

Higher National School of Hydraulic

The Library

Digital Repository of ENSH



المدرسة الوطنية العليا للري

المكتبة

المستودع الرقمي للمدرسة العليا للري



The title (العنوان):

Modélisation numérique de la recharge d'une nappe libre.

The paper document Shelf mark (الشفرة) : 1-0001-08

APA Citation (APA توثيق):

Benaouadj, Abderraouf (2008). Modélisation numérique de la recharge d'une nappe libre[Mem Ing, ENSH].

The digital repository of the Higher National School for Hydraulics "Digital Repository of ENSH" is a platform for valuing the scientific production of the school's teachers and researchers.

Digital Repository of ENSH aims to limit scientific production, whether published or unpublished (theses, pedagogical publications, periodical articles, books...) and broadcasting it online.

Digital Repository of ENSH is built on the open software platform and is managed by the Library of the National Higher School for Hydraulics.

المستودع الرقمي للمدرسة الوطنية العليا للري هو منصة خاصة بتقييم الإنتاج العلمي لأساتذة و باحثي المدرسة.

يهدف المستودع الرقمي للمدرسة إلى حصر الإنتاج العلمي سواء كان منشورا أو غير منشور (أطروحات، مطبوعات، مقالات، دوريات، كتب....) و بثه على الخط.

المستودع الرقمي للمدرسة مبني على المنصة المفتوحة و يتم إدارته من طرف مديرية المكتبة للمدرسة العليا للري.

كل الحقوق محفوظة للمدرسة الوطنية العليا للري.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE L'HYDRAULIQUE
-ARBAOUI Abdellah-

Département spécialités

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ETAT EN HYDRAULIQUE.

Spécialité : Conception des systèmes d'alimentation en eau potable

THEME :

**MODELISATION NUMERIQUE DE
LA RECHARGE DES NAPPES LIBRES**

Présenté par :

**M^r BENAOUADJ
ABDERRAOUF**

Promoteur :

M^r A. HACHEMI

Devant le jury composé de :

President: M^r A. AMMARI

**Examineurs: M^r Y. DERNOUNI
M^{me} L. CHENINI**

Juillet 2008

« Une quête commence toujours par la chance du débutant et s'achève toujours par l'épreuve du conquérant »

Paolo Coello, l'Alchimiste



Remerciements



Nous remercions ALLAH de nous avoir donné le courage d'accomplir ce travail.

Au terme de ce modeste travail, je tiens à remercier mon promoteur monsieur HACHEMI ABDELKADER pour son aide appréciable, sa disponibilité, et ses conseils fructueux qui m'ont facilité la réalisation de ce travail.

Mon respect s'adresse aux membres de jury « M^{er} A.AMMARI, M^{er} Y.DERNOUNI, M^{me} L. CHENINI » qui me feront l'honneur de juger ce travail.

Je remercie également tous le corps enseignant de L' ENSH, qui m'ont encadré durant toutes les années d'études.

Je remercie encore tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'élaboration de ce modeste travail.

raouf



Dédicace



Je rends un grand hommage à travers ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance envers:

- ❖ *Ma mère qui a beaucoup sacrifiée pour moi et pour l'affection qui ma toujours portée.*
- ❖ *Mon père qui m'a tout donné pour que j'atteigne mon but dans son sens spirituel.*
- ❖ *A mes chers frères et à ma sœur.*
- ❖ *A toute ma famille.*
- ❖ *A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour l'élaboration de ce travail.*
- ❖ *A mon meilleur amis et mon amis d'enfance: Hichem Bouazzeri.*
- ❖ *A mon très cher amis Walid Bourouina.*
- ❖ *A mes amis : Abdennour Bensaadoune, Hichem Aouaidjia, issam et tout mes amis de boufarik.*
- ❖ *A mes meilleurs amis de l'Ecole: Islem, Mouh Benaissa, Hassen, badreddine, lakhdar et à toute ma famille de l'E.N.S.H.*
- ❖ *Toute personne qui a contribué de près ou de loin à ma réussit.*
- ❖ *Tous ceux que j'aime.*



ملخص:

بهدف معرفة اثر إعادة الشحن علي الخزانات الجوفية الحرة و ملاحظة تطور السطح الحر أثناء تغذية هذه الخزانات وكذلك إظهار حقل السرعة في معلم ثنائي الأبعاد قمنا بتطوير برنامج حساب عددي يعتمد علي طريقة العناصر المنتهية. هذا البرنامج يسمح بحل معادلة ريشاردز التي تمثل النموذج الرياضي للجريان في وسط مسامي. هذه المعادلة تاخذ بعين الاعتبار كل من المنطقة المشبعة و المنطقة غير المشبعة و نتحصل عليها بإدماج معادلة الاستمرارية مع قانون دارسي. وضعية المستوى الحر محددة داخل العنصر المنتهي بواسطة التحويلات النقطية و بين القيم العقدية.

في النهاية قمنا باختبار فعالية هذا البرنامج عن طريق أمثلة تطبيقية.

Résumé:

Dans le but de connaître l'effet de la recharge sur les nappes libres et d'observer l'évolution de la surface libre lors de l'alimentation de ces nappes et aussi de visualiser en 2D le champ des vecteurs vitesse, on a développé un programme numérique basé sur la méthode des éléments finis. Ce programme permet de résoudre l'équation de Richards qui représente le modèle mathématique d'écoulement en milieu poreux. Cette équation tiens compte à la fois de la zone saturée et la zone non saturée et elle est obtenue en combinant l'équation de continuité et la loi de Darcy. La position de la surface libre est déterminée à l'intérieur de l'élément fini par interpolation linéaire entre les valeurs nodales.

A la fin on a testé l'efficacité du programme développé par des exemples d'application.

Abstract:

In order to know the effect of groundwater recharge on free aquifers and observe the evolution of the water table in the course of groundwater recharge and also view the field vectors speed in two dimensions, we developed a numerical program based finite element method. This program can solve the equation of Richards which represents the mathematical model flow in porous media. This equation would account both the saturated zone and the unsaturated zone and it is obtained by combining the equation of continuity and Darcy's law.

The position of the water table and drainage network are determined within the finite element by linear interpolation between the nodal values.

At the end we tested the effectiveness of the programme developed by examples of application.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
----------------------------	---

CHAPITRE I : L'EAU ET LE MILIEU SOUTERRAIN

Introduction.....	3
I.1. Eau souterraine et origine.....	3
I.2. Usage de l'eau souterraine.....	3
I.3. particularités des eaux souterraines par rapport aux eaux superficielles.....	4
I.3.1. disponibilité.....	4
I.3.2. Qualité.....	4
I.3.3. Dynamique.....	5
I.3.4. Echelles d'espace et de temps.....	5
I.4. le milieu souterrain et l'eau.....	5
I.4.1. définitions.....	5
I.4.1.1. Le système aquifère.....	5
I.4.1.2. l'Aquifère.....	6
I.4.1.3. Nappe d'eau souterraine.....	6
I.4.2. classification des nappes aquifères.....	6
I.4.2.1. Classification selon des critères piézométriques.....	6
a)- Les nappes libres.....	6
b)- les nappes captives.....	7
c)- les nappes semi captives.....	8
I.4.2.2. Classification selon des critères lithologiques.....	8
a)-Nappes de porosité de pores.....	8
b)-Nappes de fissures.....	8
c)-Nappes de manteau d'altération.....	8
I.4.2.3. Classification liée au contexte géologique et géomorphologique.....	9
a)- Les nappes perchées.....	9
b)- Les nappes alluviales.....	9
I.4.3. Les relations entre nappes.....	9
I.5. Caractéristique physique du milieu perméable.....	10
a)- continuité ou discontinuité.....	10
b)- isotropie ou anisotropie.....	10
c)- homogénéité ou hétérogénéité.....	10
I.6. Caractéristiques des fluides.....	11
I.6.1. La viscosité.....	11
I.6.2. La masse volumique, la compressibilité et l'équation d'état.....	13
I.7. Caractéristiques hydrodynamique ou hydraulique des aquifères.....	14
I.7.1. porosité totale.....	14
I.7.2. porosité efficace.....	15
I.7.3. porosité de drainage.....	16
I.7.4. La perméabilité hydraulique.....	16
I.7.5. La conductivité hydraulique.....	16

I.7.5.1.définition.....	16
I.7.5.2. coefficient de perméabilité équivalent en terrain stratifié.....	17
I.7.6.La transmissivité.....	18
I.7.7.Coefficient d'emmagasinement.....	19
I.7.8.Le coefficient de production spécifique.....	21
I.7.9.la teneur en eau volumique.....	21
I.7.10. Charge hydraulique.....	21
I.7.11.gradient hydraulique.....	22
I.7.12.Relation teneur en eau /potentiel de pression et conductivité / potentiel de pression.....	23
I.7.12.1.Relation teneur en eau /potentiel de pression.....	23
I.7.12.2.Relation conductivité / potentiel de pression.....	24
I.7.13.coéefficient d'infiltration.....	24
I.8. Types d'écoulement	24
I.8.1. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent.....	24
I.8.2. Ecoulement uniforme	24
I.8.3. Ecoulement permanent et écoulement transitoire.....	24
I.9.Zonalité sol/eau.....	25
I.9.1.la zone non saturée.....	25
I.9.2. la zone saturée.....	25
conclusion.....	25

CHAPITRE II : LA RECHARGE DES NAPPES

Introduction.....	26
II.1.définition de la recharge des nappes d'eau souterraines.....	26
II.2.types de recharge.....	26
II.2.1.recharge naturelle des nappes d'eau souterraines.....	26
II.2.1.1.La recharge directe.....	26
II.2.1.2. La recharge indirecte.....	28
II.2.1.3. La drainance.....	28
II.2.1.4. Alimentations diverses.....	29
II.2.2.La recharge artificielle des aquifères.....	29
II.2.2.1.définition.....	29
II.2.2.2. Objectifs de la recharge artificielles des nappes.....	29
II.2.2.3. inconvénients de la recharge artificielle des nappes.....	31
II.2.2.4. facteurs de la recharge.....	31
II.2.2.4.1. facteurs hydrologiques.....	31
II.2.2.4.2. facteurs Topographiques.....	32
II.2.2.4.3. facteurs Pédologiques.....	32
II.2.2.4.4. facteurs Géologiques et Hydrogéologiques.....	32
II.2.2.5.moyens de recharge artificielles des nappes.....	33
II.2.2.5.1. Recharge directe depuis la surface.....	33
II.2.2.5.2. Recharge directe de subsurface	34
II.2.2.6.le choix des différents moyens utilisé pour la recharge artificielle des nappes.....	34
II.2.2.6. 1.Recharge directe depuis la surface.....	34
II.2.2.6.2.Recharge directe de subsurface.....	34
II.2.2.7.description de quelques méthodes de recharge artificielle.....	35
II.2.2.7.1. recharge par injection directe dans les forages ou les puits pour atteindre la nappe..	35

II.2.2.7.2. Recharge depuis la surface par infiltration des eaux à travers les filtres naturelle du sol.....	35
II.2.2.7.3.recharge depuis la surface en utilisation des eaux usées pour la réalimentation.....	35
II.2.2.7.4. Recharge depuis la surface par l'aménagement des cours d'eau.....	36
II.3.Méthodes d'estimation de la recharge des nappes.....	37
II.3.1.Méthode du bilan hydrologique.....	37
II.3.2.Techniques géochimiques.....	39
II.3.2.1.Technique des isotopes radioactifs.....	39
II.3.2.2.L'estimation de la recharge en utilisant le bilan de masse du Cl.....	39
II.3.2.3.Technique des isotopes stables.....	40
II.3.2.4.Comparaison entre les trois méthodes géochimiques.....	40
II.3.3.Méthode hydrodynamique.....	40
II.3.4.L'estimation de la recharge par des modèles numériques.....	40
Conclusion.....	41

CHAPITRE III:DESCRIPTION MATHEMATIQUE DES EQUATIONS DE L'ECOULEMENT SOUTERRAIN

Introduction.....	42
III.1.Loi de comportement.....	42
III.1.1.description expérimentale de loi de comportement.....	43
III.1.2.description mathématique de loi de Darcy.....	44
III.2.Le Principe de continuité.....	45
III.2.1.première forme de loi de continuité.....	46
III.2.2.deuxième forme de loi de continuité.....	47
III.3. modèles d'écoulement.....	47
III.3.1. modèle d'écoulement en milieu saturé.....	47
III.3.1.1. modèle d'écoulement en Aquifère captive.....	47
III.3.1.2. Equation d'écoulement en Aquifère phréatique.....	48
III.3.2.Modèle d'écoulement en milieu variablement saturé.....	52
III.4.Solutions analytiques de l'équation d'écoulement	54
III.4.1.Solution de Dupuit-Forchheimer	54
III.4.2. Solutions de l'équation de Boussinesq	55
III.5. Les conditions aux limites.....	57
III.5.1. Dirichlet.....	58
III.5.2. Limites aux débits prescrits.....	59
III.5.3. Limite mixte: Cauchy-Euler.....	59
III.5.4. Les conditions initiales.....	60
Conclusion.....	60

CHAPITRE IV:MODELISATION NUMERIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Introduction.....	61
IV.1.Les différentes étapes pour modéliser numériquement un système complexe.....	61
IV.2.Passage d'un problème continu au problème discret.....	61
IV.2.1.Les différences finis.....	61
IV.2.2.Les volumes finis.....	62
IV.2.3.Les éléments finis.....	62
IV.2.3.1.définition.....	62

IV.2.3.2.Principe générale de la méthode des éléments finis.....	62
IV.2.3.3. Formulation intégrale.....	63
IV.2.3.4. Formulation par éléments finis: Méthode de Galerkin.....	64
IV.2.3.5.Approximation par éléments finis.....	66
IV.2.3.5.1. Approximation nodale.....	67
IV.2.3.5.2.Dérivées de la fonction d'interpolation.....	67
IV.2.3.5.3.Approximation par éléments finis.....	68
IV.2.3.5.4.Approximation sur un élément de référence.....	68
IV.2.3.5.5.Expression de la fonction approchée.....	69
IV.2.3.5.6.Propriétés de la fonction approchée.....	70
IV.2.3.5.6.1.Propriétés fondamentales de l'approximation nodale.....	70
IV.2.3.5.6.2.Continuité sur l'élément.....	71
IV.2.3.5.6.3.Notion de continuité inter élémentaire.....	71
IV.2.3.5.7.Transformation des opérateurs de dérivation.....	71
IV.2.3.5.7.1.Transformation des dérivées.....	72
IV.2.3.5.8.Transformation des intégrales.....	72
IV.2.3.6.Discrétisation des formes intégrales.....	73
IV.2.3.7.Technique d'assemblage.....	76
IV.2.3.8.Discrétisation temporelle.....	77
IV.2.3.9.Méthodes numériques en éléments finis.....	79
IV.2.3.9.1.intégration numérique.....	79
IV.2.3.9.2.Résolution du système algébrique.....	79
Conclusion.....	80

CHAPITRE V : PROGRAMMATION EFFECTUEE

Introduction.....	81
V.1.les blocs fonctionnelles caractéristiques du programme.....	81
V.2.structure du programme développé.....	83
V.2.1.Etape de prétraitement.....	83
V.2.1.1. Module « mailleur ».....	83
V.2.1.2.Structure du programme « mailleur ».....	85
V.2.1.3.Tracé du maillage.....	86
V.2.2.Etape de traitement.....	87
V.2.2.1.Module « Ensat ».....	88
V.2.2.2.Les Conditions aux limites	91
a)-Limites à potentiel imposé.....	91
b)-Limites à flux imposé	91
c)-Surface libre	92
V.2.2.2.1.Traitement numérique de la surface de suintement.....	92
V.2.2.2.2.Test de convergence.....	92
V.2.2.2.3.Traitement numérique des conditions du forage	93
V.2.2.2.4.Traitement numérique des conditions de recharge	93
V.2.3.étape de post-traitement.....	96
Conclusion.....	98

