due au frottement

Nous choisissons comme données de l'installation celles récapitulées dans le tableau (5.1), par la suite, nous allons faire varier quelques paramètres de l'installation précédente à savoir la longueur de la conduite (L) et la célérité des ondes (a) pour voir l'influence de ces derniers sur le phénomène transitoire par les deux méthodes utilisées :

Tableau (5.1) : Données relatives au cas d'étude

Charge statique (H)	95 m
Vitesse initial (V)	1,5 m/s
Longueur (L)	600 m
Diamètre (D)	300 mm
Célérité d'onde (a)	1000 m/s
Coefficient de frottement (λ)	0,025

5.3.1 Application N°1 :

5.3.1.1 Fermeture brusque de l'obturateur :

Les paramètres de simulation relatifs à ce cas sont :

- Temps de fermeture de la vanne : $T = 0$ s ;
- Durée de la simulation : $t = 10$ s
- Discrétisation de la conduite : $N = 6$ tronçons ;
- Pas d'espace : $\Delta x = L/N = 600/6$, donc $\Delta x = 100$ m ;
- Nombre de Courant : $Cr = 1$.
- Pas de temps de calcul : $\Delta t = \Delta x/a$, donc $\Delta t = 0,1$ s ;

a) Cas sans pertes de charge :

Les résultats de la simulation sont représentés dans la figure (5.4), qui illustre la variation temporelle de la charge enregistrée en phase transitoire par la méthode des caractéristiques et le schéma aux différences finies de MacCormack.

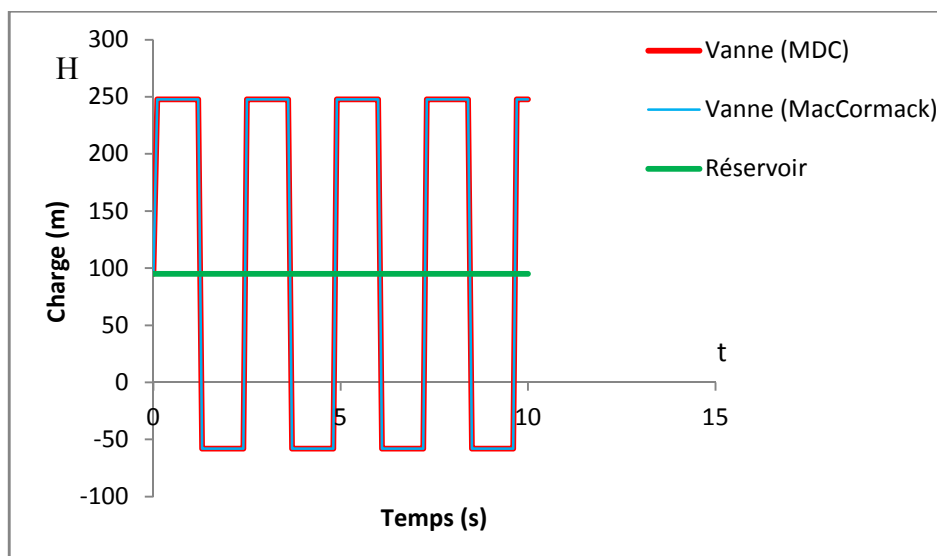


Figure (5.4) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, sans pdc. $L=600m$, $a=1000$ m/s)

Comme nous pouvons le constater, à l'extrémité de la conduite où se crée la perturbation, la surpression s'établit brusquement suite à l'annulation instantanée du débit en régime permanent. Cette surpression reste constante jusqu'au temps 1,2 s, qui est la durée d'aller et retour de l'onde ($2L/a$) entre l'obturateur et le réservoir. Immédiatement après ce temps, une dépression d'égale amplitude prend naissance et reste également constante durant 1,2 s. Après ce temps, le phénomène recommence à nouveau sans amortissement. On voit ainsi le caractère périodique du phénomène d'une durée de 2,4 s qui est similaire la période théorique $2\theta = 4L/a$ issue de la solution exacte du problème.

Pour ce qui est de l'amplitude de l'onde, les charges maximales et minimales enregistrées sont de 247,91 m et - 57,91 m respectivement. Ainsi, la surpression et la dépression par rapport à la charge statique qui est de 95 m (niveau du plan d'eau dans le réservoir) sont : $\Delta b_{\max} = 152,91$ m et $\Delta b_{\min} = -152,91$ m, donc une amplitude de $\pm 152,91$ m. Cette valeur est exactement celle donnée par la formule d'Allievi (aU_0/g). En outre, il est aussi à remarquer l'allure identique du diagramme de pression enregistré à la vanne et celui obtenu par l'application des équations enchaînées d'Allievi.

Il en découle alors que la simulation numérique dans ce cas par la méthode des caractéristiques ainsi que le schéma de MacCormack donne la solution exacte du problème. Les résultats sont récapitulés dans le tableau (5.2) ci-dessous.

Tableau (5.2) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, sans pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	247,91	247,91
Surpression maximale (m)	152,91	152,91
Charge minimale (m)	-57,91	-57,91
Dépression maximale (m)	-152,91	-152,91
Période (s)	2,4	2,4

b) Cas avec pertes de charge :

En introduisant dans l'installation hydraulique précédente (figure (5.3)) les pertes de charge, la simulation de l'écoulement transitoire dans ce cas, fait ressortir les résultats reportés sur la figure (5.5).

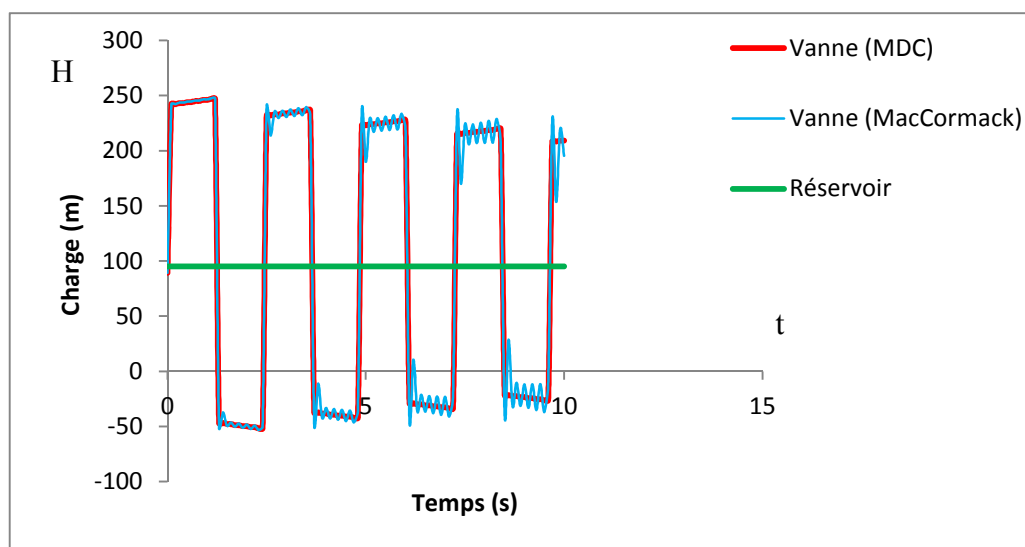


Figure (5.5) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, avec pertes de charge. $L=600m$, $a=1000$ m/s)

Dans ce cas, pour les deux méthodes utilisés, la charge maximale est inférieure à celle obtenue pour le cas précédent, mais la surpression maximale est supérieure à (aU_0/g) que l'on avait auparavant, cette dernière s'établit instantanément mais à partir de la charge $89,27$ m, du fait des pertes de charge en régime initial.

Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau (5.3).

Tableau (5.3) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, avec pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	246,95	247,43
Surpression maximale (m)	157,68	158,16
Charge minimale (m)	-51,62	-53,22
Dépression minimale	-140,89	-142,49
Période (s)	2,4	2,4

Ces résultats montrent des écarts relatifs dans les valeurs calculées par les deux méthodes, aussi bien en surpression qu'en dépression. Etant donné que la méthode des caractéristiques manifeste une solution régulière durant la durée de simulation, le schéma aux différences finies de MacCormack quant à lui approche la solution par la méthode des caractéristiques en première phase de surpression avec une erreur relative de $0,19$ %, mais en phase de dépression, il présente une erreur un peu plus importante de $3,1$ %.

Il est alors facile de voir sur la figure (5.5) que la raison est due à l'instabilité numérique qui se manifeste au-delà de la première demi période du phénomène transitoire.

Cette forte oscillation numérique fait perdre au schéma la monotonie de la solution et s'accroît en fonction du temps jusqu'à divergence totale du schéma de MacCormack. L'avancement du front d'onde le long de la conduite est représenté graphiquement par les figures (5.6) et (5.7).

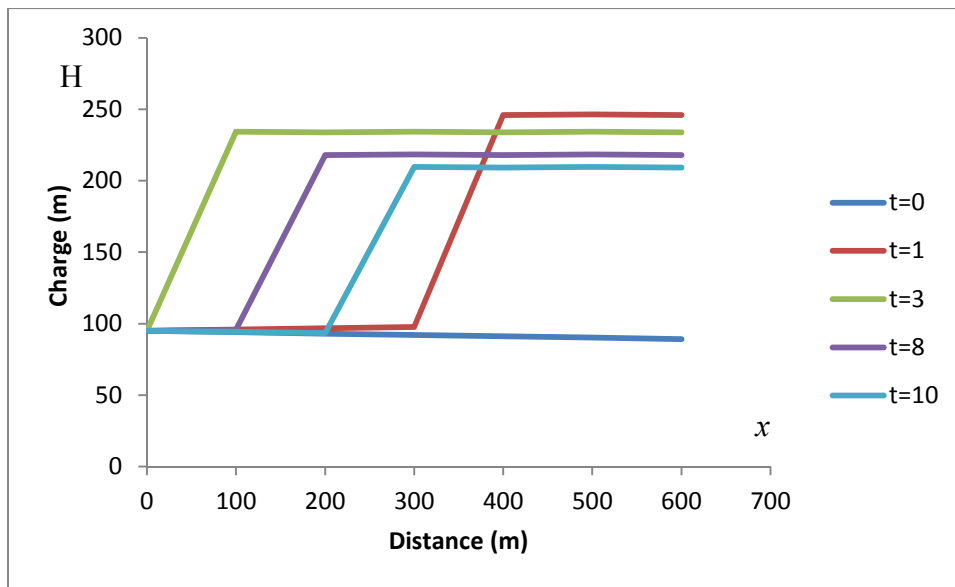


Figure (5.6) : Avancement du front d'onde le long de la conduite par la MDC

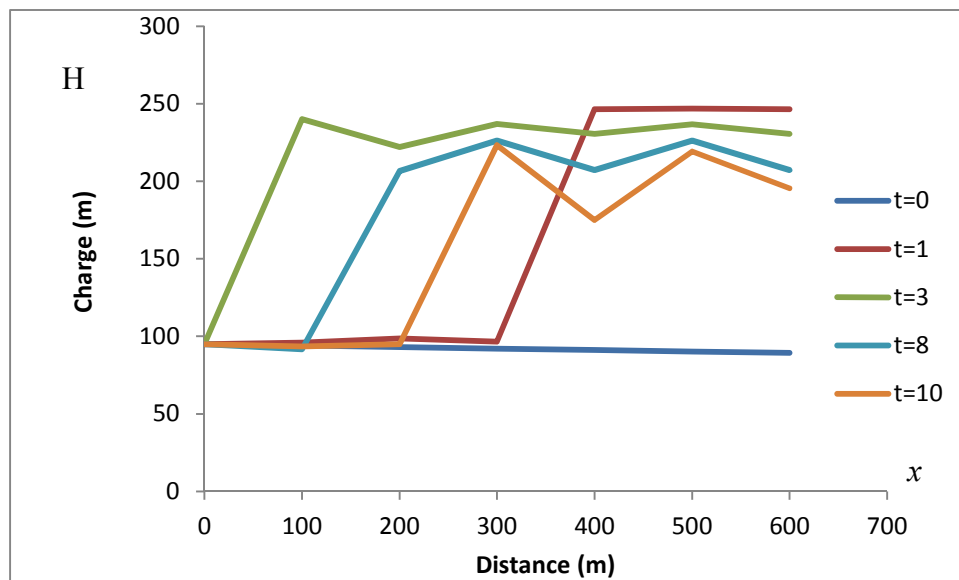


Figure (5.7) : Avancement du front d'onde le long de la conduite par le schéma de MacCormack.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la MDC présente une solution régulière tandis que le schéma de MacCormack manifeste des oscillations numériques qui s'accroissent de plus en plus en fonction de temps, dans ce cas (fermeture brusque, avec pdc)

on peut dire que le schéma de MacCormack n'est pas valable pour le calcul de régime transitoire.