CHAPITRE VI : APPLICATION DU PROGRAMME ET DISCUSSION DES RESULTATS OBTENUS

Introduction.....	99
--------------------------	-----------

VI.1. premier cas: effet du temps.....	99
VI.1.1.présentation de la nappe et conditions aux limites.....	99
VI.1.2. Données du problème.....	99
VI.1.3.Maillage de la structure	100
VI.1.4.caractéristique du maillage.....	100
VI.1.5.conditions aux limites sur les nœuds.....	101
VI.1.6.Resultats obtenus.....	101
VI.1.7.Observations et discussions.....	102
VI.1.7.1.surface libre.....	102
VI.1.7.2. champ des vecteurs vitesse.....	102
VI.2. deuxième cas:influence de coefficient d'emmagasinement.....	103
VI.2.1.Resultats obtenus.....	103
VI.2.2.Observations et discussions	105
VI.2.2.1.surface libre.....	105
VI.2.2.2.champ des vecteurs vitesses.....	105
VI.3. troisième cas:influence de coefficient de perméabilité.....	105
VI.3.1.Resultats obtenus.....	105
VI.3.2.Observations et discussions	106
VI.4. quatrième cas:influence de taux de rechargement.....	106
VI.4.1. Données du problème.....	107
VI.4.2. Résultats obtenus.....	107
VI.4.3. Observations et discussions	108
VI.5. cinquième cas: forage d'injection (recharge ponctuelle).....	108
VI.5.1.présentation de la nappe et conditions aux limites.....	108
VI.5.2. Données du problème.....	108
VI.5.3. Résultats obtenus.....	109
VI.5.4. Observations et discussions.....	110
VI.5.4.1.surface libre.....	110
VI.5.4.2.champ des vitesses.....	110
VI.6. sixième cas:recharge et pompage en parallèle avec un taux de recharge important par rapport au débit de pompage.....	111
VI.6.1.première variante.....	111
VI.6.1.1.présentation de la nappe et conditions aux limites.....	111
VI.6.1.2. Données du problème.....	111
VI.6.2.deuxième variante.....	112
VI.6.3. Résultats obtenus.....	112
VI.6.4. Observations et discussions.....	112
VI.7. septième cas:recharge et pompage en parallèle avec un débit de pompage important par rapport au taux de recharge.....	113
VI.7.1. Résultats obtenus.....	113
VI.7.2. Observations et discussions.....	114
Conclusion.....	115
 CONCLUSION GENERALE.....	 116

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU I-1 : Valeurs des porosités moyennes pour les principaux réservoirs	16
TABLEAU I-2 : Valeurs de coefficient de perméabilité	17

LSTE DES FIGURES

FIGURE I-1 : principaux usages de l'eau souterrains.....	4
FIGURE I-2 : Schéma de l'aquifère a nappe libre.mesure du niveau piézométrique.....	7
FIGURE I-3: Schéma de l'aquifère a nappe captive. Mesure du niveau piézométrique.....	7
FIGURE I-4 : isotropie (1) et anisotropie (2,3,4).homogénéité (2 et 3) et hétérogénéité (4).....	11
FIGURE I-5 : Montage conceptuel pour la définition opérationnelle de la viscosité.....	12
FIGURE I-6 : Schéma des trois états d'un échantillon de sous-sol montrent les types d'eau souterraine présents dans les vides du réservoir.....	15
FIGURE I-7 : calcul du coefficient de perméabilité équivalent en terrain stratifié.....	18
FIGURE I-8 : Conductivité/Transmissivité d'un aquifère.....	19
FIGURE I-9 : Libération de l'eau gravitaire.....	20
FIGURE I-10 : calcul du gradient hydraulique sur le terrain.....	22
FIGURE I-11 : calcul du gradient hydraulique par la carte piézométrique.....	23
FIGURE II-1 : Rôle des pluies efficaces dans la distribution au sol et dans le sol.....	27
FIGURE II-2 : Drainance et aquifère bicouche.....	28
FIGURE II-3 : différents méthodes de recharge artificielle des nappes.....	34
FIGURE II-4 : quelques méthodes de recharge artificielle des nappes.....	36
FIGURE II-5 : Recharge depuis la surface par l'aménagement des cours d'eau.....	37
FIGURE II-6 : bilan hydrologique.....	38
FIGURE III-1 : expérience de Darcy.....	43
FIGURE III-2 : Volume de contrôle infinitésimal.....	46
FIGURE III-3 : Mécanisme d'emmagasinement dans un aquifère phréatique.....	49
FIGURE III-4 : Erreur de la théorie de Dupuit en présence de surface de suintement.....	51
FIGURE III-5 : Erreur de la théorie de Dupuit près d'une frontière imperméable verticale.....	51
FIGURE III-6 : Profil piézométrique d'une nappe libre située entre deux cours d'eau et alimentée par l'infiltration verticale des précipitations.....	55
FIGURE III-7 : Représentation Schématique d'un domaine et de ces frontières.....	58
FIGURE III-8 : Exemple de conditions aux limites.Vue en plan d'un aquifère.....	60
FIGURE IV-1 : élément de référence et transformation géométrique en élément réel.....	68
FIGURE IV-2 : divers types d'éléments.....	74
FIGURE IV-3 : Différentes étapes de résolution de l'équation différentielle avec la méthode des éléments finis.....	78
FIGURE IV-4 : Méthodes numériques utilisées dans la méthode des éléments finis.....	79
FIGURE V-1 : blocs fonctionnelles caractéristiques d'un programme d'éléments finis.....	82
FIGURE V-2 : Bloc de type quadrilatéral à huit nœuds.....	83
FIGURE V-3 : Elément quadratique Isoparamétrique.....	84
FIGURE V-4 : Organigramme du « mailleur ».....	86
FIGURE V-5 : Organigramme du module Dessin.....	87
FIGURE V-6 :Elément quadrilatéral isoparamétrique à quatre nœuds	88
FIGURE V-7 : Matrice bande de rigidité formée à l'aide du Sous programme formkv.....	90
FIGURE V-8 : schémas représentant la limite à flux imposé.....	92
FIGURE V-9 : exemple de traitement numérique des condition de recharge.....	94
FIGURE V-10 : Position de la surface libre dans un élément fini.....	94
FIGURE V-11 : Position d'une ligne d'équipression dans un élément fini.....	95
FIGURE V-12 : Organigramme du module Ensat en régime permanent.....	97
FIGURE V-13 : Organigramme du programme magister.bat.....	98
FIGURE VI -1 : structure étudiée et conditions aux limites. Premier cas.....	99
FIGURE VI -2 : Maillage automatique de la structure.....	100

FIGURE VI -3 : Surface libre lors de la recharge dans le temps et dans l'espace.....	101
FIGURE VI -4 : le champ des vecteurs vitesse obtenu pour le premier cas après un temps de 4 e6s.....	102
FIGURE VI -5 : l'évolution de la surface libre dans l'espace selon différents coefficients d'emmagasinement après un temps de 4 e6s.....	103
FIGURE VI -6 : relèvement du niveau piézométrique dans l'espace après un temps de 4 e6s avec $S = 0.25$	104
FIGURE VI -7 : champ des vitesses obtenu pour le deuxième cas après 4 e6 s avec $S=0.25$	104
FIGURE VI -8 : l'évolution de la surface libre dans l'espace selon différents coefficients de perméabilité après un temps de 4 e6s.....	106
FIGURE VI -9 : L'évolution de la surface piézométrique en fonction des taux de recharge..	107
FIGURE VI -10 : structure étudiée et conditions aux limites. Cinquième cas.....	108
FIGURE VI -11 : évolution de la surface libre dans l'espace après un temps de 4 e6 s en cas d'alimentation par un forage d'injection avec deux débits différents.....	109
FIGURE VI -12 : champ des vitesses obtenu pour le cinquième cas avec un débit d'alimentation de $5 \text{ e-}5 \text{ m}^2/\text{s}$	110
FIGURE VI -13 : Structure étudiée et conditions aux limites. Sixième cas variante de recharge et pompage en parallèle.....	111
FIGURE VI -14 : l'évolution de la surface libre dans l'espace. Recharge seulement et recharge et pompage en parallèle avec un taux de recharge important par rapport au débit de pompage.....	112
FIGURE VI -15 : l'évolution de la surface libre dans l'espace. Recharge seulement et recharge et pompage en parallèle avec un débit de pompage important par rapport au taux de recharge.....	114

Introduction générale:

Au cours des trente dernières années, les techniques de modélisation mathématique ont été intensément utilisées en hydrogéologie dans les études de gestion, d'exploitation et de remédiation des nappes aquifères, d'intrusion d'eaux salées, de détermination des zones de protection autour de puits de captage et autres problèmes liés aux eaux souterraines.

Les méthodes analytiques ont fourni des solutions précises du problème exprimé explicitement à l'aide de fonctions mathématiques connues.

Les chercheurs se sont cependant vite rendus compte que la résolution analytique des problèmes hydrogéologiques complexes était limitée par des hypothèses bien souvent trop simplificatrices. Un grand nombre d'entre eux se sont donc naturellement tournés vers les méthodes numériques.

Ces méthodes, bien que demandant des efforts de calculs parfois plus importants, fournissent des outils puissants d'analyse et de simulation, qui permettent de résoudre des problèmes d'écoulement souterrain et de transport de contaminant dans des systèmes bi- ou tri- dimensionnels, fortement hétérogènes et à géométrie complexe.

Les méthodes numériques ne donnent pas la solution véritable du problème que l'on cherche à résoudre. Des méthodes numériques mal employées peuvent conduire à des résultats totalement faux, allant à l'encontre de la réalité physique.

Il est indispensable pour l'ingénieur de posséder des notions de base sur les méthodes numériques, afin de pouvoir éviter les pièges et remédier aux problèmes les plus courants qui se posent lors de l'utilisation de modèles standards dans le cadre d'études.

Les outils de modélisation numérique ne simulent le comportement d'un système physique qu'avec l'utilisation de l'ordinateur. Ce domaine, issu de l'évolution informatique, est assez jeune. La méthode des éléments finis est un outil efficace utilisé en simulation numérique des problèmes. La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou noeuds du maillage.

Notre objectif dans cette étude est de développer un programme numérique basé sur la méthode des éléments finis afin de résoudre le modèle mathématique pour déterminer la position de la surface libre et visualiser le champ des vecteurs vitesse dans une nappe libre au cours de la recharge et en tenant compte des débits pompés.

Dans notre étude le modèle mathématique représentant le problème physique est le modèle « saturé - non saturé » fondé sur l'équation de Richards qui tiens compte a la fois de la zone saturée et la zone non saturée, elle est obtenue en combinant la loi de Darcy et l'équation de continuité.

Ce travail comporte six chapitres:

Le premier chapitre, consacré à la description du milieu souterrain et ses propriétés, ses caractéristiques et sa relation avec l'eau qu'il contient ainsi que les principes de l'écoulement dans les milieux poreux.

Le deuxième chapitre s'occupe du phénomène de recharge des nappes: la recharge naturelle et artificielle, les conditions de recharge et les moyens utilisés pour la recharge des nappes, les méthodes employées pour la quantification de la recharge des nappes.

Le troisième chapitre représente une description mathématique des équations qui régissent l'écoulement dans un milieu poreux en zone saturée et non saturée. La grande partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de l'équation de Richards qui sera utilisée dans notre étude.

Le quatrième chapitre, consacré à la présentation de la méthode des éléments finis ainsi que son application aux écoulements en milieux poreux en régime permanent et en régime transitoire et cela en introduisant les conditions aux limites.

Le cinquième chapitre, consacré à la programmation effectuée, il comporte les organigrammes et les algorithmes des programmes développés. En plus il décrit les méthodes utilisées pour déterminer la position de la surface libre à l'intérieur de l'élément finis.

La validation des programmes développés, fait l'objet du sixième chapitre, dans ce chapitre des applications concrets ont été traitées à l'aide de ce programme.



CHAPITRE I :

L'eau

et

le milieu souterrain



Introduction:

Ce chapitre traite une grande partie de la physique de l'écoulement, c'est l'écoulement souterrain, dans la zone saturée et la zone non saturée du sol.

Pour étudier la recharge naturelle d'un bassin aquifère, il importe dès le départ de définir les notions nécessaires à la compréhension des phénomènes physiques impliqués. Toutes ces notions sont introduites dans ce chapitre.

I.1.origine des eaux souterrains: [6]

Les eaux souterraines dont l'origine est liée au cycle de l'eau s'appellent des eaux vadoses. On les différencie des eaux juvéniles, eaux d'origine profondes provenant du refroidissement du magma granitique. L'importance de ces dernières est négligeable face aux eaux vadoses. Les eaux fossiles sont des eaux datant d'une période plus humide du quaternaire, par exemple dans le Sahara. On appelle eaux connées des eaux salées datant de l'époque de formation des sédiments. Les eaux géothermales sont généralement des eaux vadoses se réchauffant en profondeur.

I.2.Usage de l'eau souterraine [A]:

Comme les eaux de surface, les usages des eaux souterraines ne se limitent pas à l'aspect « ressource », défini comme les usages liés aux eaux potables, aux eaux industrielles et à la propriété qu'ont certaines nappes de renforcer les cours d'eau pendant les périodes sèches (soutien d'étiage).

Par rapport aux eaux de surface, les eaux souterraines présentent une plus grande inertie, c'est-à-dire qu'elles sont en général moins affectées par des variations saisonnières et qu'elles dissipent plus lentement les perturbations (hydrauliques, chimiques, thermiques). C'est ainsi que les nappes sont couramment sollicitées pour la géothermie et les techniques d'héliogéothermie qui consistent à réchauffer en été de l'eau pompée dans une nappe peu profonde et à réinjecter les eaux chaudes en un autre point. En hiver, le système fonctionne dans l'autre sens, alimentant chauffage et eau chaude sanitaire. On a ici utilisé le fait que la bulle d'eau chaude se dissipe très lentement et conserve ses propriétés pendant plusieurs mois (inertie thermique de la nappe).

L'eau est aussi un véhicule de matières dissoutes ou en suspension, elles peuvent contribuer à disperser et à dissiper des pollutions présentes dans le sous-sol.

L'eau souterraine est enfin une nuisance potentielle dans tout ce qui concerne les travaux souterrains. La figure I.1 montre les principaux usages de l'eau souterraine.

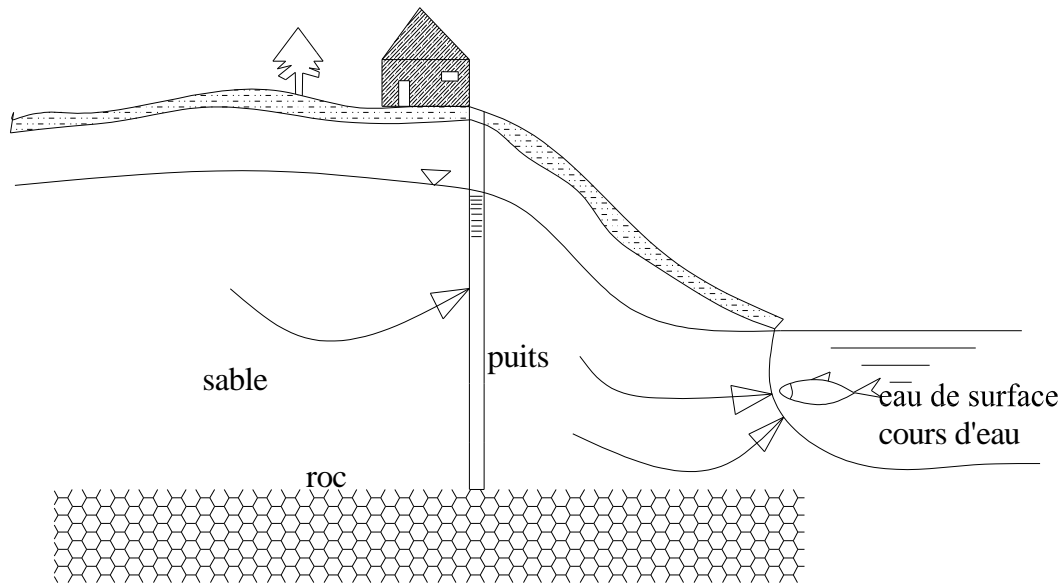


Figure I.1: principaux usages de l'eau souterrains. [A]

I.3. Particularités des eaux souterraines par rapport aux eaux superficielles [A]:

Les eaux souterraines présentent de nombreuses particularités au regard des eaux de surface. Nous les déclinons ici en quatre catégories :

I.3.1: disponibilité:

À partir d'une certaine profondeur, les eaux souterraines ne sont pas tributaires de la pluviométrie locale. Le bilan des grands aquifères est souvent imposé par des zones d'infiltration situées loin de la zone où les eaux seront pompées, exploitées.

C'est ainsi que dans les zones arides, sous les déserts, se trouvent d'importants réservoirs d'eau qui peuvent être aménagés et sollicités pour couvrir les besoins que les eaux de surface ne peuvent satisfaire. De plus, les nappes souterraines ont des régimes beaucoup moins contrastés que les eaux de surface. A l'aplomb d'un secteur soumis à de grands contrastes de pluviométrie, les eaux souterraines seront à peu près également disponibles au cours des périodes sèches et des périodes humides.

I.3.2. Qualité :

Les eaux souterraines sont en contact permanent avec des roches (le milieu qu'elles traversent). Elles sont donc plus ou moins tamponnées du point de vue chimique du fait des équilibres réactionnels qui s'instaurent entre les phases solides et le fluide. Ces qualités évoluent peu. Les eaux souterraines sont fréquemment minéralisées. Cette particularité est également un atout en cas de déversement de polluant dans une nappe. Certains polluants (par exemple les métaux lourds) ont la propriété de se fixer sur certains minéraux présents dans le solide (adsorption sur les argiles par exemple). La matière organique présente dans le milieu aura également une

certaine capacité de complexation d'éléments métalliques ou de polluants organiques. Ceci est un atout pour favoriser l'épuration naturelle des nappes.

I.3.3.Dynamique :

La dynamique des écoulements à surface libre (eaux de surface) est essentiellement conditionnée par les phénomènes gravitaires. Dans l'écoulement des eaux souterraines, l'importance des surfaces de contact entre l'eau et le solide rend prépondérants les phénomènes de viscosité. Les eaux souterraines sont aussi soumises à des champs physiques contrastés : pression, température. D'une manière générale, les phénomènes impliqués dans la dynamique des écoulements souterrains sont plus diversifiés.

I.3.4.Echelles d'espace et de temps :

Les échelles impliquées dans les évolutions des eaux souterraines possèdent parfois des dimensions très différentes de celles propres aux eaux de surface. Du fait de la lenteur des écoulements, le transit des eaux dans une nappe souterraine peut requérir des durées de plusieurs années, siècles ou même millénaires. Par ailleurs, il est parfois difficile de raisonner localement dans la gestion d'une nappe souterraine, la modification locale du régime ou du bilan des eaux pouvant résulter en des problèmes en un autre lieu. Par exemple, on peut tarir un marais alimenté par des eaux de débordement aval d'une nappe en pompant de manière excessive un peu plus en amont. La gestion à très court terme d'une nappe souterraine possédant ces caractéristiques peut devenir très problématique, car les effets peuvent être très éloignés des causes dans le temps. Il y a donc là un problème général de durabilité et d'équité.

I.4.le milieu souterrain et l'eau:

I.4.1.definitions:

I.4.1.1.Le système aquifère: [11]

Le système aquifère est à la ressource en eau souterraine ce que le bassin versant est à la ressource en eau de surface : c'est l'espace du sous-sol contenant une ressource identifiable, et gérable, en tant que telle.

La tendance naturelle de l'eau est de s'écouler toujours vers un "niveau de base" qui est celui de la mer. Elle peut être momentanément ralentie, piégée et peut s'accumuler dans des formations géologiques lui offrant cette place : c'est le système aquifère.

Un système aquifère est donc l'ensemble d'un réservoir naturel souterrain et de l'eau qu'il contient, ou qui le traverse.

Plusieurs définitions ont été données du "système aquifère". Toutes expriment les notions d'espace géologique et d'indépendance hydraulique.

Si le système aquifère est une unité physique, géométriquement identifiable, l'eau qu'il contient ne fait en général que le traverser : elle vient d'un amont et va vers un aval. Tant qu'elle reste dans le sous-sol elle est dite "souterraine" et l'on a affaire à un système aquifère.

I.4.1.2. l'Aquifère:

L'eau souterraine exploitée par les hydrogéologues est contenue et se déplace selon les gradients d'élévation et de pression dans les formations géologiques poreuses et perméables (à des degrés divers). L'ensemble formation-eau souterraine est appelé aquifère. D'après le dictionnaire de Castany-Margat, on appelle aquifère un corps de roche perméable comportant une zone saturée - ensemble du milieu solide et de l'eau contenue - suffisamment conductrice d'eau souterraine pour permettre l'écoulement significatif d'une nappe souterraine et le captage de quantités d'eau appréciables.

I.4.1.3. Nappe d'eau souterraine:

La nappe d'eau souterraine est constituée par l'ensemble des eaux comprises dans la zone saturée d'un aquifère dont toutes les parties sont en continuité hydraulique. Le mouvement de l'eau est fonction des gradients d'élévation et de pression.

I.4.2. classification des nappes aquifères: [B]

La classification des nappes aquifères peut se faire selon différents critères :

- des critères piézométriques (niveau d'eau) ;
- des critères lithologiques ;
- des critères liés au contexte géologique et géomorphologique.

I.4.2.1. Classification selon des critères piézométriques:

On peut classer les aquifères selon critères piézométriques comme suit:

- a) Les nappes libres;
- b) Les nappes captives;
- c) Les nappes nappe semi-captive.

a)-Les nappes libres:

Dans une nappe libre, la surface piézométrique peut, en fonction des conditions climatiques et de la recharge de la nappe par les précipitations, fluctuer " librement " dans la formation aquifère considérée car celle-ci s'étend au-dessus de la surface piézométrique (voir figure I.2).

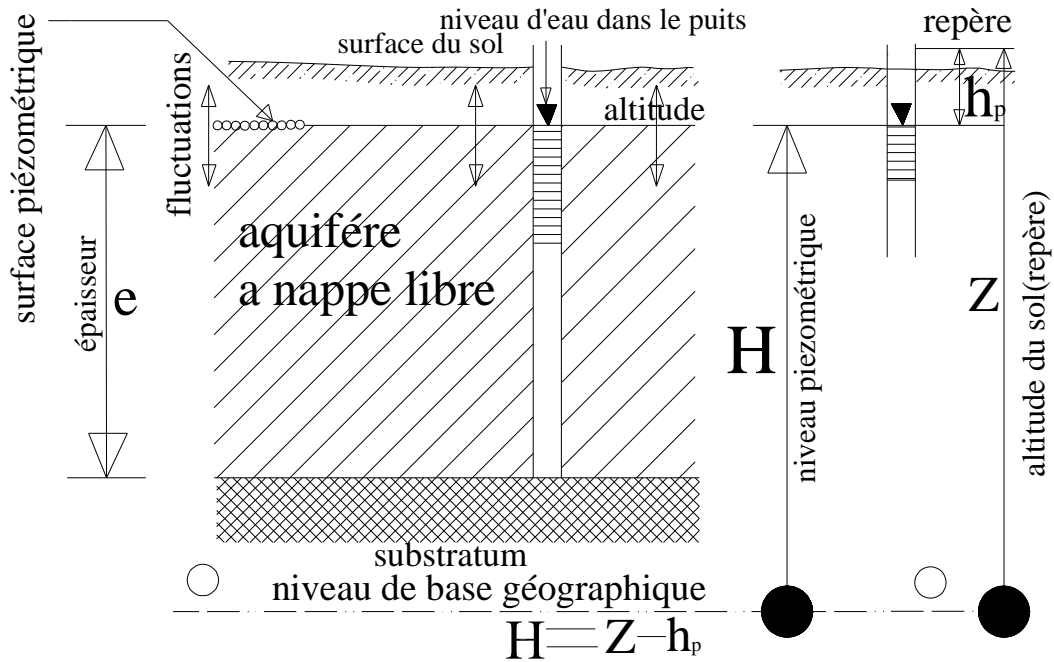


Figure I.2. Schéma de l'aquifère à nappe libre. mesure du niveau piézométrique. [9]

b)-les nappes captives:

Dans une nappe captive, la formation aquifère est surmontée d'une couche imperméable. Son niveau piézométrique s'équilibre systématiquement au-dessus du toit de la formation aquifère.

Parfois, le niveau piézométrique est supérieur à la cote altimétrique du sol créant, si une connexion est établie (notamment par forage), un phénomène d'artésianisme. (Voir figure I.3).

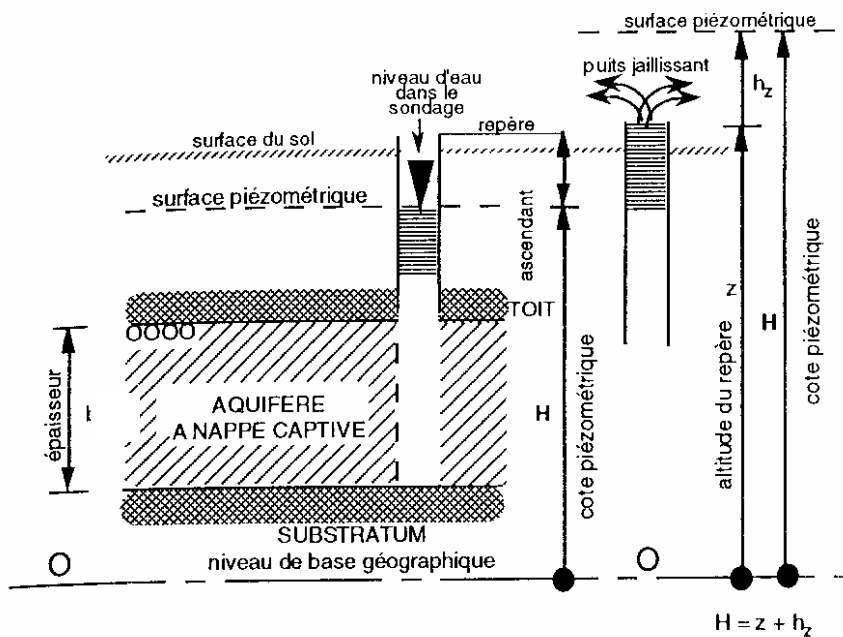


Figure I.3. Schéma de l'aquifère à nappe captive. Mesure du niveau piézométrique. [9]

c)-les nappes semi-captives:

Le terme de nappe semi-captive est utilisé lorsque l'aquifère est surmonté d'une couche de plus faible perméabilité ou semi-perméable.

I.4.2.2. Classification selon des critères lithologiques:

Outre la nature de la formation géologique (sable, grès, calcaire, ...), la cohérence de la roche permet de distinguer, les nappes suivantes :

- a) Nappes de porosité de pores ;
- b) Nappes de fissures ;
- c) Nappes de manteau d'altération.

a)-Nappes de porosité de pores :

Elles se trouvent dans les roches meubles (constituées de sables, de graviers, de galets,...). La nappe des sables bruxelliens et la nappe des graviers d'origine alluviale de la Meuse en sont deux exemples.

b)-Nappes de fissures:

Dans les formations cohérentes, les nappes sont localisées dans les zones perméables et poreuses qui n'existent que si les roches sont fissurées et altérées. Par exemple, la fissuration puis l'altération des grès en sables entraînent la formation de nappes de fissures au sein des formations gréseuses. Les fissures sont généralement liées à la présence de phénomènes tectoniques (failles ou plis).

Les nappes des formations calcaires, du fait de la dissolution des carbonates provoquant l'apparition de phénomènes karstiques, constituent des aquifères à grand potentiel d'exploitation. Les nappes de ces aquifères sont soumises à de hauts risques de contamination en présence de connexions directes entre la nappe et la surface et au sein même de l'aquifère. Les eaux sont dès lors peu filtrés, ce qui nuit à leur qualité.

La productivité d'un puits foré dans les aquifères de fissures peut être très variable suivant la densité de fissures recoupées. La présence d'une forte fissuration peut-être détectée par différentes méthodes : observations géomorphologiques, prospections géophysiques, ...etc.

c)-Nappes de manteau d'altération:

Elles sont observées dans les formations cohérentes présentant une forte fissuration et altération. Elles sont souvent localisées sur les crêtes topographiques et présentent des capacités de production moyennes. Les nappes des grès famenniens du

Condroz sont des exemples de nappes de manteau d'altération. En effet, outre la présence de plis ayant engendré une bonne fracturation des grès, ces derniers sont altérés en sables ce qui augmente la porosité et la perméabilité de ces formations.

I.4.2.3. Classification liée au contexte géologique et géomorphologique:

On distingue:

- a) Les nappes perchées;
- b) Les nappes alluviales.

a)- Les nappes perchées:

Les nappes perchées sont généralement de faible extension et situées très au-dessus des nappes régionales profondes dont elles sont isolées par des formations imperméables. Ce sont des nappes de faible capacité présentant de fortes variations saisonnières du niveau piézométrique.

b)- Les nappes alluviales:

Les nappes alluviales sont localisées dans des aquifères situés dans le fond des vallées. Ils sont constitués de sédiments déposés par les rivières. Ces nappes ont des perméabilités et des porosités très variables en fonction de la granulométrie des alluvions; plus la granulométrie est grossière (sables, graviers, galets, ...) et bien classée, plus l'aquifère présente une bonne capacité d'exploitation. La différence de cote piézométrique entre le niveau de la rivière et celle de la nappe aquifère détermine les échanges de flux : la rivière est drainante lorsque son niveau est inférieur à celui de la nappe et infiltrante dans le cas contraire.

Le caractère drainant ou infiltrant d'une rivière peut varier selon les conditions saisonnières.

I.4.3. Les relations entre nappes [11]:

Des nappes qui communiquent entre elles forment des systèmes aquifères et la combinaison naturelle de plusieurs nappes contenues dans des terrains de propriétés diverses, va jouer un rôle modérateur et régulateur des écoulements.

A plus grande échelle, le drainage successif de plusieurs nappes par le réseau hydrographique d'un grand bassin constitue aussi un phénomène compensateur par addition de nappes karstiques à tarissement rapide et de nappes à effet de réserve différée par exemple. Chacune joue alors son rôle le moment venu en fonction de ses capacités.

De plus, la taille des bassins organisés en grappes de sous bassin est aussi responsable de la plus ou moins grande pérennité des écoulements. Ce sont donc les

petites nappes de faible capacité de stockage, vites vidées parce que très perméables et situées en tête des bassins qui vont mal supporter la sécheresse.

Dans notre travail, on s'intéresse uniquement à la nappe libre.

I.5. Caractéristique physique du milieu perméable [9]:

Le milieu perméable présente trois couple de caractéristiques physiques:

- a) continuité ou discontinuité;
- b) isotropie ou anisotropie;
- c) homogénéité ou hétérogénéité.

a)-continuité ou discontinuité:

Le milieu perméable, comportant des vides interconnectés dans le sens de l'écoulement, est dit continu. Les roches meubles, pourvues de pores et les roches compactes, découpées par un réseau de microfissures, constituent des milieux continus. Par contre les roches compactes à macro fissures est karstiques sont des milieux discontinus.

b)-isotropie ou anisotropie:

Un milieu est dit isotrope lorsque ses caractéristiques physiques (granulométrie en particulier) sont constantes dans les trois directions de l'espace. Dans le cas contraire, il est anisotrope.

c)-homogénéité ou hétérogénéité:

Un milieu est homogène lorsqu'il présente, en tous points dans le sens de l'écoulement, des caractéristiques physiques constantes. Dans le cas contraire, le milieu est hétérogène. Un milieu homogène peut être isotrope ou anisotrope. En revanche un milieu hétérogène est toujours anisotrope. (Voir figure I.4).

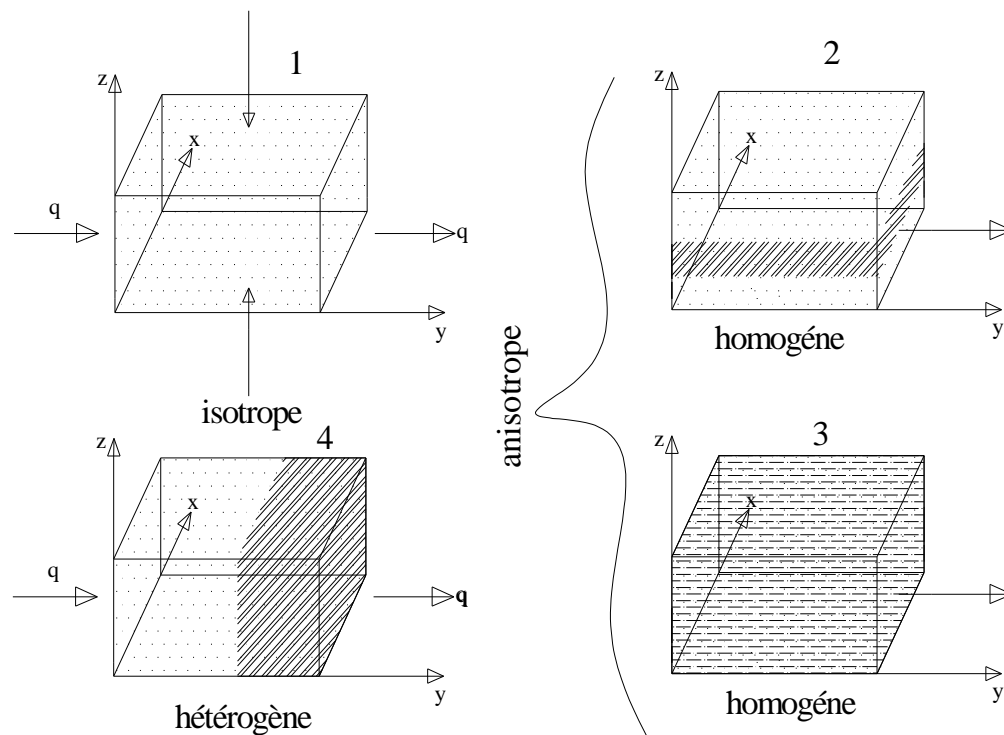


Figure I.4. isotropie (1) et anisotropie (2,3,4). homogénéité (2 et 3) et hétérogénéité (4). [9]

I.6. Caractéristiques des fluides [22]:

Pour bien comprendre les principes de l'écoulement dans les milieux poreux, nous devons commencer par une description des propriétés des fluides. L'introduction de ces concepts nous permettra de présenter la notion de charge hydraulique, qui est la définition du potentiel utilisée en hydraulique souterraine. Aussi, en introduisant les concepts de compressibilité, nous obtenons un des éléments contrôlant la capacité d'emmagasinement des aquifères.