5.3.1.2 Fermeture rapide de l'obturateur :

Les paramètres de simulation relatifs à ce cas sont les mêmes que ceux établis précédemment, sauf pour le temps de fermeture de la vanne qui est inférieur à $2L/a$, soit :

- Temps de fermeture de la vanne : $T_f = 0,6 \text{ s}$;

a) Cas sans pertes de charge :

Les résultats de la simulation sont représentés sur la figure (5.8) :

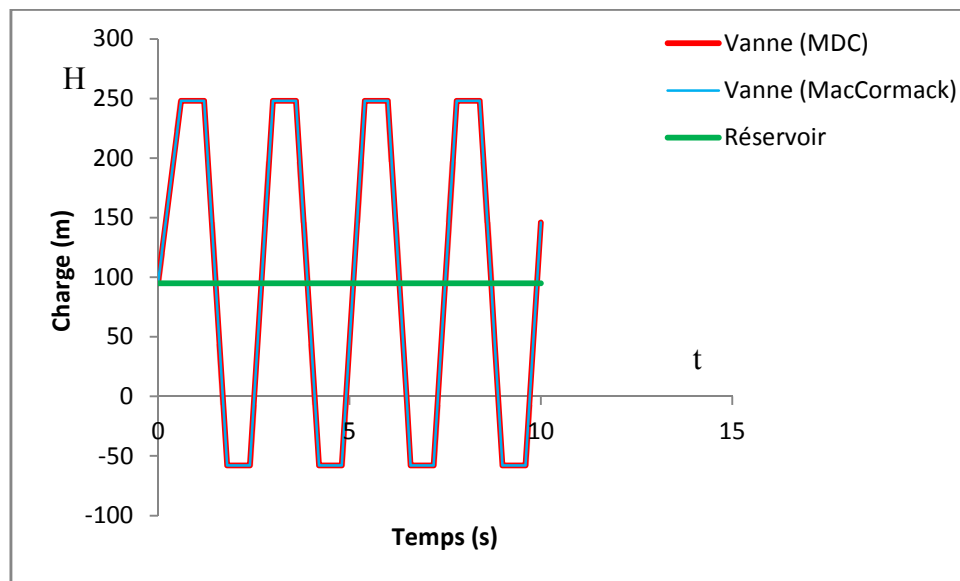


Figure (5.8) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture rapide, sans pertes de charge. $L=600\text{m}$, $a=1000 \text{ m/s}$)

Il est clair que dans ce cas, les résultats obtenus par la MDC et le schéma de MacCormack recourent les résultats analytiques de problème, ainsi l'allure des deux graphes est identique à celui obtenu par Alleivi. La surpression croît linéairement jusqu'à atteindre la valeur maximale de ($\Delta b_{\max} = 152,91$) qui correspond à (aU_0/g) , de même pour la dépression minimale, cela revient au fait que la fermeture de la vanne s'établit linéairement et non pas instantanément.

Tableau (5.4) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, sans pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	247,91	247,91
Surpression maximale (m)	152,91	152,91
Charge minimale (m)	-57,91	-57,91
Dépression minimale	-152,91	-152,91
Periode (s)	2,4	2,4

b) Cas avec pertes de charge :

Les résultats obtenus sont représentés graphiquement par la figure (5.9).

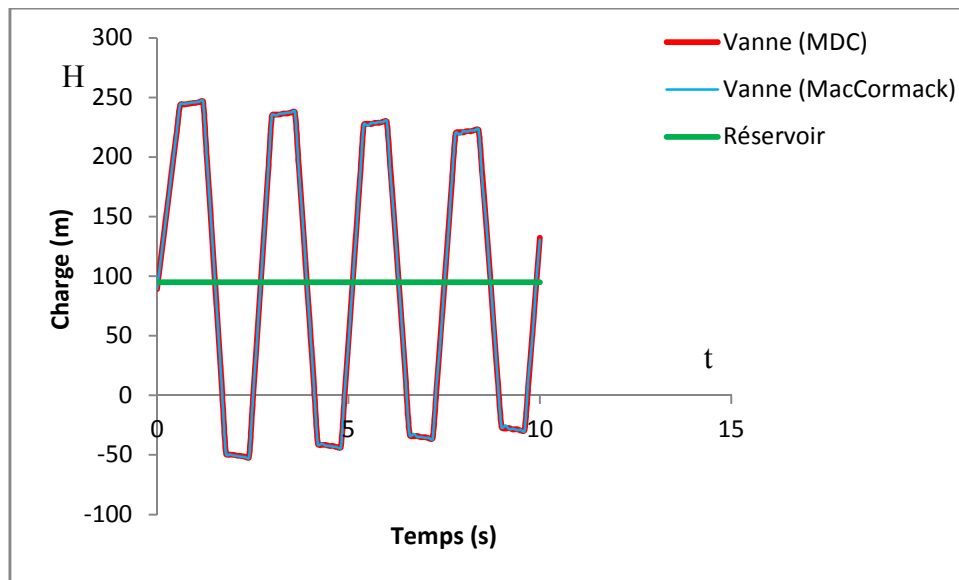


Figure (5.9) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture rapide, avec pertes de charge. $L=600m$, $a=1000 m/s$)

La surpression totale dans ce cas s'établit par deux phases, la première qui est due à la fermeture linéaire de l'obturateur et l'autre qui est due aux pertes de charges, on constate alors que la surpression met plus de temps pour atteindre son maximum comparativement au cas sans pertes de charges. Comme pour le cas précédent de fermeture brusque, les pertes de charge font augmenter sensiblement la surpression maximale, de plus, elles participent dans l'amortissement du phénomène transitoire.

Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau (5.5).

Tableau (5.5) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, avec pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	246,40	246,87
Surpression maximale (m)	157,13	157,6
Charge minimale (m)	-51,80	-52,34
Dépression minimale (m)	-141,07	-141,61
Période (s)	2,4	2,4

Pour une fermeture rapide de l'obturateur, la variation du régime d'écoulement dans le temps est graduelle, ce qui permet au schéma de MacCormack de manifester une solution régulière durant toute la durée de simulation.

Dans ce cas, les deux méthodes présentent des écarts relatifs entre les résultats obtenus, soit 0,19 % en surpression et 1,04 % en dépression.

5.3.1.3 Fermeture lente de l'obturateur :

Nous simulerons à présent un autre type de fermeture pouvant se présenter comme source du régime transitoire, lequel est le plus courant en pratique, c'est la fermeture lente.

La simulation est faite sur la base des paramètres précédents, avec cette fois ci un temps de fermeture de la vanne supérieur à $2L/a$, soit:

- Temps de fermeture de la vanne : $T_f = 1,8$ s ;

a) Cas sans pertes de charge :

La figure (5.10) donne la variation de la charge en fonction du temps, issue des résultats de la simulation par les deux méthodes précédentes.

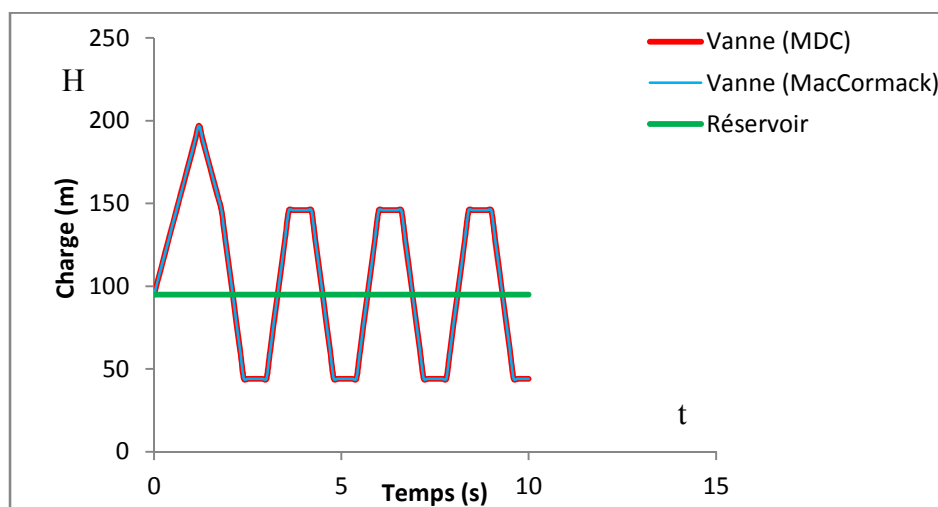


Figure (5.10) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture lente, sans pertes de charge. $L=600$ m, $a=1000$ m/s)

Immédiatement à l'obturateur, la surpression croît linéairement en fonction du temps jusqu'à marquer la valeur maximale de la charge qui s'élève à 196,94 m au temps $t = 1,2$ s, soit une surpression de $(196,94 - 95 = 101,94$ m), résultat semblable fourni par la résolution analytique des séries enchaînées d'Allievi qui donne une valeur maximale de $(\Delta b_{\max} = 2U_0L/gT = 101,94$ m). Ce temps qui est de $(2L/a)$, correspond en effet au temps pris par la première onde incidente de la fermeture partielle afin de parcourir la conduite jusqu'à son extrémité (réservoir) pour revenir ensuite sous forme d'onde réfléchie à la vanne. Cette première onde ainsi réfléchie vient se composer avec les ondes générées à présent à la vanne qui n'a pas encore achevé sa fermeture, pour empêcher la surpression en ce lieu d'atteindre sa première valeur maximale.

A partir de ce temps, la charge diminue pour atteindre son minimum de 44,03 m au temps $t = 2,4$ s. Ensuite la pression croît de nouveau, mais cette dernière prend une autre valeur moins que la première par suite de l'interférence avec les ondes réfléchies du réservoir au temps $t = 3,6$ s. La périodicité du phénomène commence alors à partir de ce moment pour rester indéfiniment à cause d'absence de frottement.

Les résultats numériques sont portés alors dans le tableau (5.6)

Tableau (5.6) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, sans pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	196,94	196,94
Surpression maximale (m)	101,94	101,94
Charge minimale (m)	44,03	44,03
Dépression minimale (m)	-50,97	-50,97
Periode (s)	2,4	2,4

b) Cas avec pertes de charge :

En introduisant les pertes de charge dans la simulation numérique, les résultats obtenus sont représentés graphiquement (Figure (5.11)) pour les schémas numériques précédents.