I.6.1. La viscosité:

La viscosité est la résistance d'un fluide au mouvement, sous la contrainte en cisaillement exercée par son écoulement. La figure I.5 montre une couche de fluide d'épaisseur d , se trouvant entre une plaque inférieure immobile et une plaque supérieure qui peut se déplacer à une vitesse V . Une fois en mouvement, la plaque supérieure exerce une contrainte en cisaillement, qui est une force F par unité de surface A , à la surface du fluide. Un gradient vertical de vitesse se développe dans le fluide. En effet, la vitesse est nulle à la base, au contact avec la plaque inférieure immobile, tandis que sa surface se déplace à la vitesse v de la plaque supérieure. Une fois le régime permanent atteint, on suppose que la vitesse varie linéairement de la base à la surface avec un gradient α :

$$\alpha = \frac{v}{d} \quad (\text{I.1})$$

Si on répète l'expérience quelques fois avec différentes forces F exercées sur la plaque supérieure, on peut exprimer graphiquement la relation entre la contrainte en cisaillement et le gradient de vitesse. Une relation linéaire distingue les fluides dits newtoniens des fluides non newtoniens. Pour les fluides newtoniens, la contrainte est directement proportionnelle au gradient de vitesse et la constante de proportionnalité μ est définie comme étant la viscosité dynamique du fluide.

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{v}{d} \quad (\text{I.2})$$

Nous pouvons exprimer de façon équivalente la dernière relation par la loi de Newton de la viscosité. Il est à noter que la viscosité varie en fonction de la température.

$$\tau = \mu \frac{\delta v}{\delta y} \quad (\text{I.3})$$

La viscosité cinématique ν est définie comme le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique ρ du fluide.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{I.4})$$

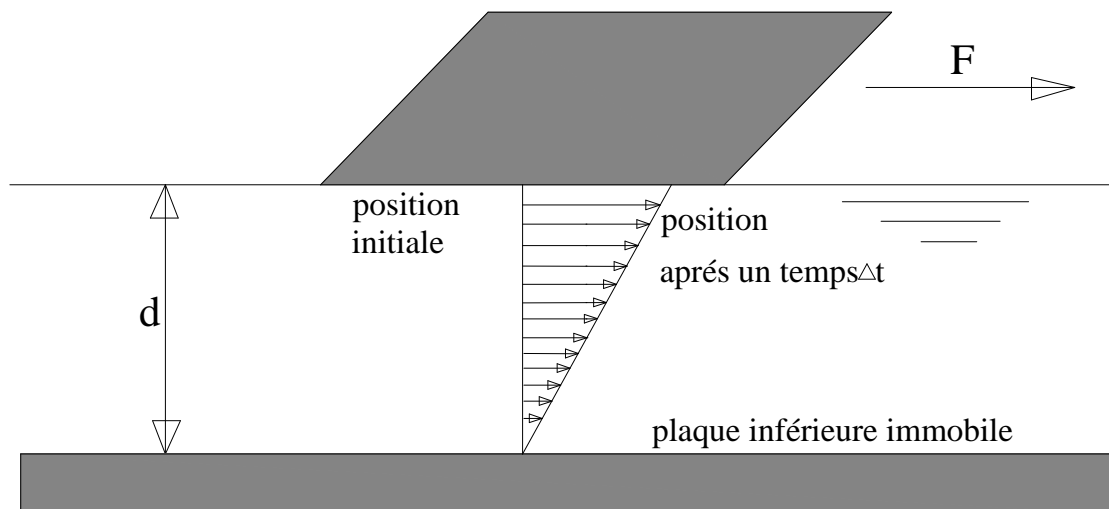


Figure. I.5. Montage conceptuel pour la définition opérationnelle de la viscosité [22].

I.6.2. La masse volumique, la compressibilité et l'équation d'état :

La masse volumique ρ d'un matériau est sa masse m par unité de volume V . Cependant, les fluides n'ont généralement pas une masse volumique constante. Celle-ci varie avec la pression, la compressibilité et la température.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (\text{I.5})$$

Nous pouvons aussi représenter la quantité de matière contenue dans un système par le poids volumique γ qui est défini, de façon similaire à la masse volumique, comme le poids par unité de volume.

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{V} \quad (\text{I.6})$$

La compressibilité d'un liquide est la mesure du taux de changement de volume par rapport au changement de pression. Dans le cas d'un fluide, la contrainte exercée est représentée par la pression p à laquelle le fluide est soumis. Une augmentation de la pression, dp , résulte en une diminution de volume, $-dV$, de sorte que la compressibilité, β , est définie par :

$$\beta = \frac{-dV/V}{dp} \quad (\text{I.7})$$

Le module d'élasticité E est l'inverse de la compressibilité :

$$E = \frac{1}{\beta} = -\frac{dp}{dV/V} \quad (\text{I.8})$$

Nous pouvons aussi lier la compressibilité au changement de masse volumique du matériel de la manière suivante :

$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot V = \text{Cte} \\ \Rightarrow d(\rho \cdot V) &= V \cdot d\rho + \rho \cdot dV \\ \Rightarrow \frac{dV}{V} &= \frac{-d\rho}{\rho} \end{aligned}$$

Ce qui nous permettons d'écrire :

$$\beta = \frac{d\rho / \rho}{dp} \quad (\text{I.9})$$

En intégrant entre les limites, soit de la pression p_0 et la masse volumique ρ_0 initiales à la pression p et la masse volumique ρ finales, on obtient une équation d'état générale applicable aux fluides compressibles :

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)} \quad (\text{I.10})$$

En hydrogéologie, les conditions de référence sont la pression atmosphérique et la masse volumique de l'eau à la température de l'aquifère. La pression p est ainsi généralement mesurée relativement à la pression atmosphérique p_{atm}

$$p = p_{\text{abs}} - p_{\text{atm}} \quad (\text{I.11})$$

Si on utilise cette mesure de pression relative p par rapport à la pression atmosphérique, l'équation d'état de l'eau s'exprime:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta \cdot p} \quad (\text{I.12})$$

Dans le cas d'un fluide peu compressible ou de faibles variations de pression, l'équation d'état peut être remplacée par le premier terme de son expansion en série :

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(p - p_0)] \quad (\text{I.13})$$

La compressibilité des fluides est parfois négligée lors de la dérivation de certaines solutions décrivant l'écoulement en milieux poreux. Dans le cas de fluides supposés non compressibles ($\beta = 0$), la masse volumique est en fait supposée constante quelle que soit la pression du fluide :

$$\rho = \rho_0 \quad (\text{I.14})$$

I.7. Caractéristiques hydrodynamique ou hydraulique des aquifères :

Les aquifères sont caractérisés par les paramètres hydrodynamiques suivants:

I.7.1. porosité totale : [7]

La porosité totale est le rapport des volumes des vides ou des pores avec le volume total de l'échantillon (voir figure I.6), elle est donnée en %..

$$n = \frac{V_v}{V_t} \quad (\text{I.15})$$

Un sol à l'état naturel se compose de grains de différentes dimensions. Les fines se logent donc dans les interstices laissés entre les éléments de forte granulométrie ce qui permet une diminution de la porosité. Cette dernière dépend donc uniquement de l'arrangement des grains indépendamment de leurs dimensions.

Pour mesurer cette porosité, il faut mesurer le volume des vides, ce qui revient à estimer le volume d'eau pour un aquifère.

On distingue 2 deux catégories d'eau :

- L'eau gravitaire : mobilisable par gravité, elle circule dans les aquifères et alimente les captages et sources ;
- L'eau de rétention ou eau capillaire : non mobilisable, sauf par étuvage, elle est retenue sur la surface des grains, le volume d'eau de rétention est noté par V_r (voir figure I.6).

Toutefois, un réservoir n'est jamais dépourvu de son eau de rétention. En hydrogéologie, on préfère donc parler de porosité efficace que de porosité totale plus théorique.

I.7.2.porosité efficace : [7]

La porosité efficace est le rapport du volume d'eau gravitaire au volume total de la roche saturée en eau:

Porosité efficace, n_e (%) = volume eau gravitaire/ volume total.

$$n_e = \frac{V_e}{V_t} \quad (\text{I.16})$$

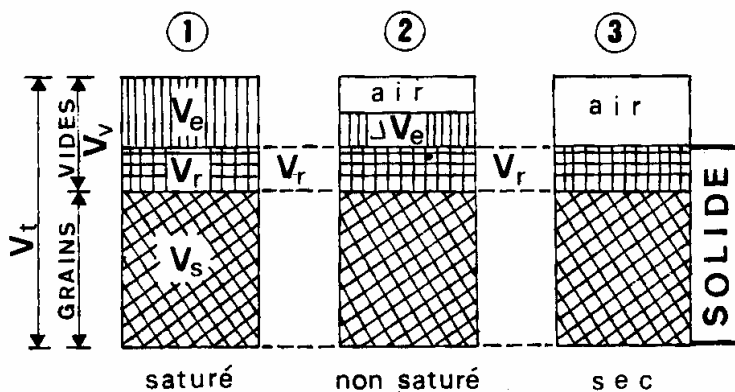


Figure I.6. Schéma des trois états d'un échantillon de sous-sol montrent les types d'eau souterraine présents dans les vides du réservoir. [9]

V_s : C'est le volume de la phase solide.

Un terrain drainé donne une porosité efficace (eau gravitaire).

L'eau de rétention donne la porosité résiduelle (eau capillaire).

La somme de ces deux porosités donne la porosité totale.

Le Tableau (I.1) montre des valeurs des porosités moyennes pour les principaux réservoirs.

Tableau I.1. Valeurs des porosités moyennes pour les principaux réservoirs. [9]

Sols	Porosité totale en %	Porosité efficace en %	Sols	Porosité totale en %	Porosité efficace en %
Vases		0,1 %	gravier + sable		15 à 25 %
Limons	36 %	2 %	gravier fin		20 %
Argile	45 %	3 %	gravier moyen	45 %	25 %
sable gros + limons	32 %	5 %	gravier gros		30 %
sable très fin	35 %	5 %	grès fissuré	16 %	2 à 15 %
sable fin	35 %	10 %	craie		2 à 5 %
sable moyen	35 %	15 %	calcaire fissuré	4,8 %	2 à 10 %
sable gros	35 %	20 %	granite fissuré	1,2 %	0,1 à 2 %
Alluvions		8 à 10 %			

I.7.3.porosité de drainage: [22]

La porosité de drainage donnée en (n_d) appelée aussi porosité d'aération ou porosité utile est la partie de la porosité rendue accessible à l'air par le rabattement d'une nappe. Elle es donnée en % .

I.7.4. La perméabilité hydraulique: [22]

La perméabilité hydraulique indique le degré de facilité que possède un milieu poreux à laisser écouler l'eau à travers ses interstices.

I.7.5.La conductivité hydraulique:

I.7.5.1.définition:

La conductivité hydraulique est le coefficient de perméabilité de Darcy ou tout simplement coefficient de perméabilité. On peut le définir comme étant le débit obtenu à travers un matériel par unité de surface lorsque l'eau est soumise à un gradient hydraulique unitaire (voir figure I.8). Ce coefficient dépend des propriétés du milieu poreux et aussi des propriétés du fluide, soit sa masse volumique et sa viscosité, et il a la même unité que celle de la vitesse.

$$K = \left(\frac{\rho \cdot g}{\mu} \right) k \tag{I.17}$$

Où K est la conductivité hydraulique et k est la perméabilité. [22]

Le tableau I.2 montre les valeurs de coefficient de perméabilité selon le type de la formation aquifère. [9]

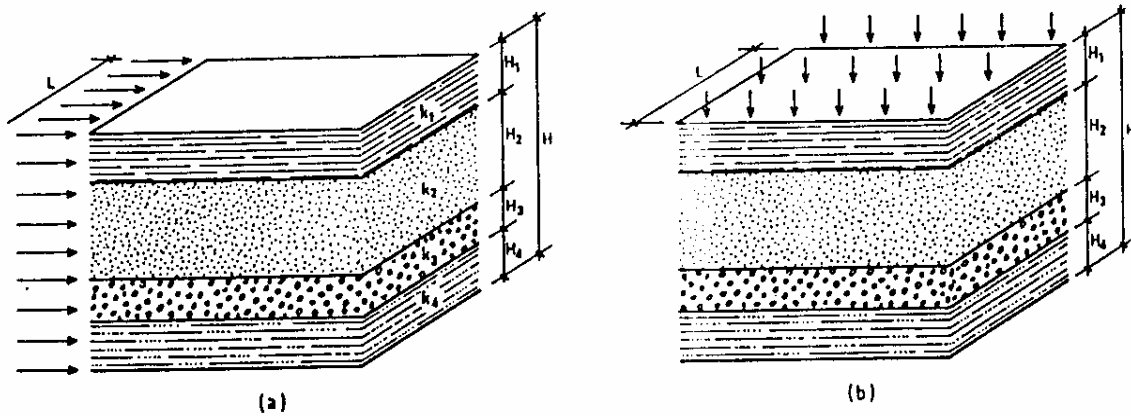
Tableau I.2. Valeurs de coefficient de perméabilité. [9]

K en m/s	10	1	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	10 ⁻⁸	10 ⁻⁹	10 ⁻¹⁰	10 ⁻¹¹
Granulométrie homogène	gravier pur			sable pur		sable très fin			limons		argile		
Granulométrie variée	gravier gros et moy		gravier et sable			sable et limons argileux							
degrés de perméabilité	TRES BONNE - BONNE					MAUVAISE						NULLE	
type de formation	PERMEABLE					SEMI-PERMEABLE						IMPER-MEABLE	

L'utilisation des coefficients de perméabilité, du tableau I.2 sont valables pour caractériser les aquifères d'eau jusqu'à une profondeur d'un millier de mètres. Au-delà, il faut tenir compte de l'augmentation de température et de pression.

I.7.5.2. coefficient de perméabilité équivalent en terrain stratifié: [7]

La figure suivante montre la configuration des sols stratifiés pour le calcul de coefficient de perméabilité équivalent.



(a): $K_{eq} = \frac{1}{H} \sum_1^n K_i H_i$

(b): $\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{H} \sum_1^n \frac{H_i}{K_i}$

Figure I.7. calcul du coefficient de perméabilité équivalent en terrain stratifié. [7]

I.7.6. La transmissivité: [22]

La transmissivité des aquifères représente, similairement à la conductivité hydraulique, la capacité d'un aquifère à permettre l'écoulement horizontal de l'eau sur toute son épaisseur (figure I.8).

Dans le cas d'un aquifère supposé homogène et possédant une valeur unique de conductivité hydraulique, la transmissivité sera uniquement le produit de la conductivité hydraulique par l'épaisseur saturée de l'aquifère. Sa dimension de base est le m²/s.

$$T(m^2/s) = K(m/s).e(m) \tag{I.18}$$

Pour traiter des situations où l'écoulement n'est pas nécessairement horizontal et l'aquifère n'est pas homogène et isotrope, il faut définir la conductivité hydraulique équivalente dans la direction d'écoulement.

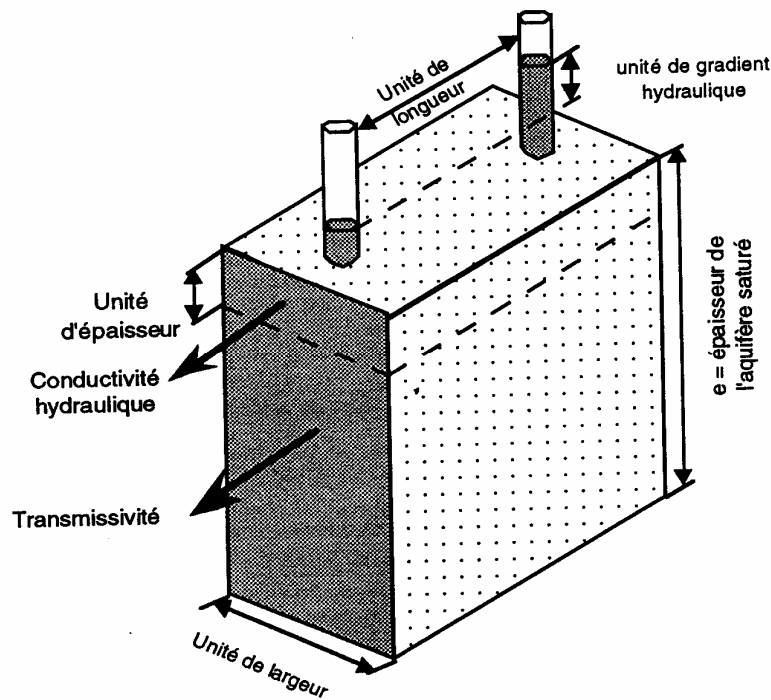


Figure I.8. Conductivité/Transmissivité d'un aquifère. [7]

I.7.7. Coefficient d'emmagasinement [7]:

Une caractéristique hydraulique importante d'un aquifère est la connaissance du volume d'eau libéré ou emmagasiné par unité de surface à la variation de charge correspondante: C'est le coefficient d'emmagasinement : S .

Physiquement, on le définit (figure I.9) comme la quantité d'eau libérée (eau gravitaire) d'un prisme vertical de 1 m^2 de base et de la hauteur de l'aquifère sous une variation unitaire de la charge hydraulique ($\Delta h = 2 - 1 = 1$).

S s'exprime en %.

S se mesure par des pompages d'essai.

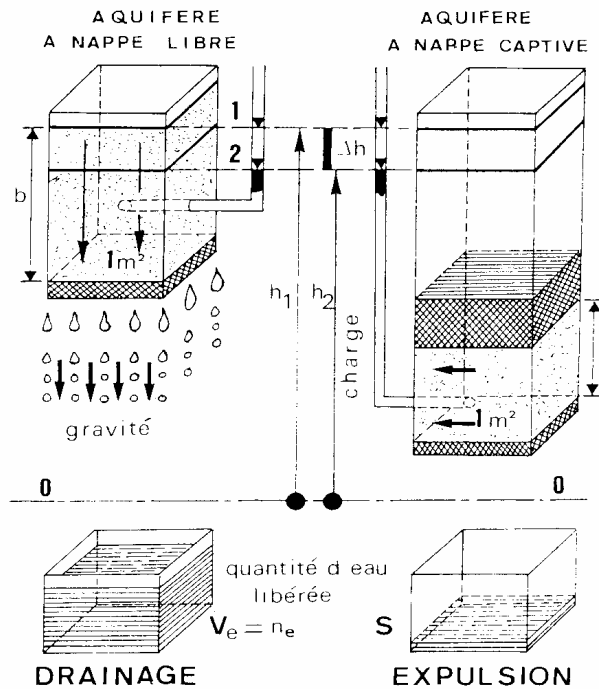


Figure.I.9. Libération de l'eau gravitaire. [7]

Dans un aquifère libre, l'eau est libérée par l'action des forces de gravité (drainage). Le coefficient d'emmagasinement S est égale, en pratique, à la porosité efficace (la porosité résiduelle concerne l'eau de rétention). Les valeurs usuelles vont de 1% pour certains limons et jusqu'à 30- 40% pour les alluvions grossiers bien lavés.

Dans un aquifère captif ou semi-captif, l'expulsion de l'eau est le résultat de la compression de l'aquifère et de la baisse du niveau statique lors du pompage provoquant une baisse de pression, une détente élastique et une déformation du solide libérant l'eau (actions d'élasticité de l'eau et du solide). Les modules d'élasticité étant faibles, le volume d'eau libéré est beaucoup plus petit, à caractéristiques égales, que pour les nappes libres. Le coefficient d'emmagasinement S est ici de 100 à 1 000 fois (voir 10 000 fois) plus petit. Les valeurs usuelles se situent entre 0,1 et 0,01 %.

Dans le cas des nappes captives, S est égale au produit de l'emmagasinement spécifique S_s et de l'épaisseur de l'aquifère e .

$$S = S_s \cdot e \tag{I.19}$$

Où l'emmagasinement spécifique représente le volume d'eau que peut produire une unité de volume d'aquifère, lorsque soumis a un changement unitaire de la charge hydraulique. [7]

Le coefficient d'emmagasinement spécifique peut être calculé à partir de la formule suivante [16]:

$$S_s = \rho \cdot g \cdot e (\alpha' + n\beta) \tag{I.20}$$

Où

n :porosité totale.

α', β : Compressibilité du matériau de l'aquifère et de l'eau (m^2/N).

S_s : Coefficient l'emmagasinement spécifique (L^{-1}).

e :épaisseur de l'aquifère saturé (L).

I.7.8.Le coefficient de production spécifique (Specific yield): [16]

Il est défini pour les aquifère libre par la relation suivante:

$$S_y = S - e.S_s \tag{I.21}$$

Où

S_y : C'est la production spécifique (sans unité).

I.7.9.la teneur en eau volumique: [21]

Dans les milieux non saturés, nous définissons la teneur en eau volumique comme suit:

$$\theta = \frac{\text{volume d'eau contenue dans un échantillon}}{\text{volume total de l'échantillon}} \tag{I.22}$$

La teneur en eau d'un sol varie entre une valeur minimale (la teneur en eau résiduelle, θ_r), et une valeur maximale (la teneur en eau à saturation, θ_s). Cette dernière est en principe égale à la porosité, toutefois, dans les conditions naturelles, un sol ne parvient jamais à la saturation totale, car il reste toujours de l'air piégé.

I.7.10. Charge hydraulique: [7]

L'énergie totale de l'aquifère est exprimée par sa charge hydraulique.

Energie totale (charge hydraulique)= Energie potentielle (hauteur d'eau et pression) + Energie cinétique (vitesse)

$$H_M = Z_M + \frac{p_M}{\rho g} + \frac{V_M^2}{2.g} \tag{I.23}$$

-La composante d'énergie cinétique $\frac{V_M^2}{2.g}$ est négligeable en raison des faibles vitesses

d'écoulement dans les sols (quelques cm/s);

- $\rho.g$: poids volumique de l'eau = γ_w (=10 kN/m³);

- p_M : pression du fluide = u (= 0 si sol non saturé) ;

$-Z_M$: cote prise depuis la surface de référence.

En m, la charge hydraulique, définie à une constante près, devient:

$$H_M = Z_M + \frac{u}{\gamma_w} \quad (\text{I.24})$$

I.7.11.gradient hydraulique: [9]

Le gradient hydraulique est la différence de niveau piézométrique entre deux points de la surface piézométrique, par unité de longueur, mesurée le long d'une ligne de courant .il est assimilable à la pente de la surface piézométrique.

Dans la pratique, le gradient hydraulique est calculé sur le terrain à l'aide des niveaux piézométriques mesurés dans deux ouvrages d'observation, alignés sur une ligne de courant .l'un amont H_1 , l'autre aval H_2 , séparés d'une distance L (voir figure I.10).

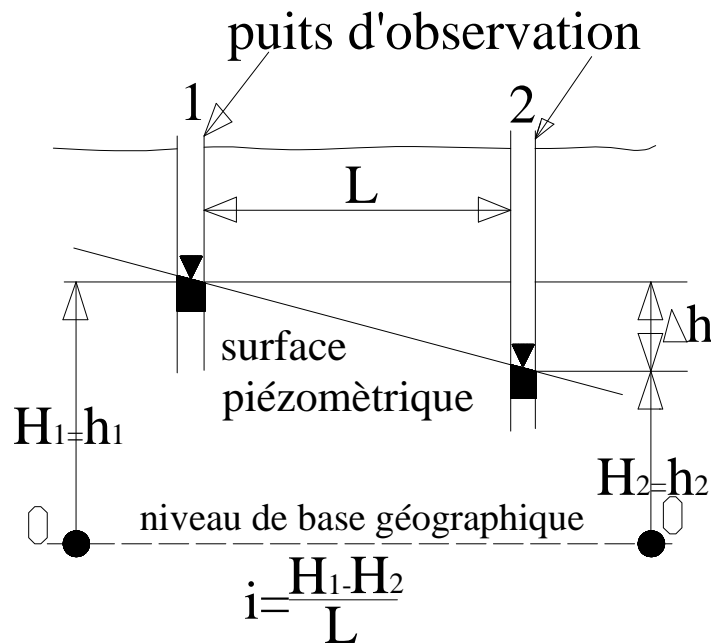


Figure I.10. calcul du gradient hydraulique sur le terrain. [9]

On utilise également les cartes piézométriques en mesurant la distance entre deux courbes isopiézométrique (figure I.11).

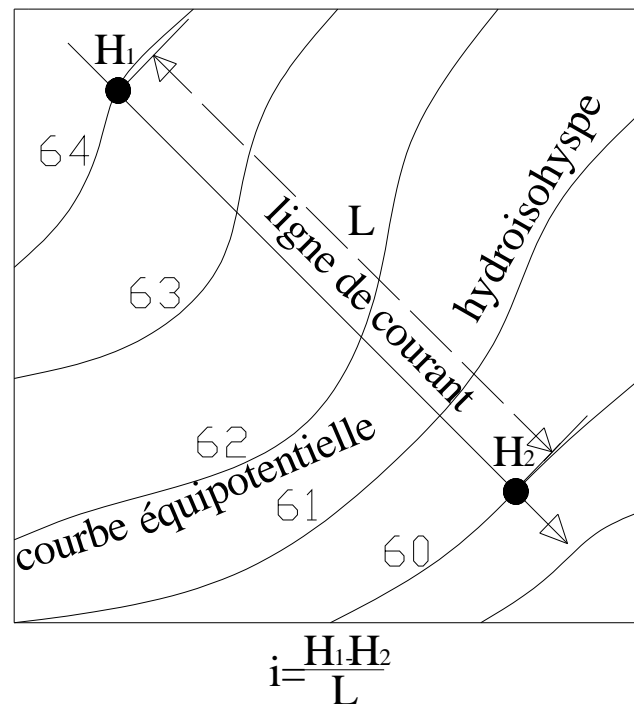


Figure I.11. calcul du gradient hydraulique par la carte piézométrique. [9]

I.7.12. Relation teneur en eau / potentiel de pression et conductivité / potentiel de pression: [21]

Le fonctionnement hydrodynamique d'un sol est contrôlé par deux caractéristiques macroscopiques dépendant à la fois de sa texture et de sa structure:

- La courbe de rétention hydrique, qui relie la teneur en eau volumique (θ) au potentiel de pression (h), et qui exprime la capacité du sol à retenir l'eau à un état énergétique donné.
- La courbe de conductivité hydraulique, qui exprime la capacité du sol à transmettre l'eau en fonction de son état de saturation mesuré par h ou θ .

Ces deux relations peuvent être déterminées expérimentalement : au champ ou au laboratoire.

I.7.12.1. Relation teneur en eau / potentiel de pression:

Dans la zone non saturée du sol, la teneur en eau et le potentiel de pression varient de manière concomitante. La relation existant entre ces deux paramètres constitue dès lors un élément essentiel de la description de l'état hydrique du milieu poreux non saturé. Cette relation exprime les variations d'intensité des forces de capillarité en fonction de la teneur en eau. Graphiquement, cette relation $\theta(h)$ est représentée par une courbe, dénommée courbe caractéristique d'humidité du sol ou courbe de rétention hydrique.

Nous pouvons définir deux types de modèles nous permettant de paramétrer $\theta(h)$: ceux à fondement mathématique et ceux à fondement physique. Les modèles physiques utilisent directement certaines caractéristiques physiques du sol (granulométrie, densité, etc.) pour estimer les propriétés hydrodynamiques.

Plusieurs auteurs ont proposé des expressions mathématiques de la courbe de rétention en eau, $\theta(h)$. Les modèles mathématiques doivent être suffisamment souples pour s'adapter à la texture et à la structure des différentes sortes de sols. [21]

I.7.12.2. Relation conductivité / potentiel de pression:

La courbe de conductivité hydraulique, $K(h)$, peut se déduire de formules empiriques telle que celle de Gardner (1956) ou théoriquement par celle de Mualem (1976), modifiée par van Genuchten (1980). [21]

I.7.13. coefficient d'infiltration: [7]

Le coefficient d'infiltration C_i (en %) est le rapport caractérisant le volume d'eau qui s'infiltré à travers la surface du sol, au volume d'eau tombée sur cette surface.

I.8. Types d'écoulement :

I.8.1. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent :

L'écoulement d'un fluide peut être laminaire ou turbulent. Dans un écoulement laminaire, chaque particule du fluide se déplace en formant des lames ou couches entre lesquelles il n'y a pas de mélange. Par contre, dans le cas de l'écoulement turbulent, les particules se déplacent en formant des tourbillons de tailles différentes accompagnés d'un mélange ou brassage intensif des particules fluides. [15]

I.8.2. Ecoulement uniforme :

L'écoulement est dit uniforme si l'accélération convective est nulle ; la vitesse ne dépend donc pas de la position dans l'espace. Par conséquent, dans un écoulement uniforme, les vecteurs vitesses sont parallèles en tout point. [15]

I.8.3. Ecoulement permanent et écoulement transitoire :

Si, en un point donné du milieu, la vitesse d'écoulement reste constante à tout instant, c'est-à-dire que l'accélération est nulle, l'écoulement est dit permanent. La vitesse ne dépend pas du temps mais peut varier d'un point à l'autre dans l'espace. Si la charge hydraulique ne change pas dans le temps, l'écoulement naturel est nécessairement permanent. Par contre, cet équilibre peut être rompu par des facteurs naturels ou artificiels, comme le pompage dans les puits. Ces conditions de non équilibre induisent alors un écoulement transitoire, où la vitesse d'écoulement en un point donné change en valeur et/ ou en direction dans le temps. [15]

I.9.Zonalité sol/eau: [9]

L'étude de l'aquifère a nappe libre montre la présence de haut en bas ,de deux zones ,caractérisées par la teneur en eau du réservoir:

I.9.1.la zone non saturée:

Elle est caractérisée par le complexe réservoir /eau de rétention /air. L'eau de rétention inclut l'eau capillaire .Elle est subdivisée en trois sous zones :
La zone d'évapotranspiration, la zone de transition ou la teneur en eau est voisine de la capacité de rétention, la zone ou frange capillaire, alimentée par l'eau de la zone saturée remontant par ascension capillaire.

I.9.2. la zone saturée:

Elle est caractérisée par le complexe réservoir /eau de rétention /eau gravitaire. Les deux types d'eau de rétention et eau gravitaire y sont présents. C'est le domaine de l'eau gravitaire et de la nappe d'eau souterraine. Sa limite supérieure est la surface de la nappe.

Conclusion:

Nous avons présenté dans ce chapitre les notions de base essentielles à notre étude. Ces notions recouvrent des caractéristiques propres au squelette de matière solide défini comme milieux poreux qui contiennent différentes phases non solides. Ces caractéristiques peuvent être divisées en caractéristiques physiques et en caractéristiques hydrodynamiques ou hydrauliques.

Nous retiendrons en général que les aquifères sont des milieux poreux qui peuvent être classés selon plusieurs critères. Les principaux types de nappes sont les nappes libres et les nappes captives. Dans notre étude on s'intéresse seulement à la nappe libre.



CHAPITRE II :

La recharge des nappes



Introduction:

Face à la demande croissante et à la dégradation continue de la qualité des eaux de surface, le recours systématique aux réserves en eaux souterraines est devenu partout une nécessité. Et la même question revient continuellement aux hydrogéologues: les ressources exploitées sont-elles renouvelées ? Si oui, comment et à quel taux ?

Dans ce chapitre on va essayer de répondre à ces questions.

II.1.définition de la recharge des nappes d'eau souterraines: [12]

Le terme de recharge désigne le processus par lequel un aquifère reçoit un apport d'eau, soit d'un autre aquifère saturé, soit de sa partie non saturée.

Depuis les années 1980, une explosion relative des études de recharge de nappes a été notée dans la littérature. Les motivations de ces études sont soit d'ordre quantitatif pour les zones où l'eau souterraine est la seule ressource en eau, soit d'ordre qualitatif dans les zones où les risques de contamination des nappes sont prépondérants.

L'estimation de la recharge est effectuée soit à partir de suivis hydriques, soit à partir de données hydrochimiques. Les premières sont généralement basées sur le calcul de bilans de masses d'eau en relation avec les propriétés hydriques du sol.

L'étude de la recharge nécessite à la fois l'étude des mouvements de l'eau (mécanismes hydrologiques) et les réactions biogéochimiques qui peuvent affecter le devenir des solutés.

II.2.types de recharge:

La recharge des nappes souterraines peut se faire naturellement ou artificiellement.

II.2.1.recharge naturelle des nappes d'eau souterraines:

On admet généralement que l'alimentation naturelle des aquifères s'effectue suivant les mécanismes suivants :

- ✓ par infiltration directe des précipitations aux aires d'affleurement.
- ✓ par percolation latérale à partir des eaux de surface.
- ✓ à travers la contribution d'eau en provenance d'autres aquifères.
- ✓ par Alimentations diverses.

II.2.1.1.La recharge directe: [12]

La notion de «recharge directe» des aquifères est liée à celle de l'« infiltration efficace », généralement définie comme la part de la pluie qui échappe à l'évapotranspiration et au ruissellement pour rejoindre la nappe.

Les couches profondes du sous-sol sont le réservoir des nappes. Ces nappes ne sont pas immobiles. Un flux quasi horizontal les parcourt d'amont en aval, des zones

d'infiltration vers les sources et les rivières. Fortement freiné par l'écoulement dans les pores des roches, ce flux est lent. Alors qu'une rivière s'écoule sous nos yeux à environ un mètre par seconde, il faut à l'eau souterraine un jour ou un an pour parcourir le même trajet.

Cette lenteur ne signifie pas pour autant faiblesse des débits. Grâce à la grande largeur des fronts d'écoulement des nappes, des dizaines de milliards de m³ pour chaque bassin rejoignent ainsi les rivières.