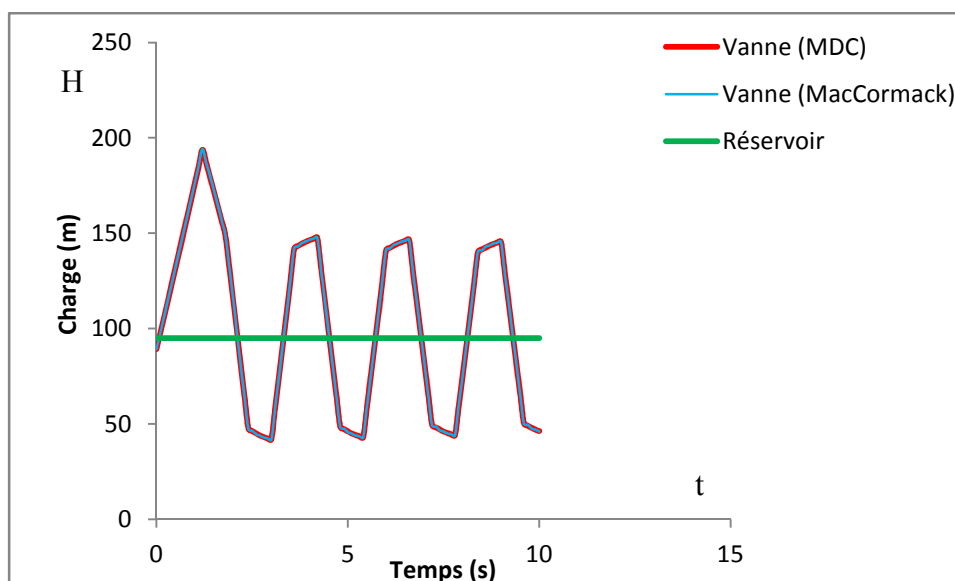


Figure (5.11) : Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture lente, avec pertes de charge. $L=600\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$)

Comme le cas de la fermeture brusque et la fermeture rapide, les pertes de charge font augmenter sensiblement la surpression totale. Par rapport au régime initial régnant à l'obturateur ($x = 0$), la charge maximale atteint 193,71m pour la MDC donc une surpression maximale de 104,44m, soit une augmentation de $(104,44 - 101,94 = 2,5\text{ m})$ comparée au cas précédent (fermeture lente sans pdc). De même pour le schéma de MacCormack la charge maximale qui est de 194,09 m, correspond à une surpression maximale de 104,82 m soit une augmentation de $(104,82 - 101,94 = 2,88\text{ m})$ comparativement au cas de fermeture lente sans pdc.

L'analyse des diagrammes des charges montre qu'après un certain temps, l'effet des pertes de charge fait que les pics des pressions en fonction du temps soient amorties à chaque cycle du phénomène, ce qui permet alors au système hydraulique de reprendre un état d'équilibre après un certain temps. Les résultats de la simulation numérique pour ce cas d'étude sont donnés dans le tableau (5.7) ci-dessous.

Tableau (5.7) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, avec pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	193,71	194,09
Surpression maximale (m)	104,44	104,82
Charge minimale (m)	47,59	47,29
Dépression minimale (m)	- 41,68	- 41,98
Période (s)	2,4	2,4

Le schéma aux différences finies de MacCormack montre une solution régulière, monotone sur toute la durée de simulation, contrairement au cas de fermeture brusque où une forte oscillation numérique dans la solution a été enregistrée. Cela revient en fait à la nature physique du problème. Pour une fermeture lente de l'obturateur, la variation du régime d'écoulement dans le temps est graduelle, de plus, le terme de frottement provoque la non linéarité des équations, donc la nature des ondes ainsi créées à l'obturateur ne laisse manifester des oscillations numériques. Les résultats ainsi obtenus par ce schéma sont satisfaisants et ne s'écartent que de 0,20 % en surpression et de 0,63 % par rapports à la MDC, avec évidemment une même période calculée du phénomène.

5.3.2 Application N°2 :

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous allons garder les données relatives à l'installation précédente, excepté la longueur de la conduite qui sera égale à 1800 m. Les résultats de simulation sont représentés graphiquement par les figures (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16), (5.17).

5.3.2.1. Fermeture brusque de l'obturateur :

Les paramètres de simulation relatifs à ce cas sont :

- Temps de fermeture de la vanne : $T = 0$ s ;
- Durée de la simulation : $t = 30$ s
- Discrétisation de la conduite : $N = 6$ tronçons ;
- Pas d'espace : $\Delta x = L/N = 1800/6$, donc $\Delta x = 300$ m ;
- Nombre de Courant : $Cr = 1$.
- Pas de temps de calcul : $\Delta t = \Delta x/a$, donc $\Delta t = 0,3$ s ;

a) Cas sans pertes de charge :

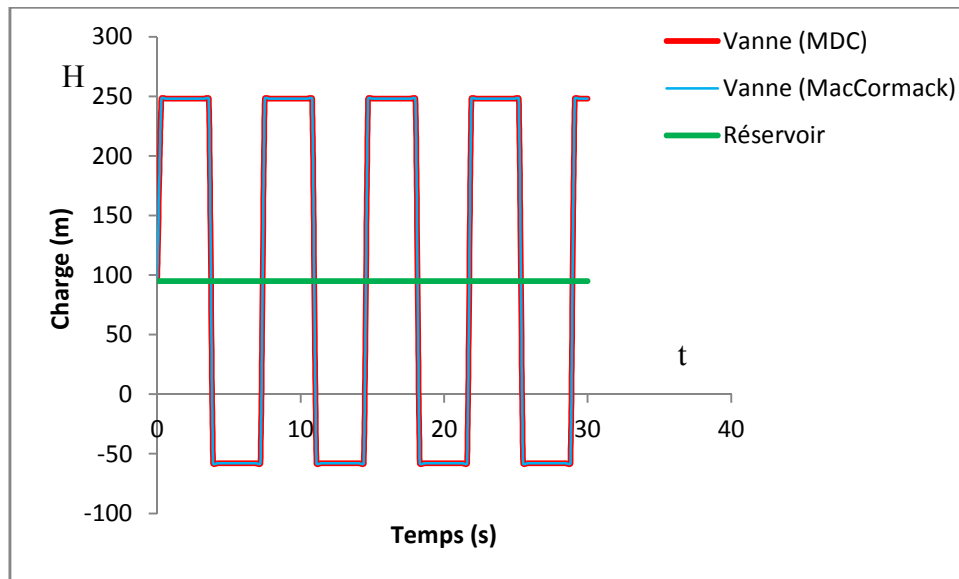


Figure (5.12) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, sans pdc. $L=1800\text{m}$, $a=1000\text{ m/s}$)

Tableau (5.8) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, sans pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	247,91	247,91
Surpression maximale (m)	152,91	152,91
Charge minimale (m)	-57,91	-57,91
Dépression minimale (m)	-152,91	-152,91
Période (s)	7,2	7,2

La simulation numérique dans ce cas par la méthode des caractéristiques et le schéma de MacCormack donne la solution exacte du problème, de plus, l'augmentation de la longueur de la conduite n'a pas influencé sur les valeurs de la surpression et la dépression obtenues précédemment, effectivement comme le montre la formule Allievi, qui stipule que, pour une fermeture brusque, la valeur de coup de bélier ne dépend pas de la longueur de la conduite ($\Delta b = \pm aU_0/g$), ainsi, la période du phénomène qui est de 7,2 s est similaire la période théorique ($2\theta = 4L/a$) issue de la solution exacte du problème.

b) Cas avec pertes de charge :

Dans ce cas, la charge maximale s'établit brusquement mais à partir de la charge 77,80 m du fait des pertes de charge en régime initiale.

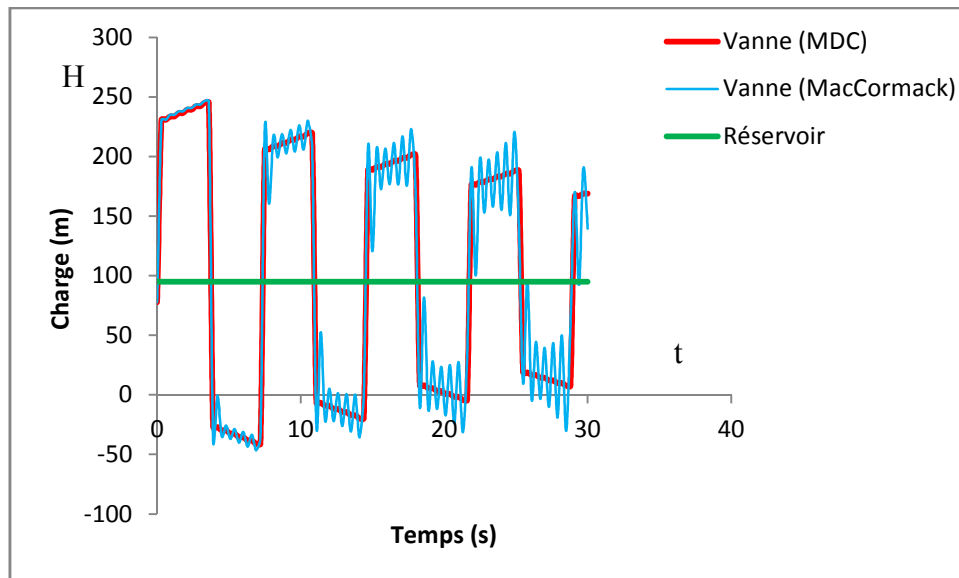


Figure (5.13) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, avec pdc. $L=1800m$, $a=1000$ m/s)

Tableau (5.9) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, avec pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	245,02	246,44
Surpression maximale	167,22	168,64
Charge minimale (m)	- 41,04	- 46,64
Dépression minimale	-118,84	-124,44
Période (s)	7,2	7,2

Le schéma aux différences finies de MacCormack approche la solution par la méthode des caractéristiques en phase de surpression avec une erreur relative de 0,58 %, mais en phase de dépression, il présente une erreur de 13,65 %, cette dernière est due aux oscillations numériques que présentent le schéma de MacCormack qui sont plus importantes que l'application précédente du fait de l'augmentation des pertes de charges.