Le devenir d'une pluie va donc être très différent selon l'état de la surface sur laquelle elle tombe. Une faible pluie d'hiver, sur un sol labouré, va humecter le réservoir superficiel qui va se recharger. Avec de nouvelles pluies, le taux d'humidité va croître jusqu'à ce que la terre contienne, selon sa nature, 50 à 150 l d'eau au m³. C'est la réserve facilement utilisable par les plantes qui vont y puiser dès le printemps et l'épuiser progressivement, s'il ne pleut pas de nouveau. Si le sol superficiel reçoit plus d'eau que le volume de cette réserve, il ne peut la stocker. Il va alors céder cette eau aux nappes. C'est le phénomène de recharge ou d'infiltration. Le niveau des nappes va commencer à monter mais cela se produit avec un certain décalage dans le temps car l'eau chemine lentement, même verticalement.

Au contraire, si des pluies, mêmes importantes, surviennent alors que la végétation est très active, l'eau de réserve superficielle qui se reconstitue est redistribuée aux plantes qui se servent les premières. Il ne peut y avoir d'infiltration profonde. De très violentes pluies qui n'ont alors pas le temps de s'infiltrer (surtout si le terrain est en pente) peuvent donner lieu à des ruissellements et à des crues.

La figure II.1 montre le rôle des pluies efficaces dans la distribution au sol et dans le sol.

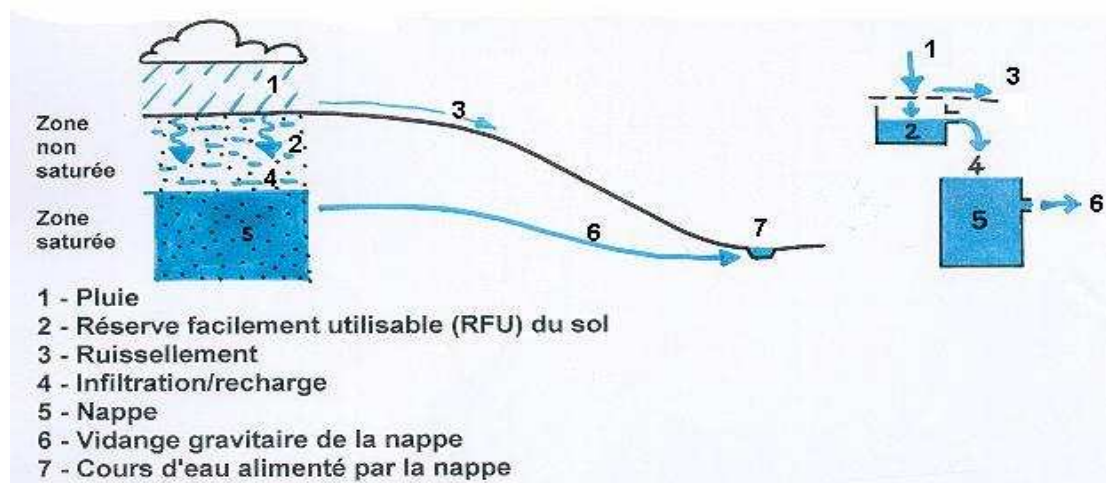


Figure II.1. Rôle des pluies efficaces dans la distribution au sol et dans le sol. [11]

II.2.1.2. La recharge indirecte: [12]

On entend par « recharge indirecte », celle qui provient de la percolation latérale des eaux de surface.

En zones tempérées, au pied des chaînes montagneuses, la recharge (favorisée par le fort gradient hydraulique et la forte transmissivité des relais alluvionnaires) s'effectue principalement par ce mécanisme.

Ce mécanisme de recharge revêt également une grande importance en milieu semi-aride.

En milieu aride, les exemples de recharge de grands aquifères sédimentaires par les eaux du réseau de surface sont par contre extrêmement limités, voire inexistant. La recharge à partir des rivières est limitée aux seules nappes alluviales contenues dans le lit majeur des cours d'eau.

II.2.1.3. La drainance: [9]

C'est les transferts d'eau entre aquifères. la drainance exige deux conditions :

- présence d'une formation hydrogéologique semi-perméable.
- Une différence de charge Δh .

La figure II.2 représente ce phénomène et montre les échanges d'eau avec l'aquifère superposé ou sous-jacent.

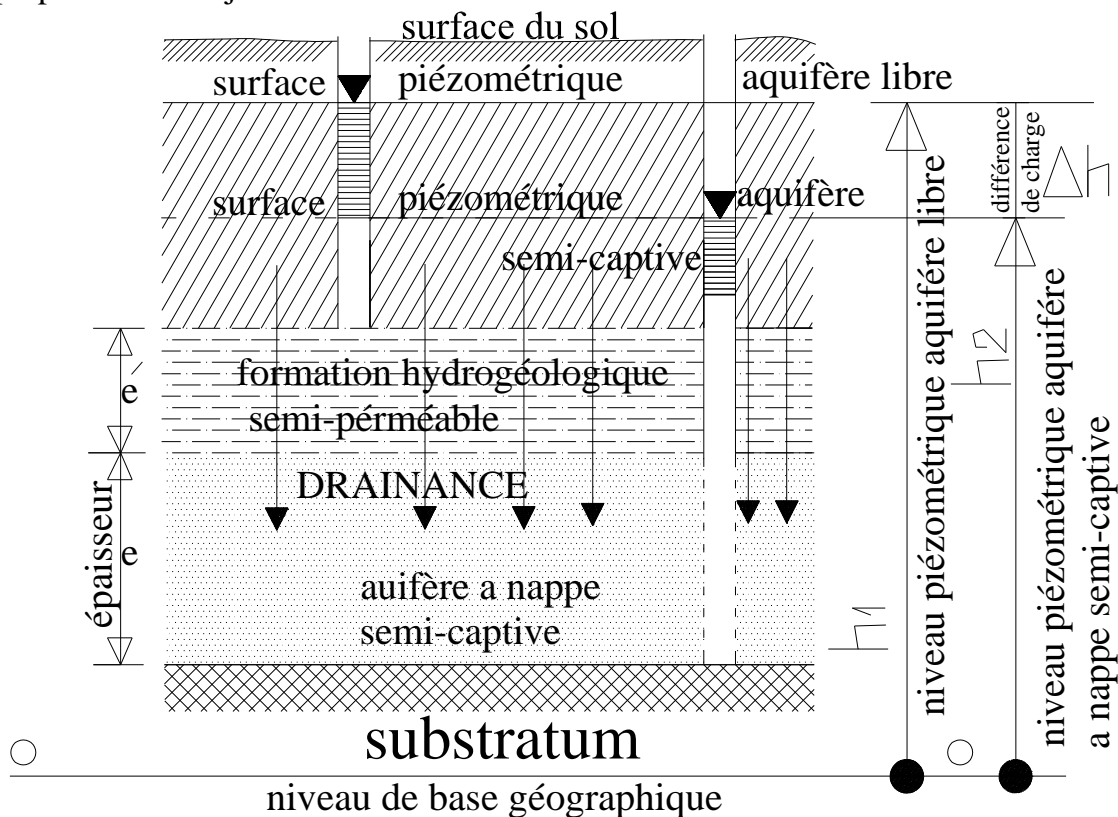


Figure II.2. Drainance et aquifère bicouche. [9]

II.2.1.4. Alimentations diverses:

L'alimentation peut également provenir de zones latérales par exemple par des nappes de pente, ou par le sous-écoulement à partir d'une roche encaissante karstifiée très en charge.

II.2.2. La recharge artificielle des aquifères :

L'alimentation — ou recharge — artificielle des nappes est une approche particulièrement adaptée à la gestion des ressources en eau d'un bassin. En quoi consiste-t-elle, quels sont ses objectifs, les facteurs qui la conditionnent. Les mécanismes mis en jeu, les problèmes qu'elle implique, les méthodes et l'économie de cette pratique? Voilà diverses questions auxquelles cette partie du chapitre cherche à répondre.

II.2.2.1. définition : [14]

Il s'agit d'un processus consistant à accroître les quantités d'eau qui alimentent naturellement les nappes. L'opération comprend donc intervention de l'homme et introduction d'eau dans un aquifère. Cela se traduit soit par un effet volumétrique — emmagasinement d'eau — soit par un effet piézométrique — remise en pression — soit par les deux.

Donc un vrai projet de recharge correspondrait, lui, à une action sur l'un des organes d'entrée — l'alimentation — d'une nappe et plus spécialement à la création d'une nouvelle limite alimentée.

II.2.2.2. Objectifs de la recharge artificielles des nappes: [14]

Les buts globaux de la recharge artificielle des nappes sont:

- la satisfaction de besoins en eau croissants et la lutte contre l'intrusion d'eau salée.
- l'utilisation, la conservation et la distribution des ressources en eau ainsi que leur contrôle et protection.
- Le stockage souterrain de résidus liquides en est également un aspect bien qu'on puisse difficilement le prendre pour une opération d'alimentation.

La régularisation semble l'un des aspects les plus séduisants et profitables de l'alimentation artificielle. Ainsi, la capacité de stockage de certains aquifères sera utilisée pour l'emmagasinement d'eaux de surface locales ou importées. La construction de réservoirs de surface coûteux et sujets à destruction sera alors épargnée. Quant à l'eau injectée, elle sera pompée plus tard, soit dans la zone de recharge, soit — le plus souvent — en aval, en particulier lors des moments de pointe, les périodes d'irrigation par exemple. Une telle mesure permet également d'éviter la construction d'un réseau d'adduction du point de stockage à celui d'utilisation puisque, par définition, tout aquifère transmet, par gravité ou par pression, les eaux qu'il

contient des zones d'infiltration à celles d'exutoire. Il y a donc déjà là un avantage très substantiel sur la technologie des eaux de surface.

La conservation d'eaux de pluies excédentaires et la constitution de suppléments de ressources en eaux souterraines peuvent être facilement réalisées par recharge artificielle. De même, la restauration de pressions ou la reconstitution de réserves à la suite de surexploitation de nappes captives ou libres est un but fréquent de la recharge. Dans ce cas, l'opération permet non seulement de compenser un débit de sécurité insuffisant mais aussi de pallier à une augmentation des hauteurs, c.-à-d. des coûts, de pompage. A la notion de débit de sécurité, on pourra alors substituer celle de débit optimum qui correspond à des pompages plus intenses et autorise des perspectives de développement moins conservatrices tout en prévenant l'avènement de conséquences indésirables.

Le recyclage d'eaux usées ou le traitement d'eaux à des fins domestiques ou autres sont encore certaines des possibilités offertes par/et l'un des buts de la recharge. On sait en effet que le sol et les aquifères sont des agents épurateurs très efficaces tant du point de vue bactériologique que physico-chimique. Selon les cas, un trajet de quelques mètres à quelques centaines de mètres suffit en effet à éliminer plus ou moins virus et bactéries, pesticides et détergents, à modifier température et turbidité, dureté et alcalinité et à rétablir des propriétés organoleptiques normales. Lorsque ces milieux ne peuvent, ou ont du mal à, traiter les eaux rechargées, on pourra faire précéder l'injection d'un traitement primaire ou secondaire pouvant comprendre par exemple des coagulation, passage sur charbon actif, adoucissement et autres opérations.

Ainsi donc, des quantités importantes d'eaux polluées peuvent être recyclées à bon compte après ou sans traitement préliminaire. On trouve la recharge également dans le cadre du contrôle et de la protection de l'environnement, par exemple lorsqu'il s'agit de rétablir un équilibre perturbé par l'homme. Dans le cas d'aquifères côtiers, une injection d'eau permettra de lutter contre une intrusion d'eau salée, ou de la prévenir, par suite de la remise en charge de la nappe qui l'accompagnera.

De même, un affaissement de terrain pourra être contré par une introduction d'eau dans des assises adéquates. Mais l'un des plus anciens et fréquents exemples en la matière est peut-être dû, non pas aux hydrogéologues, mais aux pétroliers. La remise en pression de gisements sur le déclin par injection d'eau a, en effet, permis de récupérer depuis fort longtemps bien des tonnes d'huile autrement perdues. Par ailleurs, certains envisagent aussi de lutter contre les tremblements de terre à l'aide de cette même technique. Selon certains, cette opération provoque des contraintes locales génératrices de mouvements tout en soulageant ainsi les tensions régionales sources des grands tremblements. Des injections dans des zones appropriées permettraient alors de créer de petits séismes sans gravité minimisant ainsi la formation des grands aux conséquences que l'on sait. Comme ce fût le cas en manière de pétrole, il y a peut-être là une affaire à suivre.

Enfin la recharge conduit à des mixages et dilutions autorisant la récupération de quantités d'eau autrement de qualité insuffisante. Notons qu'il est également possible d'injecter des eaux douces dans des nappes inutilisables pour ensuite en repomper une grande partie sans qu'elles aient subi de détériorations en qualité substantielles.

II.2.2.3. inconvénients de la recharge artificielle des nappes:

Pour faire à peu près le tour de la question, il reste à signaler les problèmes spéciaux auxquels la recharge permet de faire face :

- a) drainage d'une nappe phréatique par injection dans des couches profondes;
- b) réduction du débit d'une rivière;
- c) régulation thermique d'une ressource en eau ;
- d) le stockage souterrain des résidus liquides peut provoquer des risques sur le sous-sol on raison de la nature physico-chimiques de ces résidus liquides comme la détérioration de gisements minéraux et la dégradation d'eaux souterraines. [14]
- e) Problème du colmatage:le colmatage est lié à l'apport, par l'eau infiltré, de fines qui colmatent les pores du sol, mais aussi à des réactions physico-chimiques ou biologiques dans le sol entraînant, par exemple, le gonflement des argiles ou la prolifération des des bactéries ou d'algues créant un filme biologique, que l'on ne peut éliminer totalement car il participe à l'épuration des eaux infiltrées. [4]

II.2.2.4. facteurs de la recharge:

Pour sélectionner un site de recharge et obtenir les résultats cités jusqu'à maintenant, il est deux paramètres qui jouent un rôle fondamental : les caractéristiques des eaux à injecter d'une part et celles du milieu récepteur d'autre part. Dans tout projet de recharge, il y aura donc lieu de considérer les conditions hydrologiques, topographiques, pédologiques, géologiques, et hydrogéologiques qui conditionnent cette réalimentation. Bien entendu, les aspects économiques et juridiques de l'opération ne peuvent non plus être ignorés.

II.2.2.4.1. facteurs hydrologiques: [14]

Il s'agit tout d'abord d'analyser toutes les sources en eau possibles pour la recharge et de définir leur répartition en débit dans le temps et dans l'espace ainsi que le meilleur moyen de les diriger efficacement sur le site. Par conséquent, s'assurer de disponibilités adéquates en quantité et qualité au moment voulu. Un projet de recharge comprendra donc une étude des ressources en eau de surface locales et appréciera les possibilités d'importation. En effet, s'il est souhaitable que les eaux à injecter proviennent de cours d'eau proches du site, il n'est pas à exclure d'utiliser les ressources d'un bassin excédentaire.

Dans certains temps, il faut que l'eau brute destinée à la recharge soit de qualité acceptable, surtout si notre objectif dans cette opération est de faire de l'eau potable pour l'alimentation humaine. Les eaux contenant une charge en matières en suspension trop importantes doivent aussi être évitées où à rendre potable grâce à divers traitements qui peuvent être très poussés.

II.2.2.4.2. facteurs Topographiques: [14]

Ils ne jouent pas de rôle essentiel dans le cas d'ouvrages d'injection profonde; par contre, ils sont à considérer dans celui de recharge superficielle. Ce sont des pentes de l'ordre de 1 à 2 % environ qui seront en général les plus favorables.

Ce sont, en effet, souvent celles que l'on rencontre dans les portions les plus étalées et les plus perméables des cônes de déjection et des lits des cours d'eau. D'autre part, dans le cas de pentes trop accusées, des hauteurs d'enceinte prohibitives deviendraient nécessaires pour limiter des bassins de volume convenable ou bien il faudrait un grand nombre d'enceintes de hauteur normale ; cela mettrait en cause la rentabilité du projet.

II.2.2.4.3. facteurs Pédologiques: [14]

Les caractéristiques des dépôts de surface sont loin d'être négligeables. Par exemple, plus la texture du sol sera grossière plus le taux d'infiltration sera élevé. Outre la texture, interviendront des paramètres tels que: perméabilité, profil et variations avec la profondeur, degré de compactage, présence ou absence de croûte calcaire ou de cuirasse ferrugineuse, de matière organique etc.

Le pédologue aura donc son mot à dire dans les projets de recharge, notamment lors de la préparation de cartes de types de sols auxquels on affectera des caractéristiques chiffrées des taux d'infiltration. Des études sur l'origine et la structure des sols, leur stratification, leur degré de cartographie seront à sa charge. Il aura également à définir la manière la plus parlante de synthétiser ses résultats compte tenu de l'objectif de recharge.

II.2.2.4.4. facteurs Géologiques et Hydrogéologiques: [14]

Outre une étude géologique générale, une analyse détaillée sera nécessaire afin de reconnaître et délimiter les réservoirs les plus adaptés à l'opération; géophysique et sondages en seront l'un des moyens. Evidemment ces réservoirs sont rarement simples et s'ils ne sont pas très répandus en zones tempérées où les sédiments sont souvent saturés en eau, ils le sont beaucoup plus en zone aride où les assises non saturées et épaisses sont monnaie courante.