5.3.2.2. Fermeture rapide de l'obturateur :

Dans ce cas, le temps de fermeture de la vanne est inférieur à $2L/a$ ($T_f < 3,6$ s), soit :

- Temps de fermeture de la vanne : $T_f = 1,8$ s

a) Cas sans pertes de charge :

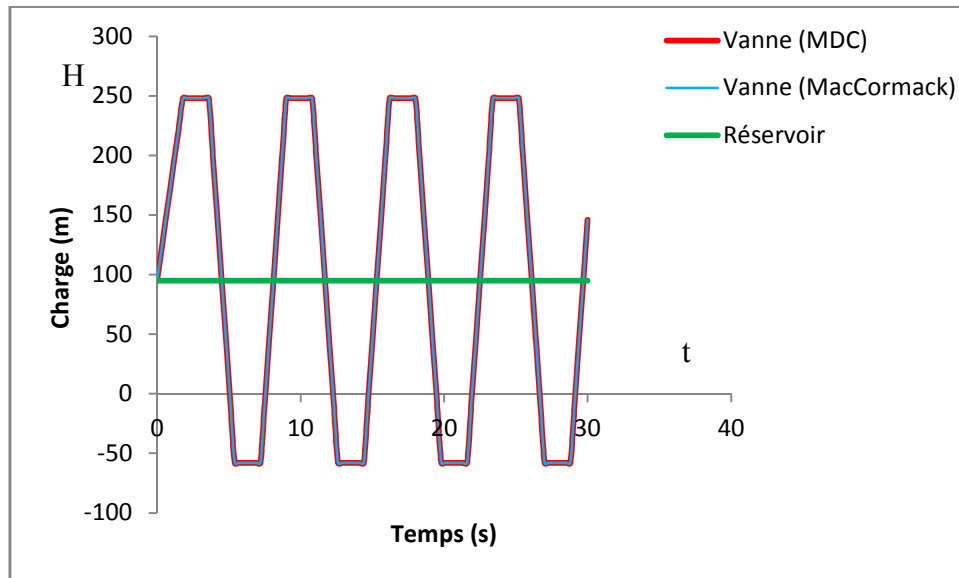


Figure (5.14) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture rapide, sans pdc. $L=1800$ m, $a=1000$ m/s)

Tableau (5.10) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, sans pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	247,91	247,91
Suppression maximale (m)	152,91	152,91
Charge minimale (m)	-57,91	-57,91
Dépression minimale	-152,91	-152,91
Periode (s)	7,2	7,2

La simulation numérique dans ce cas par les deux méthodes numériques donne les mêmes résultats, qui sont identiques avec la solution exacte du problème.

b) Cas avec pertes de charge :

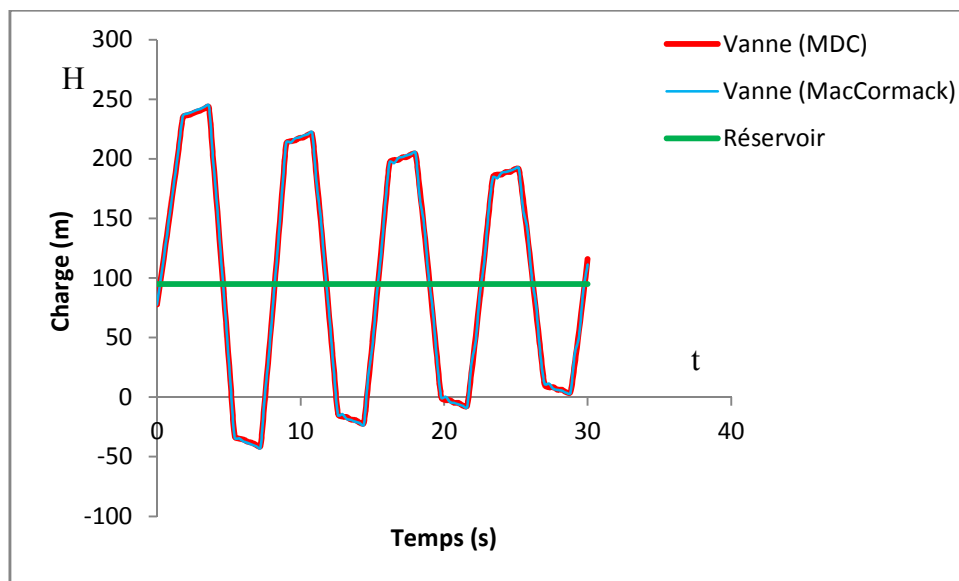


Figure (5.15) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture rapide, avec pdc. $L=1800m$, $a=1000$ m/s)

Tableau (5.11) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, avec pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	243,28	244,68
Surpression maximale (m)	165,48	166,88
Charge minimale (m)	-40,98	-42,49
Dépression minimale (m)	-118,78	-120,29
Période (s)	7,2	7,2

Dans ce cas, la variation du régime d'écoulement dans le temps est graduelle, ce qui permet au schéma de MacCormack de manifester une solution régulière durant la durée de simulation, ce dernier approche la solution par la méthode des caractéristiques en phase de surpression avec une erreur relative de 0,58 %, en phase de dépression, il présente une erreur de 3,68 %.

Il est à signaler que l'amortissement du phénomène se fait plus vite que précédemment à cause de l'augmentation des pertes de charge qui sont à l'origine de l'augmentation de la longueur de la conduite, donc le système hydraulique pourra reprendre son état d'équilibre plus vite.

5.3.2.3. Fermeture lente de l'obturateur :

Pour une fermeture lente, le temps de fermeture de la vanne est supérieur à $2L/a$, soit :

- Temps de fermeture de la vanne : $T_f = 6 \text{ s}$;

a) Cas sans pertes de charge :

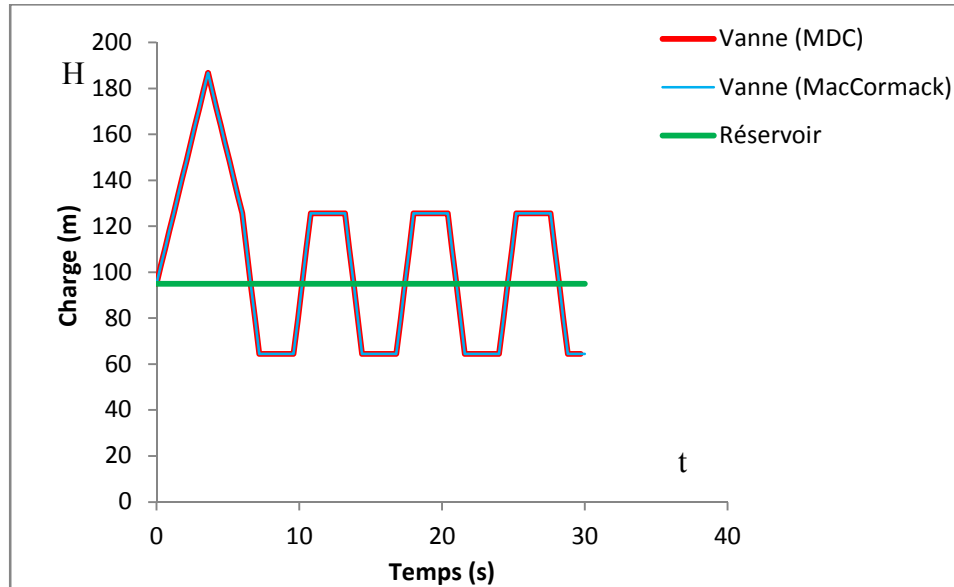


Figure (5.16) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture lente, sans pdc. $L=1800\text{m}$, $a=1000 \text{ m/s}$)

Tableau (5.12) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, sans pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	186,74	186,74
Surpression maximale (m)	91,74	91,74
Charge minimale (m)	64,42	64,42
Dépression minimale (m)	-30,58	-30,58
Periode (s)	7,2	7,2

Les deux méthodes numériques donnent les mêmes résultats, dans ce cas, les valeurs de la surpression et la dépression ne sont pas identiques à ceux obtenus précédemment par la première application vu que la longueur de la conduite a changé, donc on constate que, pour une fermeture lente de l'obturateur, la surpression maximale dépend de la longueur de la conduite, cette valeur est exactement la même que celle obtenue par la résolution analytique des séries enchaînées d'Allievi ($\Delta b_{\max} = 2U_0L/gT = 91,74 \text{ m}$).

b) Cas avec pertes de charge :

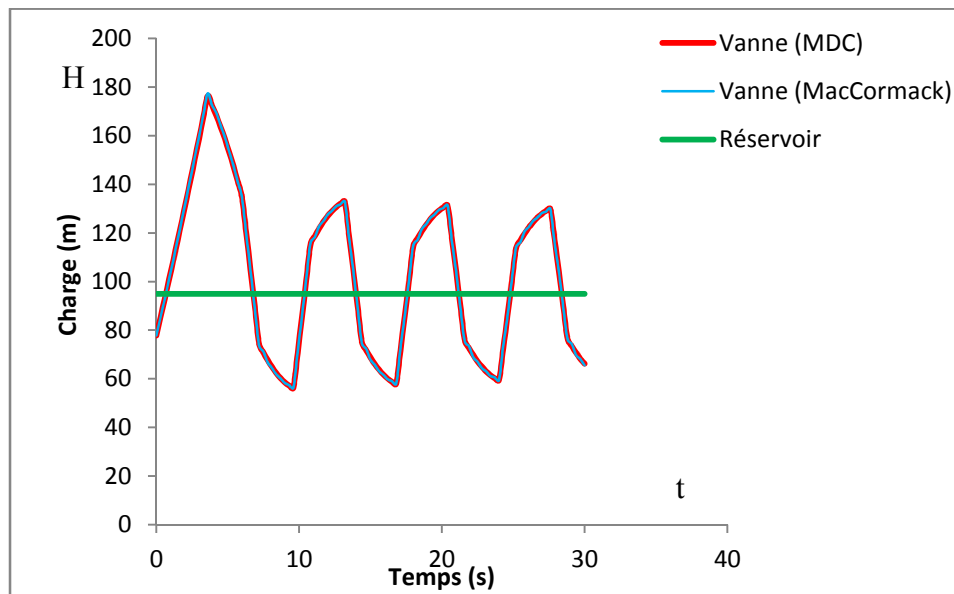


Figure (5.17) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture lente, avec pdc. $L=1800m$, $a=1000$ m/s)

Tableau (5.13) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, avec pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	176,34	177,38
Surpression maximale (m)	98,54	99,58
Charge minimale (m)	56,25	56,28
Dépression minimale (m)	-21,55	-21,52
Période (s)	7,2	7,2

Les résultats obtenus par le schéma de MacCormack sont satisfaisants et ne s'écartent que de 0,60 % en phase de surpression et de 0,05 % en phase de dépression par rapports à la MDC, avec une même période calculée du phénomène.

5.3.3 Application N°3 :

Dans cette application, la longueur de la conduite reste la même que celle de l'installation étudié, mais cette fois ci, la célérité des ondes (a) prendra une autre valeur un peu plus importante, soit 1200 m/s. Les résultats de simulation sont représentés graphiquement par les figures (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22), (5.23).

5.3.3.1 Fermeture brusque de l'obturateur :

Les paramètres de simulations relatifs à ce cas sont identiques à ceux de l'application N°1, excepté le pas de temps qui est en fonction de la célérité des ondes soit :

- Temps de fermeture de la vanne : $T = 0$ s ;
- Durée de la simulation : $t = 10$ s
- Discrétisation de la conduite : $N = 6$ tronçons ;
- Pas d'espace : $\Delta x = L/N = 600/6$, donc $\Delta x = 100$ m ;
- Nombre de Courant : $Cr = 1$.
- Pas de temps de calcul : $\Delta t = \Delta x/a$, donc $\Delta t = 0,083$ s ;

a) Cas sans pertes de charge :

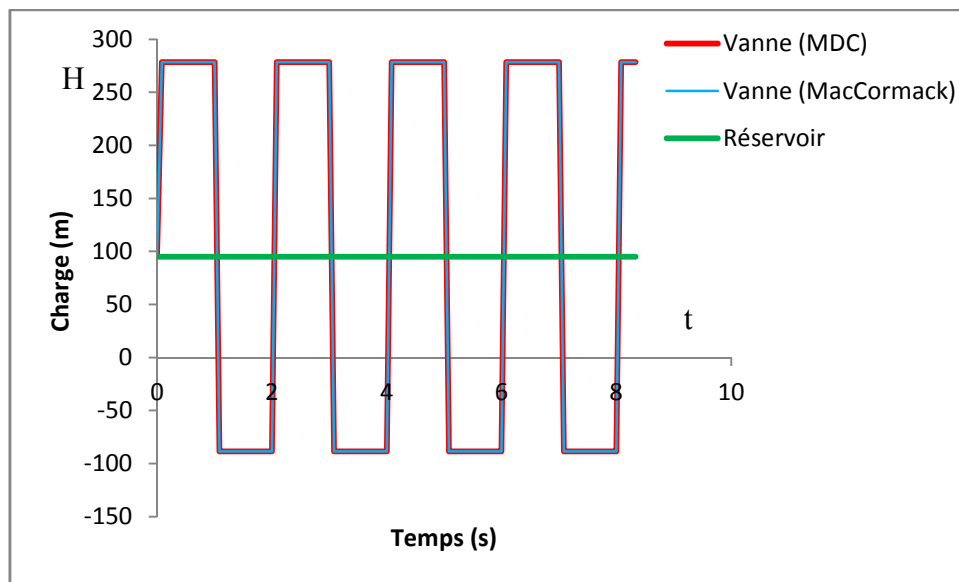


Figure (5.18) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, sans pdc. $L=600m$, $a=1200$ m/s)

Tableau (5.14) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, sans pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	278,49	278,49
Suppression maximale (m)	183,49	183,49
Charge minimale (m)	-88,49	-88,49
Dépression minimale (m)	-183,49	-183,49
Période (s)	2,4	2,4

Dans ce cas, les deux méthodes numériques donnent les mêmes résultats et les valeurs de la surpression maximale et la dépression minimale sont plus importantes que ceux obtenues précédemment dans les deux premières applications, cela revient à l'augmentation de la célérité des ondes (a), ces valeurs coïncident parfaitement avec la solution analytique du problème données par Allievi ($\Delta b = \pm aU_0/g = \pm 183,49$).

La période du phénomène est similaire à la période théorique issue de la solution exacte du problème ($2\theta = 4L/a = 2,4$ s).

b) Cas avec pertes de charge :

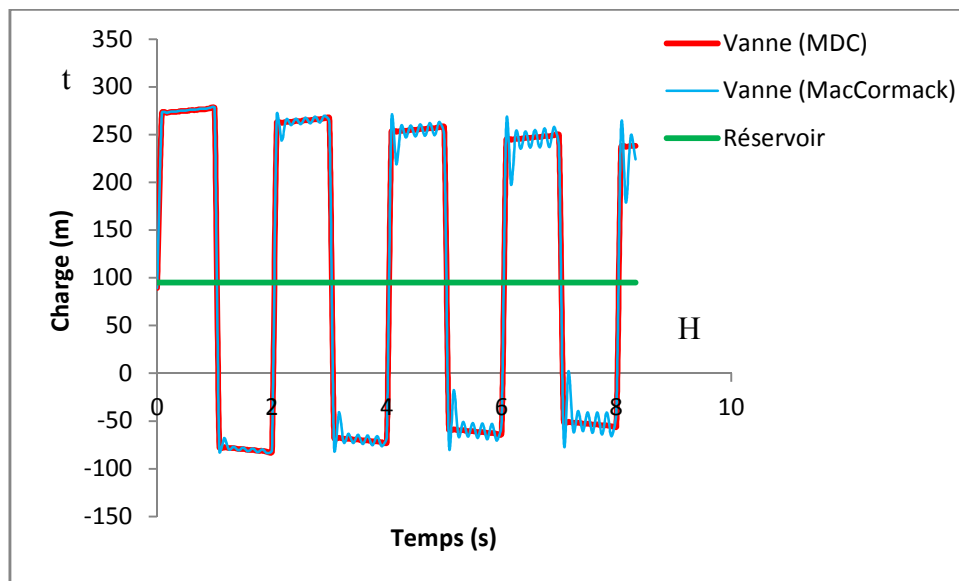


Figure (5.19) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture brusque, avec pdc. $L=600m$, $a=1200$ m/s)

Tableau (5.15) : Résultats de simulation numérique (fermeture brusque, avec pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	277,53	278,01
Surpression maximale	188,26	188,74
Charge minimale (m)	-82,14	-83,71
Dépression minimale	-171,41	-172,98
Période (s)	2,4	2,4

Pour ce cas, l'augmentation de la célérité (a) n'a pas influencé sur les oscillations numériques que présente le schéma de MacCormack, ce dernier approche la solution par la MDC avec une erreur de 0,17 % en phase de surpression et 1,91 % en phase de dépression.

5.3.3.2 Fermeture rapide de l'obturateur :

a) Cas sans pertes de charge :

- Temps de fermeture de la vanne : $T_f = 0,6$ s ;

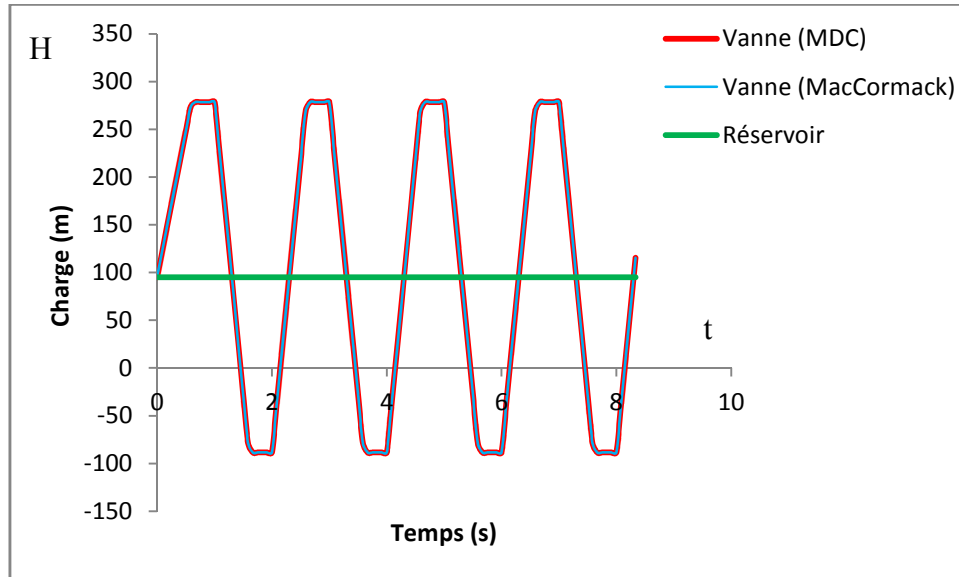


Figure (5.20) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture rapide, sans pdc. $L=600$ m, $a=1200$ m/s)

Tableau (5.16) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, sans pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	278,49	278,49
Surpression maximale (m)	183,49	183,49
Charge minimale (m)	-88,49	-88,49
Dépression minimale	-183,49	-183,49
Periode (s)	2,4	2,4

La simulation numérique dans ce cas par les deux méthodes numériques donne les mêmes résultats, qui sont identiques avec la solution exacte du problème.

b) Cas avec pertes de charge :

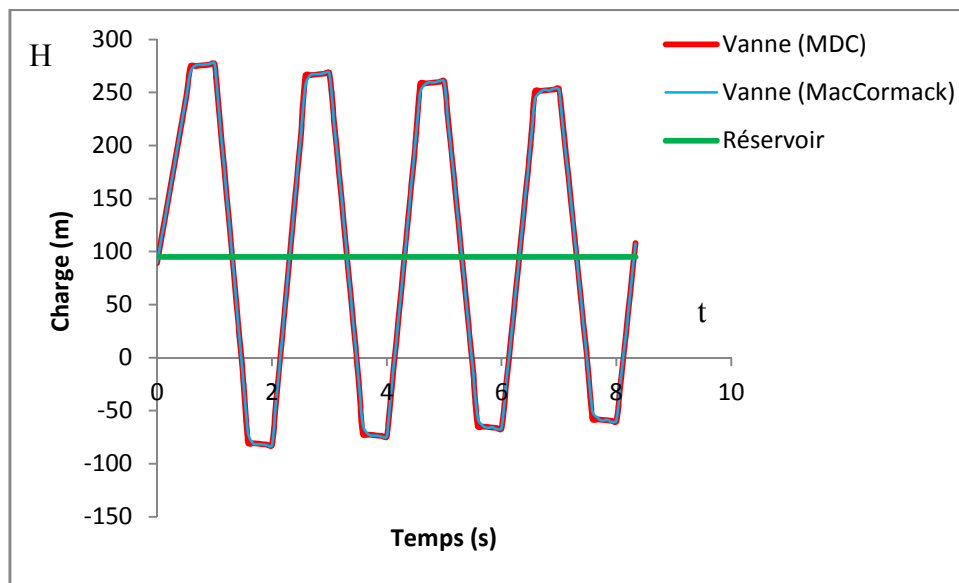


Figure (5.21) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture rapide, avec pdc. $L=600m$, $a=1200$ m/s)

Tableau (5.17) : Résultats de simulation numérique (fermeture rapide, avec pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	276,80	277,27
Surpression maximale (m)	187,53	188
Charge minimale (m)	-82,40	-82,72
Dépression minimale (m)	-171,67	-171,99
Période (s)	2,4	2,4

Pour ce cas, même en présence des pertes de charge, la solution par le schéma de MacCormack est régulière (absence des oscillations numériques), cela revient au type de fermeture qui crée une variation graduelle du régime d'écoulement. Les résultats obtenus par les deux méthodes ne s'écartent que de 0,17 % en phase de surpression et 0,34 % en phase de dépression.

5.3.3.3 Fermeture lente de l'obturateur :

a) Cas sans pertes de charge :

Temps de fermeture de la vanne : $T_f = 1,8$ s ;

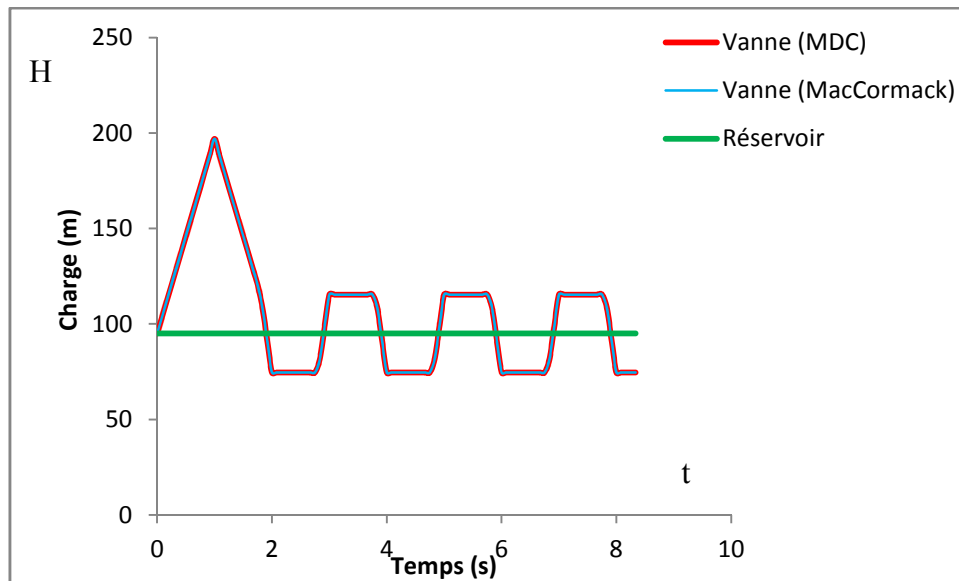


Figure (5.22) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture lente, sans pdc. $L=600\text{m}$, $a=1200\text{ m/s}$)