L'analyse aura pour but de déterminer l'origine, la nature et l'extension des sédiments ainsi que leur aptitude à la recharge. Ainsi, il y aura lieu de définir le réservoir, ses profondeurs, Structure, lithologie, limites horizontales et verticales et

profondeur jusqu'au niveau de l'eau. On devra aussi évaluer ses perméabilités horizontales et verticales qui devront être importantes, sa transmissivité, sa porosité et son coefficient d'emmagasinement ainsi que les variations de ces paramètres. On touche déjà là à l'étude hydrogéologique qui devra établir la piézométrie, chiffrer le gradient hydraulique, apprécier le sens d'écoulement des eaux, définir les limites alimentaires et les exutoires, le réseau d'exploitation, la chimie de l'eau, le bilan hydrologique et chimique. Il faudra également évaluer quelle sera l'influence de la recharge sur ce réservoir, quelles seront les zones qui en profiteront et quand. Tous ces points n'ont pas la même importance et, par exemple, la transmissivité T , le coefficient d'emmagasinement S et surtout leur rapport —la diffusivité— joueront un rôle très notable. En effet, il sera nécessaire que la recharge se traduise par une élévation du niveau de l'eau, ce qui est peut-être plus capital que la conservation du volume injecté. Voici pourquoi. Ce volume peut-être conservé tout en donnant lieu à une propagation de différences de pression — cas des nappes captives où S est très petit — qui aura pour conséquence une augmentation des débits aux exutoires, c'est-à-dire une vidange. Ainsi la recharge aurait été «inopérante». Il faudra donc tenir compte du rapport T/S qui, s'il est trop élevé, se traduira par un effet sur les exutoires trop rapide. Corollairement, la connaissance des conditions aux limites et notamment de ces mêmes exutoires sera fondamentale et la nappe devra être assez étendue pour ne pas se vidanger au fur et à mesure du remplissage. C'est ce qui se produit souvent en milieu karstique, excepté lorsqu'il s'agit de massifs de très grande étendue où des stockages suffisamment longs sont possibles.

Enfin, il faudra s'assurer que le taux d'infiltration se maintiendra — ce qui pourra nécessiter des traitements — et que la récupération de l'eau ne donnera pas lieu à des hauteurs de pompage prohibitives.

II.2.2.5. moyens de recharge artificielles des nappes: [1]

On dispose généralement trois moyens de recharge artificielle des nappes (voir figure II.3):

- ✓ Recharge directe depuis la surface.
- ✓ Recharge directe de subsurface.
- ✓ Combinaison des méthodes de surfaces et de subsurface.

II.2.2.5.1. Recharge directe depuis la surface:

De nombreuses méthodes ont été développées afin de réintroduire artificiellement des eaux de surface dans un aquifère depuis la surface, parmi lesquelles en site:

- Dérivation de rivières;
- Fossés et sillons;
- Irrigation intensive;
- Recharge par aspersion;

- Aménagement de cours d'eau ;
- bassins d'infiltration.

II.2.2.5.2. Recharge directe de subsurface :

- fosses et puits ;
- inondation de cavités naturelles ;
- épandage souterrain;
- forage d'injection.

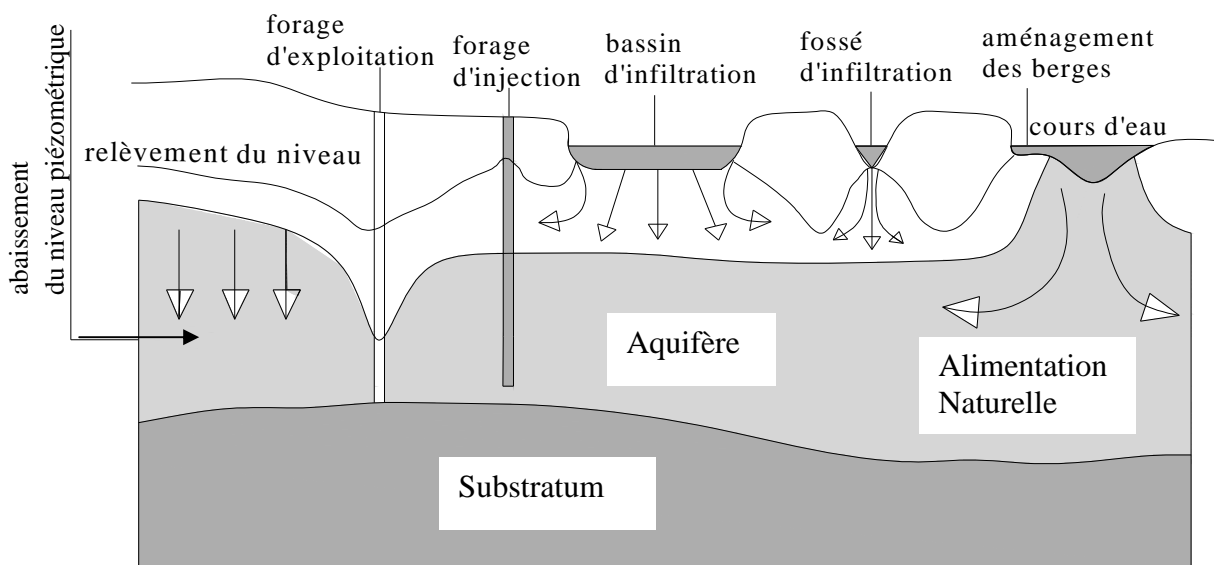


Figure II.3. différents méthodes de recharge artificielle des nappes. [4]

II.2.2.6. le choix des différents moyens utilisé pour la recharge artificielle des nappes: [14]

II.2.2.6. 1. Recharge directe depuis la surface:

L'application de cette méthode est souvent recherchée en raison de coûts généralement plus avantageux et de problèmes d'opération et d'entretien moins complexes.

II.2.2.6.2. Recharge directe de subsurface:

On a généralement recours à cette dernière lorsque le sol est séparé des aquifères par des couches imperméables, lorsqu'il est difficile de créer des aménagements de surface ou lorsqu'on ne peut ou ne veut, pour des raisons techniques ou économiques, recharger des nappes captives dans leur zone d'alimentation.

II.2.2.7.description de quelques méthodes de recharge artificielle:**II.2.2.7.1. recharge par injection directe dans les forages ou les puits pour atteindre la nappe: [1]**

Cette méthode d'alimentation se fait par l'intermédiaire d'ouvrage dont la conception est identique a celle des ouvrages de pompage pour atteindre directement l'horizon imperméable.

II.2.2.7.2. Recharge depuis la surface par infiltration des eaux à travers les filtres naturelle du sol: [1]

C'est la méthode la plus simple pour obtenir des débits élevés avec un minimum d'aménagement physique sur le terrain. En effet, les surfaces nécessaires sont très importantes ce qui signifie une mobilisation de terrain très étendue, donc des coûts d'acquisition élevés. Par contre, les charges d'exploitation seront beaucoup plus faibles que dans le cas d'une injection directe. Par ailleurs, le pouvoir d'autoépuration du sol joue un rôle prépondérant grâce à l'utilisation du réacteur du sol de la zone non saturée avec des vitesses d'infiltration peuvent varier de quelques centimètres à quelques mètres par jour et la hauteur du bassin sera plus de 0.4 mètres.

II.2.2.7.3.recharge depuis la surface en utilisation des eaux usées pour la réalimentation: [1]

La réutilisation partielle et non contrôlée d'eau usée, comme source d'eau brute, pour faire de l'eau potable est un phénomène très courant.

Le cas le plus fréquent est représenté par l'utilisation d'eau de rivière avec la présence des rejets de station. Les eaux usées présentent une source intéressante pour lutter contre un problème comme celui de l'intrusion marine.

La figure suivante montre quelques méthodes de recharge artificielle des nappes.

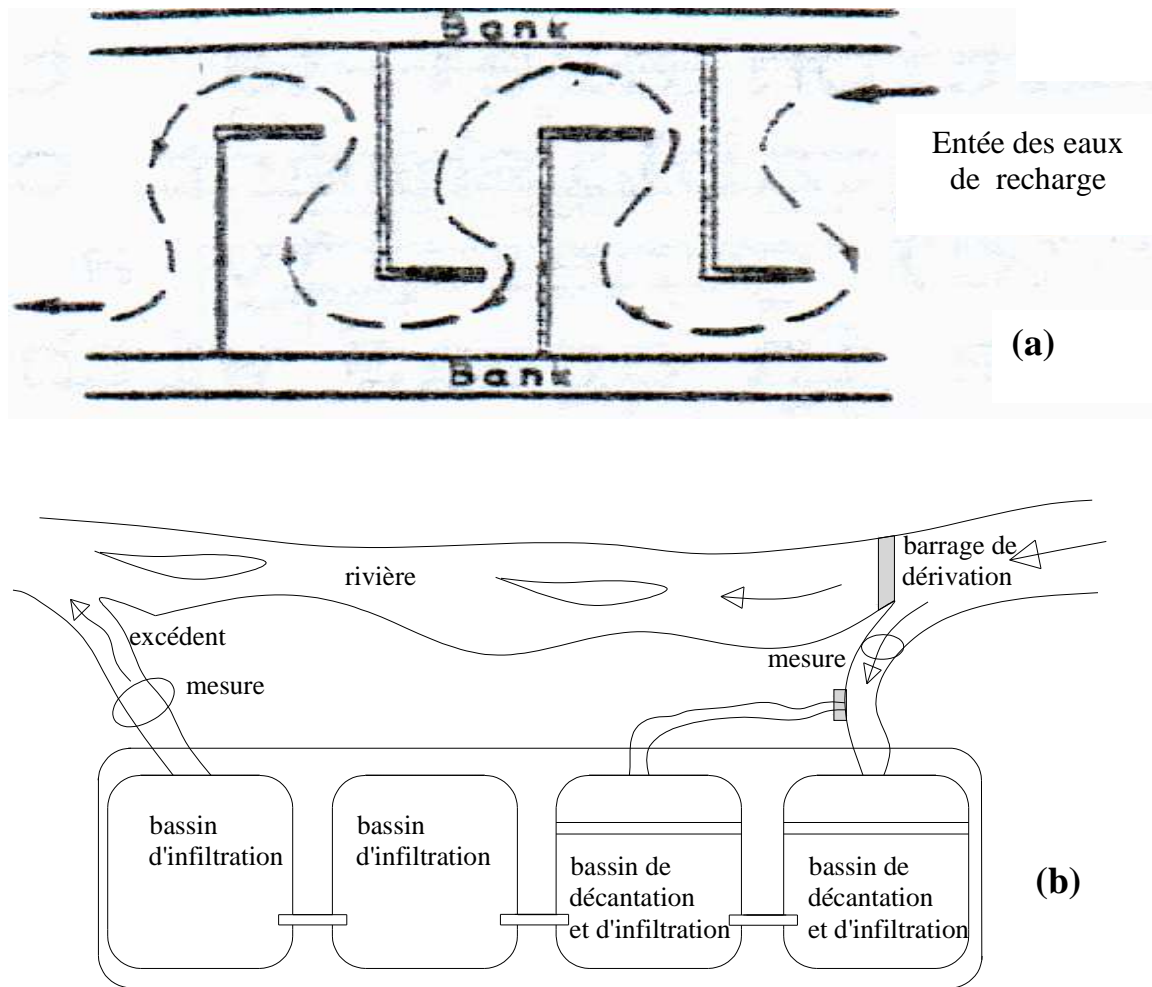


Figure II.4. quelques méthodes de recharge artificielle des nappes: [4]
(a): cas d'aménagement d'un oued pour diminuer la vitesse d'écoulement et augmenter le parcours des eaux de recharge.
(b): recharge par les bassins d'infiltration.

II.2.2.7.4. Recharge depuis la surface par l'aménagement des cours d'eau: [1]

Dans le but d'augmenter l'infiltration des eaux provenant des précipitations, un aménagement par des seuils installés le long des cours d'eau afin de briser l'énergie cinétique et diminuer la vitesse d'écoulement de ces eaux et en favorisant l'infiltration (voire Figure II.5).

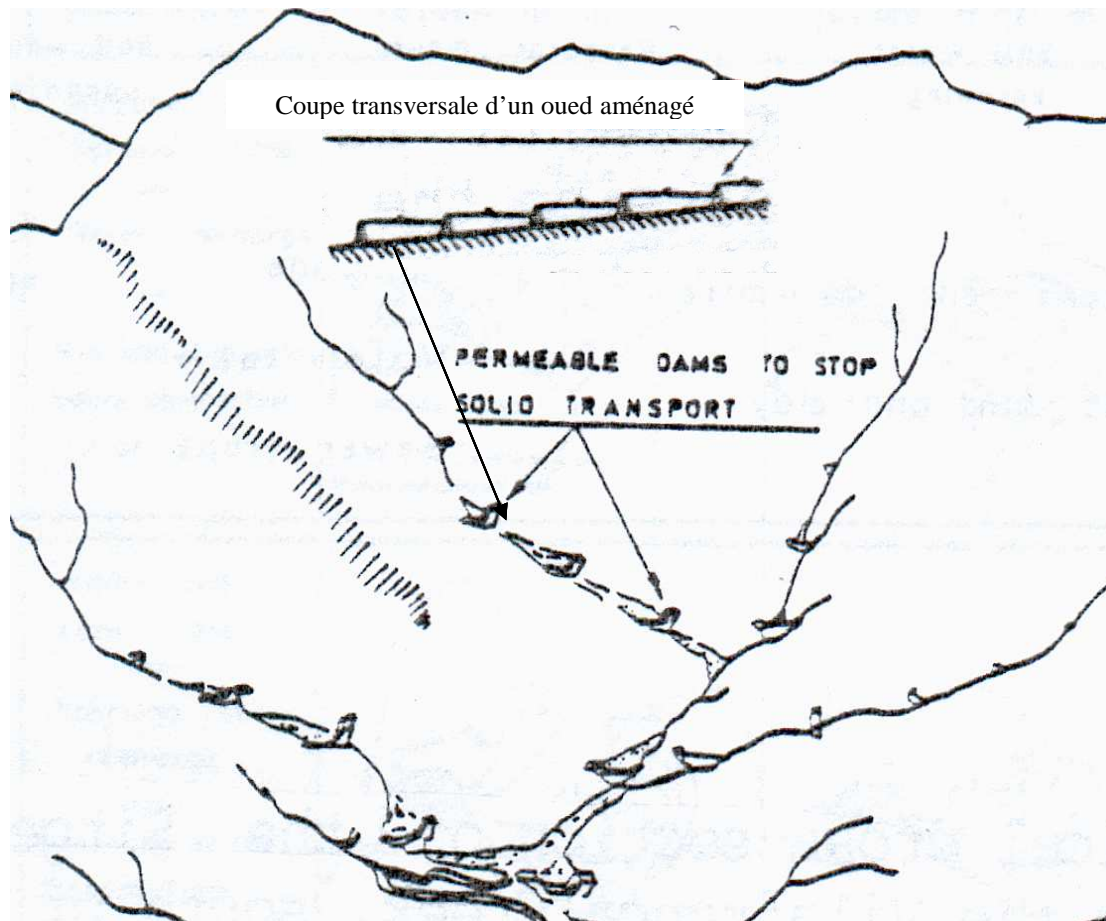


Figure II.5. Recharge depuis la surface par l'aménagement des cours d'eau. [1]

II.3. Méthodes d'estimation de la recharge des nappes:

II.3.1. Méthode du bilan hydrologique: [18]

Il s'agit de calculer le taux de recharge annuelle en surface du sol, partir de l'infiltration efficace dans le sol. Celle-ci est déterminée en utilisant l'équation du bilan hydrologique:

$$P = ETR + R + I \quad (\text{II.1})$$

Où:

P : précipitation totale moyenne annuelle en mm/an;

ETR : évapotranspiration réelle moyenne annuelle en mm/an;

R : ruissellement moyen annuel en mm/an;

I : infiltration efficace moyenne annuelle en mm/an = Rg (ou q): recharge ou taux de rechargement.