Tableau (5.18) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, sans pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	196,94	196,94
Surpression maximale (m)	101,94	101,94
Charge minimale (m)	74,61	74,61
Dépression minimale (m)	-20,39	-20,39
Periode (s)	2,4	2,4

Les deux méthodes présentent les mêmes résultats, la surpression maximale est identiques avec la solution analytique d'Allievi ($\Delta b_{\max}=2U_0L/gT= 101,94\text{ m}$).

b) Cas avec pertes de charge :

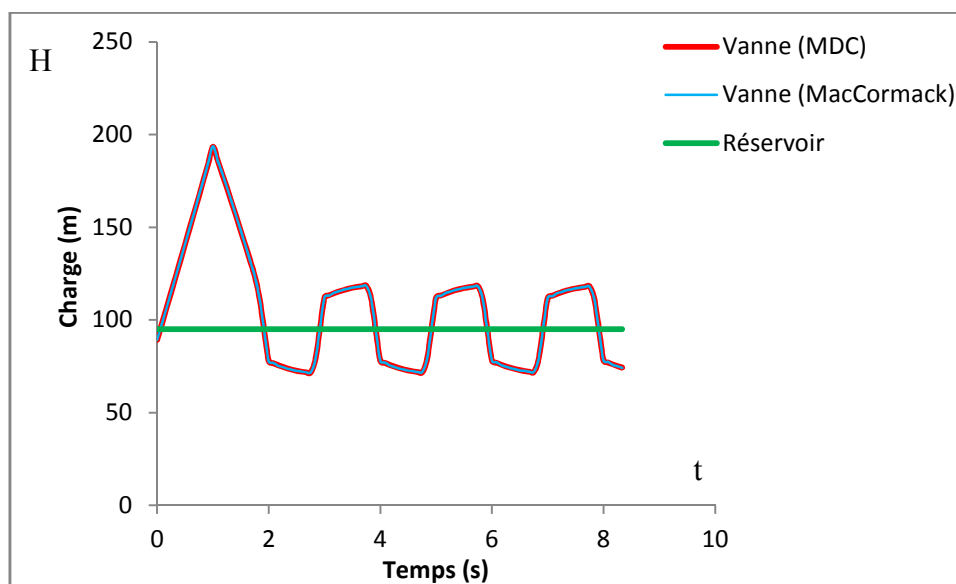


Figure (5.23) : Variation de la charge H à l'obturateur en fonction du temps (fermeture lente, avec pdc. $L=600m$, $a=1200$ m/s)

Tableau (5.19) : Résultats de simulation numérique (fermeture lente, avec pertes de charge)

paramètres	MDC	MacCormack
Charge maximale (m)	193,39	193,72
Surpression maximale (m)	104,12	104,45
Charge minimale (m)	71,57	71,69
Dépression minimale (m)	-17,70	-17,58
Période (s)	2,4	2,4

Dans ce cas, les deux méthodes donnent sensiblement les mêmes résultats, soit un écart relatif de 0,17 % en phase de surpression et de dépression.

5.4 Conclusion :

D'après les résultats obtenus, il est clair qu'a priori une fermeture brusque ou rapide produira un coup de bélier supérieur à une fermeture lente, c'est pourquoi en pratique on cherche des vannes dont la loi de fermeture produira un coup de bélier optimum. Les résultats simulés par les différents schémas numériques, permet de faire les constatations suivantes :

Pour des simulations sans pertes de charge, les deux méthodes numériques aboutissent aux mêmes résultats en phase de surpression et celle de dépression. Dans ce cas, la solution numérique recoupe les résultats analytiques (solution exacte du problème) du fait du caractère

linéaire des lois de conservations hyperboliques gouvernant l'écoulement. Pour un nombre de *Courant* ($Cr = 1$), le schéma numérique aux différences finies de MacCormack décrit correctement le front d'onde et présente une solution régulière et monotone sur toute la durée de simulation;

L'introduction du terme de frottement dans les équations du mouvement, c'est-à-dire la simulation avec pertes de charge dans le système, fait ressortir des écarts relatifs très faibles entre les solutions numériques, donc les deux méthodes numériques donnent sensiblement les mêmes résultats, sauf pour le cas de fermeture brusque de l'organe d'obturation, dans ce cas, le schéma de MacCormack échoue dans la capture du choc en raison de l'instabilité numérique surtout pour des longueurs importantes, contrairement à la méthode des caractéristiques, qui arrive à décrire le front d'onde malgré les pertes de charges introduites et manifeste une solution régulière durant le temps de simulation.

Les résultats obtenus confirment l'importance que revêt la méthode des caractéristiques dans la simulation des écoulements transitoires dans la pratique pour les différents cas examinés.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'étude de régime transitoire en charge est un domaine très vaste qui a fait l'objet de nombreux travaux de recherche vu les conséquences fâcheuses que peut entraîner d'une part, et les difficultés rencontrées dans la résolution du système d'équations décrivant ce phénomène d'autre part. Pour cela, différentes étapes ont été présentées et traitées.

Nos travaux de recherche ont débuté par des aperçus bibliographiques approfondis, sur les travaux antérieurs portant sur le régime transitoire et les méthodes consacrées pour sa résolution.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation mathématique de ce type d'écoulement par l'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, Nous avons abouti à un système d'équations aux dérivées partielles dit de Saint-Venant. Ce dernier appartient à la classe des équations hyperboliques, gouvernant la quasi-totalité des écoulements non permanents. Par ailleurs, nous avons présenté les différents avis donnés par les auteurs concernant la détermination de la célérité d'onde du coup de bélier ainsi que la relation originale donnant la célérité de propagation d'onde dans les conduites enterrées en charge. Cette relation est d'un intérêt important pour un dimensionnement adéquat des moyens anti-béliers vu les problèmes rencontrés en pratique.

A la lumière du troisième chapitre, nous avons examiné les différentes méthodes utilisées pour la solution des systèmes d'équations décrivant les écoulements transitoires en charge. La résolution de ce modèle d'équations présente souvent des difficultés, pour cela, nous avons choisi les méthodes numériques pour l'intégration de ces équations différentielles, de plus, une étude comparative a été effectuée dans le but de choisir les méthodes les plus adaptées à ce genre de problèmes. Cette dernière nous a permis de retenir deux méthodes jugées plus efficaces vu les avantages qu'elles présentent par rapport aux autres : la méthode des caractéristiques et celle des différences finies.

Dans le domaine du régime transitoire, la méthode des caractéristiques considère que les pieds des caractéristiques aboutissent aux nœuds de calcul. Dans le quatrième chapitre, nous n'avons pas pris en considération cette hypothèse, pour cela, nous avons constaté que cette méthode admet des erreurs, lorsque les pieds des caractéristiques aboutissent entre deux

nœuds, ces erreurs sont temporelles et spatiales. Pour la quantification de ces derniers, nous avons fait recours à l'interpolation linéaire entre deux nœuds et l'utilisation de développement de Taylor.

Dans le cinquième et le dernier chapitre, des applications numériques concernant des cas pratiques ont été examinés en détail, avec et sans pertes de charges.

D'après les résultats obtenus, nous avons constaté que les deux méthodes numériques utilisées aboutissent aux mêmes résultats pour des simulations sans pertes de charge, du fait du caractère linéaire des lois de conservation hyperbolique gouvernant l'écoulement. Contrairement au cas de simulation avec pertes de charge, où des écarts relatifs ont été enregistrés entre les deux méthodes, notamment pour le cas de fermeture brusque de l'organe d'obturation, dans ce cas, le schéma aux différences finies de MacCormack ne décrit pas correctement le front d'onde surtout pour des longueurs importantes. Les résultats obtenus confirment l'intérêt et l'importance que revêt la méthode des caractéristiques dans la simulation des écoulements transitoires pour les différents cas examinés.

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à l'étude des écoulements transitoire en charge dans les conduites à caractéristiques uniques, cela nous a permis de bien comprendre le phénomène transitoire du point de vu physique et mathématique. L'une des pistes de recherche que nous pourrions suivre ultérieurement est de considérer des conduites à caractéristiques variables (cas des variations de sections, existence de ramifications et de bifurcations...) vu qu'ils présentent les cas les plus fréquents rencontrés en pratique dans les installations hydrauliques et voir si la méthode des caractéristiques jugée plus efficace, reste toujours valable pour ce genre de problèmes et donne des solutions qui s'approchent de la réalité.

Enfin, on peut dire que l'étude des écoulements transitoires en charge demeure un sujet d'actualité et attirent toujours l'attention des spécialistes concepteurs des installations hydrauliques, c'est pourquoi, nous espérons que ce modeste travail pourrait servir d'une manière ou d'une autre à éclaircir certains aspects.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

Abbott, M.B. « An introduction to the method of characteristics » American Elsevier, New York, 1966

Abdessemed F., Fourar.A. « Etude comparative sur le phénomène de propagation des ondes élastiques dans les conduites en charge », ScienceLib Editions Mersenne : Volume 3 , N ° 110303 ISSN 2111-4706, 2011.

Afshar M.H., Rohani M. « Water Hammer Simulation by Implicit Method of Characteristic » International Journal of Pressure Vessels and piping 85, Ed ELSEVIER, 2008, pp. 851-859

Allievi Lorenzo « General Theory of Perturbed of Water in Conduits » Milan, 1902

Amara L. , Achour B., Berreksi A. « Approche numérique aux volumes finis pour le calcul de la réponse dynamique des cheminées d'équilibre » Larhyss Journal, ISSN 1112-3680, n°14, Juin 2013, pp. 7-19

Anderson A., Arfaie M., Sandoval-Pena R., et Suwan K « pipe friction in waterhammer computation. » Proc., XXIV IAHR Congress, Madrid, Spain, 2, pp. 23 – 30, 1991

Bahrar B., Rieutord E., Morel R. « Influence de la viscoélasticité de la paroi sur les phénomènes classiques de coup de bélier » Revue de la Houille Blanche N ° 1, Paris 1998, pp. 26-32

Beauchemin, « Calcul des coups de bélier : méthodes modernes et approximations rapides à partir d'hypothèses physiquement réalistes », sciences et techniques de l'eau, vol. 26, n°3, Aout 1992

Bergeron, L. « Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité. Méthode graphique générale ». Dunod, Paris, 1949

Boillat, J. L. et DE SOUSA, P. « Hydraulic system ». Communication N°16, Laboratoire de Construction Hydraulique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004

Brunone B, Golia U. M. et Greco M. « some remarks on the momentum equation for fast transients » international meeting on hydraulic transients with column separation, 9th round table, IAHR, Valencia, Spain, pp. 140 – 148, 1991

Camichel Charles, Eydoux Denis, Gariel Maurice « Etude théorique et expérimentale des coups de bélier : essais faits à l'institut électrotechnique de Toulouse et à l'usine hydroélectrique de Soulom ». Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3ème série tome 8, pp. 1-251, 1916

Camichel Charles, Eydoux Denis, Gariel Maurice « Etude théorique et expérimentale des coups de bélier : essais faits à l'institut électrotechnique de Toulouse et à l'usine hydroélectrique de Soulom » Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3ème série tome 9, pp. 1-145, 1917

Carlier, M. « Hydraulique générale et appliquée ». Eyrolles, Paris, 1980

Chaplain « Les méthodes modernes de calcul des tubes thermoplastiques soumis à des contraintes internes ou externes » revus TSM. L'eau. Octobre 1974

Chaudhry, M. H., Bhallamudi, S.M., Martin, C.S. et Naghash, M. « Analysis of Transient Pressures in Bubbly, Homogeneous, Gas-Liquid Mixtures » Journal of Fluids Engineering, ASME, 112, pp. 225–231, 1990

Chaudhry, M. H. et Hussaini, M. Y. « Second-Order Accurate Explicit Finite- Difference Schemes for Water Hammer Analysis » Journal of Fluids Engineering, vol.107/523, December 1985, pp. 523–529.

Chaudhry M.H., Walter S., Elansary A.S. « Numerical and experimental investigation of transient pipe Flow », Journal of hydraulic Research, Vol 32, n° 5, 1994

Chaudhry M.H. « Applied Hydraulic Transients », British Columbia Hydro and Power Authority, Vancouver, Canada 1979, pp. 1-62

Cunge, J.A., & Wegner, M. « Numerical integration of Barre de Saint-Venant's flow equations by means of implicit scheme of finite differences » Houille Blanche, 19(1), pp. 33-39, 1964

De Almeida, B., Koelle, E. « Fluid transients in pipe networks » Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, Glasgow, 1992

Ghidaoui, M. S., Zhao, M., McInnis, D. A. et Axworth, D. H. « A review of Water hammer Theory and Practice ». Transactions of the ASME, Vol. 58, pp. 49 – 76, 2005

Gouri Dhatt, Gilbert Touzout « Une présentation de la méthode des éléments finis » Collection université de Compiègne, 1981

Guinot, V. « Riemann Solvers for Water Hammer Simulations by Godunov Method » International Journal of Numerical Methods in Engineering, 49, pp. 851–870, 2000

Halliwell A.R. « Velocity of a Water Hammer Wave in an Elastic Pipe » Journal of the hydraulics division, pp. 1-21, 1963

Hartree D.R. « Somme Pratical Methods of using characteristics in the calculation of Non-Steady compressible Flow » Los Alamos Rep, LA-HU-I, 1952

Izquierdo, J., et Iglesias, P. L. « Mathematical modelling of hydraulic transients in simple systems » Math. Comput. Modell, 35, pp. 801-812, 2002

Jaeger, C. « Théorie générale du coup de bélier. Application au calcul des conduites à caractéristiques multiples et des chambres d'équilibre » Thèse de Doctorat ès sciences techniques, Ecole Polytechnique Fédérale (ETH) de Zurich, Dunod, Paris, 1933

Joukowsky « Water hammer», Proceedings American Water Works Association, p.341, 1900

Karney, B.W. et Ghidaoui, M. S. « Flexible Discretization Algorithm for Fixed Grid MOC in Pipeline Systems » Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 123(11), pp. 1004-1011, 1997

Kessal M. « Modélisation, en écoulement homogène, des phénomènes de cavitation lors des régimes transitoires en conduite » Thèse de Docteur-Ingénieur en Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1987

Lai, C. « Comprehensive Method of Characteristics Models for Flow Simulation » Journal of Hydraulic Engineering, vol.114, n°9, September 1988

Larock B. E., Jeppson, R. W. et Watters G. Z. « Hydraulics of pipeline systems » CRS Press, 2000

Leveque, Randall, J. « Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems » Cambridge University Press, Cambridge, 2002

McCorquodale, A. et Li, J. « Modeling mixed flow in storm sewers » Journal of Hydraulic Engineering, 125(11), pp. 1170-1180. 1999

Meunier M. « Le coup de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression » Ecole nationale du génie rural des eaux et des forêts, pp. 1-86, Paris 1980

Moodie T.B., Barclay D.W., Tait R.J « Boundary Value Problem for Fluid- Filled Elastic Tubes », Department of Mathematics, the university of Alberta, Edmonton, Canada, 1982

Parmakian J. « Waterhammer Analysis », Dover Publications, New York, 1963

Salah B., Massouh F. « Approche de détermination des erreurs temporelles lors du calcul du régime transitoire dans les réseaux d'eau sous pression » pp. 130-137, 2009

Salah B., Massouh F., Kettab A., Mbangangoye B. « Célérité de l'onde de coup de bélier dans les conduites enterrées » Revue internationale de l'eau la Houille Blanche n°3/4, pp. 13-16, Paris 2001

Stepanoff, A. J. « Pompes centrifuges et pompes hélices. Théorie, tracé et applications » Dunod, Paris 1961

Streeter, V.L., & Wylie, B.E. « Hydraulic Transients » McGraw-Hill Book Company, New York, p 329, 1967

Stroskolanski, A. « Les turbopompes. Théorie, tracé et applications » Eyrolles, Paris, 1977

Toro Eleuterio, F. et Garcia-Navarro, P. « Godunov-type methods for free-surface shallow flows: A review » Journal of Hydraulic Research, Vol. 45, N° 6, pp. 736 – 751, 2007

Trikha A. K. « an efficient method for simulating frequency dependent friction in transient liquid flow » Journal of fluid Engineering, 97 (1), pp. 97 – 105, 1975

Vardy, A.E. « On the use of the method of characteristics for the solution of unsteady flows in networks » proceedings, second international conference on Pressure Surges, Sept 22-24, 1976, British hydromechanics Research association, fluid engineering, Cranfield, England, pp. H2 and 15-30, 1977.

Wiggert, D.C., et Sundquist, M. J. « fixed-grid characteristics for pipeline transients. »
J.hydraul. Div., Am. Soc. Civ. Eng., 103(12), pp. 1403-1416, 1977

Wylie, E. B., Streeter, V. L. et Lisheng Suo « Fluid transients in systems » Prentice Hall,
Englewood Cliffs, New Jersey, 1933

Wylie, E. B. et Streeter, V. L. « Fluid transients ». MacGraw-Hill, 1978

Wylie, E. B. « Unsteady internal flows – dimensionless numbers and time constants. » Proc,
7th Int. Conf. On pressure Surges and Fluids Transients in pipelines and Open channels, BHR
Group, Granfield, U.K., pp. 283-288, 1996

Yen, B.C. « Hydraulic Instabilities of Storm Sewer Flows » Communication présentée à
urban storm drainage: proc. of the inter. Conf. held at the University of Southampton,
London, England, pp. 282-293, 1978

Yevjevich, V.M., Khalid; Miller, William A.Jr. . « Unsteady flow in open channels »
Volumes 1, 2, and 3, 1974. Unsteady Flow in Open Channels, 1975

Young, Il Kim « Advanced Numerical and Experimental Transient Modelling of Water and
Gas Pipeline Flow Incorporating Distributed and Local Effects » Thèse de Doctorat de
Philosophie (PhD), Université d'Adelaïde, Australie, 2008

Zhao, M. et Ghidaoui, M. S. « Godunov-type solutions for water hammer flows » Journal of
Hydraulic Engineering, ASCE, 130(4), pp. 341-348, 2004

Annexes

Annexe -1-

SIMPLIFICATION DES EQUATIONS D'ALLIEVI ET LEUR APPLICATION A QUELQUES CAS PRATIQUES

1.1 Simplification des équations d'Allievi :

Pour faciliter les calculs, il est très commode de donner une autre formulation pour les équations d'Allievi, par conséquent, on cherche à exprimer $f(t+x/a)$ en fonction de $F(t-x/a)$. Pour cela, nous allons d'abord établir les conditions aux limites au point A (figure 1.1).

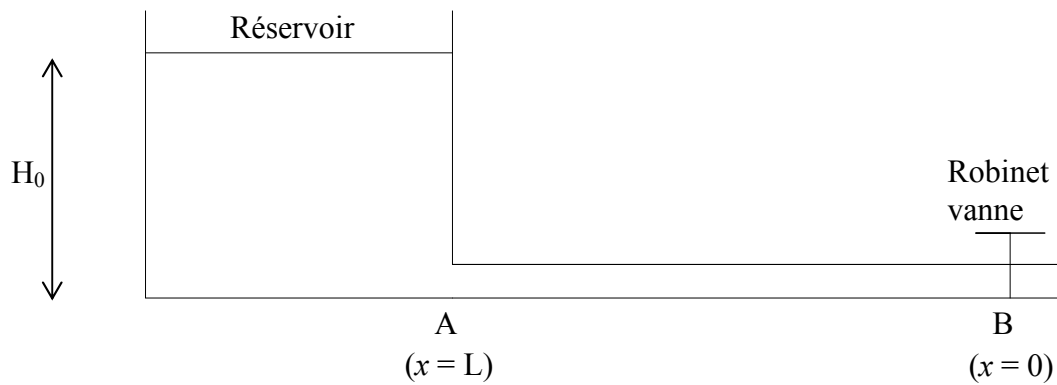


Figure (1.1) : Schéma d'une conduite gravitaire munie d'un réservoir à charge constante.

Les dimensions du réservoir sont suffisamment grandes par rapport à celles de la conduite, c'est pourquoi sa cote du plan d'eau ne peut pas être modifiée par les ondes créées dans la conduite, c.à.d. au point A d'abscisse L , la pression reste constamment égale à la pression statique et la valeur de coup de bélier est nulle ($\Delta b = H - H_0 = 0$), autrement dit :

$$H - H_0 = F\left(t - \frac{L}{a}\right) + f\left(t + \frac{L}{a}\right) = 0 \quad (1.1)$$

Donc :

$$f\left(t + \frac{L}{a}\right) = -F\left(t - \frac{L}{a}\right) \quad (1.2)$$

Donc, au point A, l'onde de retour f est constamment égale et opposée à l'onde incidente F , on peut dire que les ondes se réfléchissent avec changement de signe au point A.

A l'instant ($t=t-L/a$), l'équation (1.1) devient :

$$f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \quad (1.3)$$

Soit ($\theta=2L/a$), θ étant la durée correspondante à un aller et retour de l'onde le long de la conduite.

A l'instant ($t=t+L/a$), l'équation (1.3) devient :

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) = -F\left(t - \frac{2L+x}{a}\right) \quad (1.4)$$

Les équations d'Allievi deviennent :

$$\begin{cases} H - H_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L-x}{a}\right) \\ U = U_0 - \frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(t - \frac{2L-x}{a}\right) \right] \end{cases} \quad (1.5)$$

Donc, la fonction « f » a disparu et le problème se ramène à la détermination du seul fonction « F ».

1.2 Application des équations d'Allievi a quelques cas pratiques:

Nous allons appliquer les résultats obtenus pour les différentes manœuvres suivantes (Carlier, 1980) :

- Fermeture instantanée de la vanne d'obturation (Fermeture brusque) : Ce cas apparaît lorsque le temps de fermeture de l'obturateur placé au bout de la conduite est supposé nul, qui est évidemment un cas hypothétique ;
- Fermeture rapide : Dans ce cas, l'orifice de l'obturateur, au lieu de se fermer instantanément au temps 0, il ne sera totalement fermé qu'au bout d'un certain temps inférieur à $(2L/a)$.
- Fermeture lente : Dans ce cas, la vanne ne sera complètement fermée qu'au bout d'un temps supérieur à $(2L/a)$.

1.2.1 Fermeture brusque de la vanne (T= 0)

A l'instant $t_1 = 0$, la première équation d'Allievi peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta b_1 = H_1 - H_0 = F(t_1) - F_1 \quad (1.6)$$

Etant donné que la deuxième onde $F(t_1 - 2L/a) = F(t_1 - \theta)$ n'existera qu'à partir de l'instant $t_2 = \theta = 2L/a$, à la suite de la réflexion de la première onde $F(t_1)$ sur le réservoir, l'équation (1.6) se réduira alors à :

$$\Delta b_1 = F(t_1) = F_1 \quad (1.7)$$

Par ailleurs, la vanne étant fermée, la vitesse sera constamment nulle ($U = 0$) et la seconde équation d'Allievi s'écrit :

$$0 = U_0 - \frac{g}{a} \left[F(t_1) + F\left(t_1 - \frac{2L}{a}\right) \right] \quad (1.8)$$

Pour la même raison que précédemment, cette dernière équation se réduit à :

$$0 = U_0 - \frac{g}{a} F(t_1) = U_0 - \frac{g}{a} F_1 \quad (1.9)$$

D'où :

$$F_1 = \frac{aU_0}{g} \quad (1.10)$$

Et :

$$\Delta b_1 = \frac{aU_0}{g} \quad (1.11)$$

Et ceci jusqu'au temps $t_2 = \theta$.

A l'instant $(2L/a)$ l'onde réfléchie sur la surface libre du réservoir arrive à la vanne :

$$\Delta b_2 = H_2 - H_0 = F\left(\frac{2L}{a}\right) - F(0) \quad (1.12)$$

$$\Delta b_2 = F(t_2) - F(t_1) \quad (1.13)$$

$$\Delta b_2 = F_2 - F_1 \quad (1.14)$$

Et :

$$0 = U_0 - \frac{g}{a} [F_2 + F_1] \quad (1.15)$$

$$F_2 + F_1 = \frac{aU_0}{g} \quad (1.16)$$

Et comme :

$$F_1 = \frac{aU_0}{g} \quad (1.17)$$

On déduit donc, que $F_2 = 0$.

La dépression engendrée à ce moment à la vanne sera alors :

$$\Delta b_2 = F_2 - F_1 = -\frac{aU_0}{g} \quad (1.18)$$

A l'instant ($t_3 = t_2 + \theta = 2\theta$) on obtient, de la même façon :

$$\Delta b_3 = F_3 - F_2 \quad (1.19)$$

$$0 = U_0 - \frac{g}{a} [F_3 + F_2] \quad (1.20)$$

$$F_3 - F_2 = \frac{aU_0}{g} = F_3 \quad (1.21)$$

Ce qui donne :

$$\Delta b_3 = F_3 = \frac{aU_0}{g} \quad (1.22)$$

Ainsi, le calcul peut être mené avec l'enchaînement suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_0 + F_1 \\ H_2 = H_0 + F_2 - F_1 \\ \dots \\ H_{i-1} = H_0 + F_{i-1} - F_{i-2} \\ H_i = H_0 + F_i - F_{i-1} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = U_0 - \frac{g}{a} F_1 \\ U_2 = U_0 - \frac{g}{a} (F_1 + F_2) \\ \dots \\ U_{i-1} = U_0 - \frac{g}{a} (F_{i-2} + F_{i-1}) \\ U_i = U_0 - \frac{g}{a} (F_{i-1} + F_i) \end{array} \right. \quad (1.24)$$

On remarque par suite que, les résultats se déduisent les uns des autres à partir de la surpression Δb_1 occasionnée à l'instant ($t_1 = 0$). Pour cette raison, cette méthode a reçu le nom des **séries enchaînées d'Allievi**.

Un manomètre enregistreur placé à l'amont de la vanne, permettra dans ce cas de relever un diagramme de pression analogue à celui de la figure (1.2) suivante :

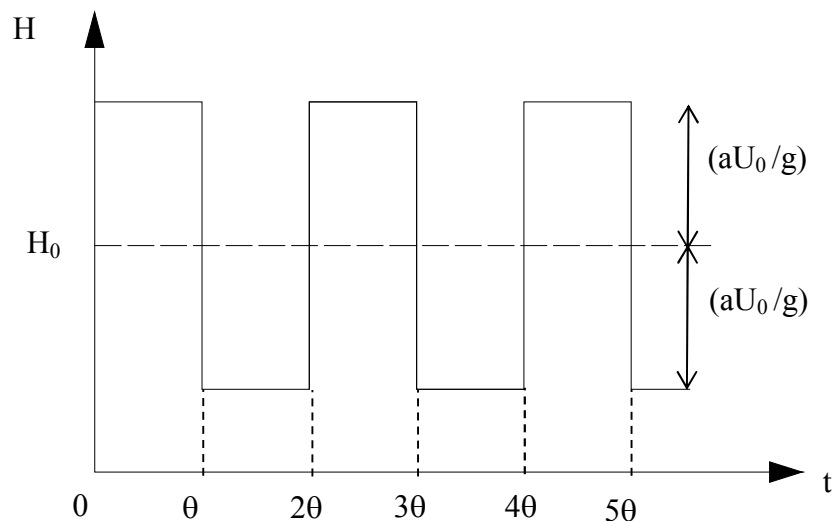


Figure (1.2) : diagramme de pression à la vanne pour une fermeture brusque

Ainsi, le phénomène de surpression qui accompagne une fermeture brusque est un phénomène périodique, dont la période a pour valeur :

$$T = 2\theta = \frac{4L}{a} \quad (1.25)$$

Avec : T est la période d'oscillation de la conduite.

1.2.2 Fermeture rapide ($T < 2L/a$)

Si toutefois la durée de la fermeture (T) n'est pas instantanée mais reste cependant inférieure à $2L/a$, on a encore affaire à une fermeture rapide, on observera à la vanne le même phénomène périodique avec la même surpression maximale ($a.U_0/g$). Le diagramme des pressions à cet endroit par contre, prendra l'allure suivante (Figure 1.3) :

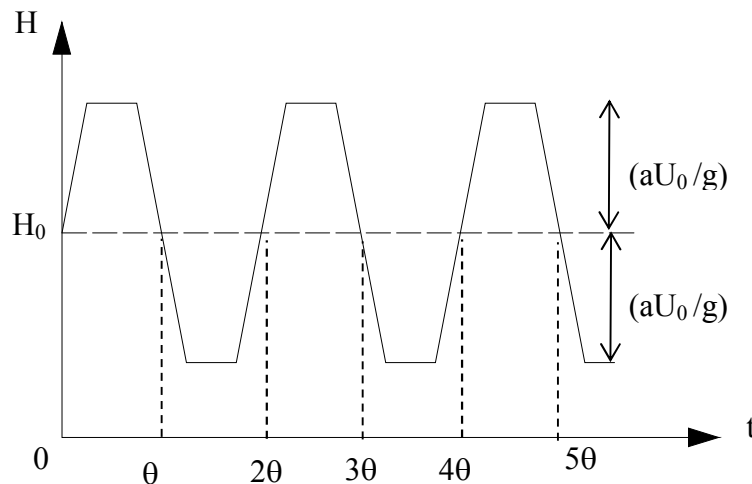


Figure (1.3) : diagramme de pression à la vanne pour une fermeture rapide

La formule trouvée précédemment donnant la valeur de la surpression maximale pour une fermeture rapide, a été trouvée bien avant par Joukowski, d'où le nom qu'elle porte de "formule de Joukowski-Allievi".

1.2.3 Fermeture lente ($T > 2L/a$) :

Pour simplifier le problème du point de vue analytique, on considère que la fermeture de la vanne suit une loi donnant lieu à une variation linéaire du débit en fonction du temps.

Etudiant dans ce cas les variations de la surpression (Δb) et la vitesse (U) à l'extrémité de la conduite au point B, c'est-à-dire pour $x = 0$.

A un instant $t < \theta$, correspondant au début de la fermeture, les équations d'Allievi s'écrivent :

$$\Delta b_1 = H_1 - H_0 = F(t_1) = F_1 \quad (1.26)$$

$$U_1 - U_0 = -\frac{g}{a} F_1 = -\frac{g}{a} \Delta b_1 \quad (1.27)$$

Par hypothèse, nous avons une variation linéaire du débit en fonction du temps, donc :

$$Q_1 = Q_0 \left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \quad (1.28)$$

De ce fait :

$$U_1 = U_0 \left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \quad (1.29)$$

$$U_1 - U_0 = \left(-U_0 \frac{t_1}{T}\right) = -\frac{g}{a} \Delta b_1 \quad (1.30)$$

D'où :

$$\Delta b_1 = \frac{a U_0 t_1}{g T} \quad (1.31)$$

Autrement dit, la surpression croît linéairement avec la fermeture de l'obturateur et enregistre sa valeur maximale lorsque le temps (t_1) atteint sa limite maximale correspondant à $\theta = 2L/a$, qui est la demi période d'oscillation. Cette surpression aura alors pour valeur maximale :

$$\Delta b_{\max} = \frac{a U_0}{g T} \frac{2L}{a} \quad (1.32)$$

Pour étudier le phénomène à partir du temps $t_1 = \theta$, considérons l'instant ($t_2 = t_1 + \theta = t_1 + 2L/a$), avec $t_1 \leq 2L/a$.

Les équations d'Allievi donnent pour $x = 0$:

$$\begin{cases} \Delta b_2 = H_2 - H_0 = F(t_2) - F(t_1) = F_2 - F_1 \\ U_2 - U_0 = -\frac{g}{a}[F(t_2) + F(t_1)] = -\frac{g}{a}[F_2 + F_1] \end{cases} \quad (1.33)$$

Et comme nous avons, par hypothèse :

$$U_2 = U_0 \left(1 - \frac{t_2}{T}\right) \quad (1.34)$$

$$U_2 - U_0 = \left(-U_0 \frac{t_2}{T}\right) = -\frac{g}{a}[F_2 + F_1] \quad (1.35)$$

D'où :

$$F_2 + F_1 = \frac{aU_0}{g} \frac{t_2}{T} \quad (1.37)$$

$$F_2 - F_1 = \Delta b_2 \quad (1.38)$$

Avec :

$$F_1 = \Delta b_1 = \frac{aU_0}{g} \frac{t_1}{T} \quad (1.39)$$

En éliminant F_1 et F_2 entre ces trois équations, il vient alors :

$$\Delta b_2 = \frac{aU_0}{gT} \left(\frac{2L}{a} - t_1\right) \quad (1.40)$$

Or :

$$0 < t_1 \leq \frac{2L}{a} \quad (1.41)$$

Donc :

$$0 < \frac{2L}{a} - t_1 \leq \frac{2L}{a} \quad (1.42)$$

$$0 < \Delta b_2 \leq \frac{aU_0}{gT} \frac{2L}{a} \quad (1.43)$$

D'où :

$$\Delta b_2 \leq \frac{2U_0L}{gT} \quad (1.44)$$

Ainsi, pendant la seconde période s'écoulant du temps θ au temps 2θ après le début de la fermeture de la vanne, la surpression maximale est alors donnée par :

$$\Delta b_{2\max} = \Delta b_{1\max} = \frac{2U_0L}{gT} \quad (1.45)$$

On montrerait facilement qu'il en est de même pour les intervalles de temps (de 2θ à 3θ , de 3θ à 4θ , etc..). La formule (1.45) qui donne la surpression maximale, dite de Michaud, est la seule utilisée pratiquement dans le cas des fermetures lentes, $T > 2L/a$.