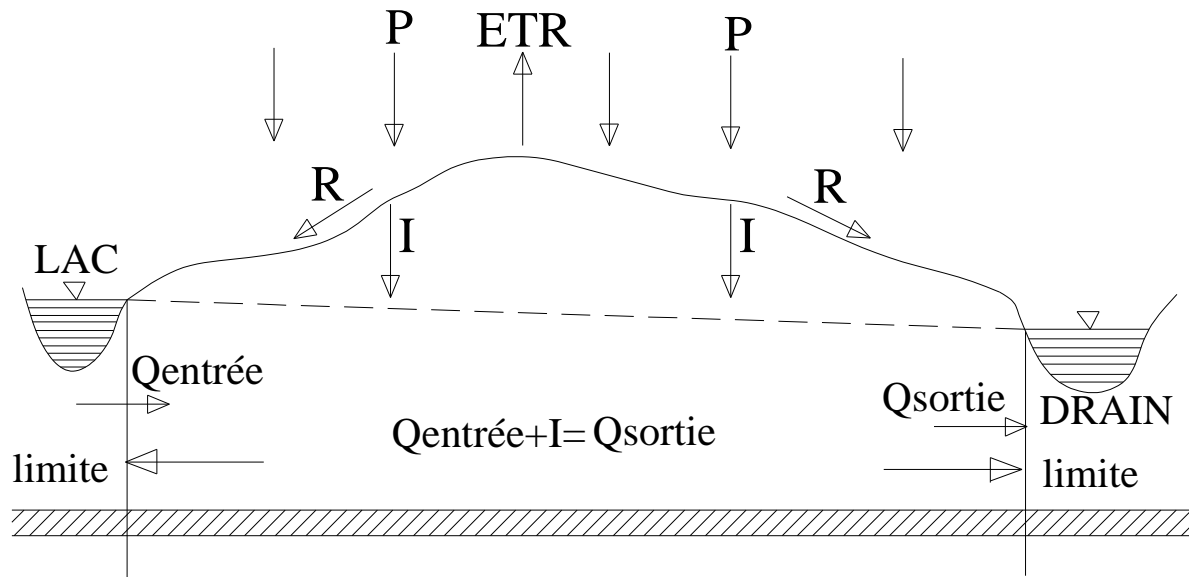


Figure II.6. bilan hydrologique. [18]

L'évapotranspiration et la précipitation sont des données météorologiques. Le ruissellement dépend essentiellement de la perméabilité du sol. L'évapotranspiration est calculée en fonction de la température et la lame d'eau précipitée. En plus, l'évapotranspiration dépend de la nature et du type d'utilisation des sols. La méthode de calcul la plus utilisée pour l'évaluation de l'évapotranspiration potentielle est celle de Thomthwaite (1948). Cette méthode est basée sur la corrélation entre la température moyenne annuelle et l'évapotranspiration réelle (ETR). La détermination de l'évapotranspiration potentielle (ETP) est complexe et sa valeur réelle est supérieure à celle de l'évapotranspiration réelle (ETR). Plusieurs méthodes ont donc été développées pour l'évaluation d'une valeur plus réelle de l'ETR. Nous prenons comme exemple la méthode de Turc (1954) qui est très utilisée. Cette méthode est basée sur des études statistiques qui relient l'évapotranspiration aux précipitations et à la température et au pouvoir évaporant de l'atmosphère (L) calculé comme suit:

$$L=300+25T+0.05T^3 \quad (\text{II.2})$$

Où

L : pouvoir évaporant de l'atmosphère (sans unité);

T : température moyenne annuelle en °C.

Pour l'ETR, on a :

$$ETR = \frac{P}{\left[0.9 + (P/L)^2\right]^{1/2}} \quad (\text{II.3})$$

Où

ETR : évapotranspiration réelle moyenne annuelle en mm/an;
 P: précipitation totale moyenne annuelle en mm/an;
 L : pouvoir évaporant de l'atmosphère.

Il existe une autre formule pour calculer le taux de rechargement de la nappe (q), ce dernier est donné par le produit de la pluie moyenne (P) et d'un coefficient d'infiltration (C_i): [17]

$$q = P \cdot C_i \quad (\text{II.4})$$

Le débit d'alimentation ou débit de rechargement (Q') est alors donné par le produit de la pluie moyenne (P), de la surface (S) et d'un coefficient d'infiltration (C_i) : [17]

$$Q' = P \cdot S \cdot C_i = q \cdot S \quad (\text{II.5})$$

II.3.2. Techniques géochimiques:

II.3.2.1. Technique des isotopes radioactifs: [17]

Développée depuis plusieurs décennies (le premier colloque sur ce thème à lieu à Tokyo en 1963), l'application des techniques nucléaires et isotopiques, notamment celles mettant en oeuvre les isotopes radioactifs, a largement contribué à répondre à ces questions en améliorant la connaissance des mécanismes de recharge et de la dynamique des aquifères. La mise en oeuvre de ces techniques, jadis réservées à quelques initiés, s'est heureusement étendue au fil des années. Il ne peut être actuellement envisagé d'étude complète de systèmes aquifères sans faire appel, parallèlement aux méthodes de l'« hydrogéologie classique », aux techniques de la géochimie isotopique.

Des études antérieures se sont spécialement intéressées à l'utilisation des radio-isotopes ^{14}C et ^3H . Ces auteurs ont évalué l'alimentation de la nappe à partir de la vitesse de circulation de l'eau souterraine déduite des activités du ^{14}C .

II.3.2.2. L'estimation de la recharge en utilisant le bilan de masse du Cl (chlorure): [17]

L'estimation de la recharge à partir de chlorure se fait à l'aide de la formule suivante on considère comme hypothèse que tout le Cl est dérivé de l'atmosphère:

$$R_g = P \cdot C_p / C_s \quad (\text{II.6})$$

Où

Rg:recharge ou taux de rechargement=q (mm/an);

P : est la pluie moyenne (mm/an);

Cp : est la concentration moyenne du Cl dans l'eau de pluie en mg/l (3 mg/l pour l'Algérie);

Cs : est la concentration moyenne du Cl dans l'eau interstitielle de la zone non saturée en mg/l.

II.3.2.3.Technique des isotopes stables: [17]

En utilisant les isotopes stables ^{18}O et ^2H cette méthode a permis à Allison et al. (1984), à l'aide d'un modèle simple qui calcule l'évaporation en fonction du temps, de faire des observations pour une gamme de recharge de 1 à 140 mm/an dans des sites sélectionnés en Australie. Ce modèle montre la relation entre l'enrichissement en isotope lourd et la recharge et permet de la quantifier.

Cette méthode s'est avérée approximative et il est difficile de fixer des limites de confiance aux estimations de la recharge. Elles devraient être confortées par d'autres méthodes de calcul plus directes.

II.3.2.4.Comparaison entre les trois méthodes géochimiques: [17]

Sur les trois méthodes de traceurs possibles (isotopes radioactifs, Isotopes Stables et Chlorures) la méthode du chlorure attire plus spécialement parce qu'il est le traceur le moins coûteux pour l'estimation de la recharge.

II.3.3.Méthode hydrodynamique:

Dans la méthode hydrodynamique, la recharge est déterminée par le calcul de flux de l'eau souterraine. Ce flux est déterminé par des mesures séparées du gradient hydraulique et de la conductivité hydraulique. [17]

II.3.4.L'estimation de la recharge par des modèles numériques :

La modélisation numérique des recharges des nappes a déjà fait l'objet de nombreuses recherches. Plusieurs modèles numériques sont développés afin d'évaluer le taux de recharge des nappes et de définir le mécanisme de ce processus.

La modélisation d'aquifère par un maillage rectangulaire en régime transitoire pour le calcul de la recharge est utilisée avec la méthode des différences finies et celle des éléments finis. [17]

Conclusion:

Pour conclure, on peut dire que la ressource d'eau souterraine peut être renouvelée. Ce renouvellement ou recharge peut se faire naturellement surtout par infiltration des précipitations ou artificiellement par divers moyens dont le but surtout de satisfaire les besoins en eau et de lutter contre l'intrusion marine.

Néanmoins ce recharge artificielle nécessite certains condition qu'il faut tenir on compte avant toute opération de recharge artificielle.

On a vue aussi que le processus de recharge peut être quantifié par plusieurs méthodes et techniques .certains de ces méthodes sont de type hydrologique, d'autre sont de caractères géochimiques ou hydrodynamiques et certains d'autres sont basées sur des modèles numériques.

Dans notre travail on ne s'occupe pas de calculer le taux de recharge mais on impose la recharge comme condition aux limites et on va voir l'évolution de niveau piézométrique de la nappe dans l'espace et dans le temps en fonction de la recharge et on tenant compte des débits pompé.



CHAPITRE III:

Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain



Introduction:

Les équations d'écoulement pour tous les types d'aquifères sont obtenues à partir de deux principes de base :

- Le principe de continuité.
- La loi de Darcy.

Le principe de continuité consiste à conserver la masse d'eau et à établir le fait qu'il ne peut pas y avoir de changement net de la masse d'un fluide contenu dans un petit volume d'aquifère.

Le principe consiste à compenser tout changement dans la masse qui s'écoule dans un petit élément de volume de l'aquifère par un changement correspondant dans l'écoulement de masse en dehors du volume, ou un changement dans la masse contenue dans le volume, ou les deux à la fois.

La loi de Darcy est la loi physique fondamentale dans l'étude déterministe des problèmes d'aquifère, elle affirme que dans un milieu poreux isotrope, le débit spécifique (le débit d'écoulement par unité de surface) est directement proportionnel au gradient de la charge ou gradient hydraulique. C'est sur cette base physique que les équations générales de l'écoulement souterrain ont été définies.

Deux types de lois de la physique sont utilisés pour résoudre le problème, une loi de comportement ou de constitution et une loi de conservation. Exprimées mathématiquement et combinées, ces lois permettent de d'obtenir une équations aux dérivées partielles qui représenteront le problème physique. C'est l'équation d'écoulement qu'on va résoudre numériquement par la méthode des éléments finis.

III.1.Loi de comportement: [22]

Une loi de comportement établit une relation entre le potentiel et le flux. Dans le cas de notre étude, La loi de comportement est celle de Darcy .Sa dérivation se retrouve chez plusieurs auteurs, soit sous forme de description expérimentale, soit sous forme de description mathématique. Très souvent, ces lois ont été établies d'abord de façon empirique et prennent la forme mathématique générale :

$$\vec{q} = -[\kappa]\text{grad}\bar{U} \quad (\text{III.1})$$

Où \vec{q} est le vecteur flux, $\text{grad}\bar{U}$ est le gradient du potentiel \bar{U} et $[\kappa]$ est le paramètre de transfert (facteur de proportionnalité). Le signe négatif indique que le flux est positif lorsque le gradient du potentiel est négatif, c'est-à-dire qu'il diminue dans la direction du transfert.

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

Afin de comprendre la forme mathématique, nous commençons par une description de l'expérience de Darcy qui est à l'origine de cette formulation mathématique.

III.1.1.description expérimentale de loi de comportement (loi de Darcy): [7]

En 1856 Henri Darcy a publié une expérience de transfert d'eau à travers un milieu poreux dans un livre intitulé «les fontaines publiques de la ville de Dijon».dans son expérience il a mesuré le flux d'eau ($Q=m^3/s$) à travers une filtre composé de sable. Darcy a relié le flux à la section (aire) du filtre et au gradient hydraulique. Il a appelé conductivité hydraulique la constante qui relie ces paramètres.

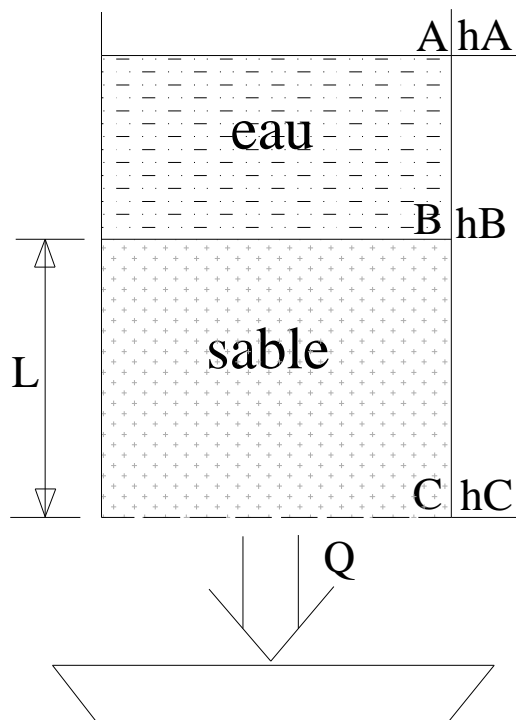


Figure.III.1.expérience de Darcy. [7]

Les résultats de l'expérience de Darcy sont les suivants:

1. Q est proportionnel à la surface A du filtre;
2. Q est proportionnel à h_A-h_b ;
3. Q est inversement proportionnel à L la longueur du filtre;
4. la constante de proportionnalité (K) dépend du matériaux poreux . K dépend de la taille des grains et de la connectivité des pores;

Cette loi peut être résumé par:

$$Q=K.A.I \quad (III.2)$$

Où

Q :flux d'eau ou débit (L^3 /T);

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

K:conductivité hydraulique (L/T);

A:surface traversé par le fluide (L^2);

I:gradient hydraulique (sans unité)=(h_A-h_B)/L;

Plus généralement cette loi s'écrit: $Q=K.A.dh/dL$;

Le signe est choisit tel qu'il indique que le fluide s'écoule dans la direction de diminution de gradient hydraulique.

La conductivité hydraulique s'écrit donc:

$$K=Q/(A.dh/dL) \quad (III.3)$$

Q est aussi inversement proportionnel a la viscosité du fluide et proportionnel a sa densité. Q dépend aussi de la forme des grains et de la connectivité des pores. On peut alors écrire le flux:

$$Q = \frac{\rho.g}{\mu} .k. \frac{dh}{dL} .A \quad (III.4)$$

Où:

k:c'est la perméabilité en m^2 ;

μ : Viscosité dynamique en pas.s;

ρ : masse volumique du fluide;

g: gravité en m/s^2 .

On définit aussi la vitesse de filtration par:

$$V=Q/A \quad (III.5)$$

V:est en m/s .

III.1.2.Description mathématique de loi de Darcy: [22]

Afin de la présenter conformément à l'approche et aux notations adoptées dans ce travail, nous reprenons brièvement sa dérivation pour un fluide newtonien incompressible. Cette loi montre que le débit spécifique d'écoulement est directement proportionnel au gradient hydraulique.

$$\vec{q} = -K . \vec{\nabla} h \quad (III.6)$$

$$\vec{q} = (q_x, q_y) \text{ et } \vec{\nabla} = \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y} \right) \quad (III.7)$$

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

Où K est le coefficient de proportionnalité qui définit la conductivité hydraulique. Par convention, le signe négatif indique que l'écoulement se fait dans la direction des charges hydrauliques décroissantes.

Les aquifères homogènes ont les mêmes propriétés en tout point, c'est-à-dire que la distribution granulométrique, la porosité et l'épaisseur ne varient qu'à l'intérieur de limites très petites. Les valeurs de transmissivité et de coefficient d'emmagasinement de l'unité doivent aussi être les mêmes. Dans les formations hétérogènes, les propriétés hydrauliques changent d'un point à un autre. L'hétérogénéité provient souvent des processus sédimentaires qui modifient la composition d'une couche par rapport à l'autre.

Dans un milieu poreux dont la géométrie des pores est la même dans toutes les directions, la perméabilité de l'unité sera donc la même dans toutes les directions et l'unité est considérée comme isotrope. D'autre part, si la géométrie des pores n'est pas uniforme, il peut y avoir une direction selon laquelle la perméabilité est plus grande ou plus petite. Le milieu est alors anisotrope.

Dans les aquifères anisotropes, une forme généralisée de la loi de Darcy peut être appliquée :

$$\vec{q} = -\overline{\overline{K}}(h) \vec{\nabla} h \quad (\text{III.8})$$

Où: $\overline{\overline{K}} = \begin{pmatrix} k(h)_{xx} & k(h)_{xy} \\ k(h)_{yx} & k(h)_{yy} \end{pmatrix}$ est le tenseur de second ordre de la conductivité

hydraulique.

Dans les milieux anisotropes la direction de l'écoulement peut être différente de celle du gradient de la charge.

Limites de la loi de Darcy: [7]

La loi de Darcy n'est applicable que pour l'écoulement laminaire. En général la loi de Darcy considère que l'eau se propage dans un milieu homogène et continu, et que la structure des particules solides et microscopique par rapport au champ d'observation. La loi de Darcy ne s'applique donc pas à l'écoulement en milieu fissuré.

III.2. Le Principe de continuité: [22]

La loi de conservation (ou principe de continuité) est une expression du principe de Lavoisier.

Cette loi spécifie que la masse ou l'énergie est conservée dans le domaine considéré.

Cette loi implique que dans un volume quelconque limité par une surface, nous obtenons une somme nulle : des flux qui entrent et sortent à travers la surface du

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

domaine, des sources (positives ou négatives) de masse ou d'énergie à l'intérieur du domaine et du changement d'emmagasinement de la masse ou de l'énergie dans le domaine. Exprimée mathématiquement, cette loi permet de dériver la forme générale de l'équation différentielle fondamentale applicable à notre problème physique.

La loi de continuité peut être exprimée selon plusieurs formes, deux formes seront prise en considération dans notre travail, la première forme est pour aboutir au modèle d'écoulement en milieu saturé, la deuxième forme est pour l'obtention de l'équation d'écoulement en milieu saturé/non saturé.

III.2.1.première forme de loi de continuité: [22]

L'équation différentielle de l'écoulement est obtenue en prenant un volume de contrôle infinitésimal étendu sur la direction verticale de l'aquifère, (figure III.2).

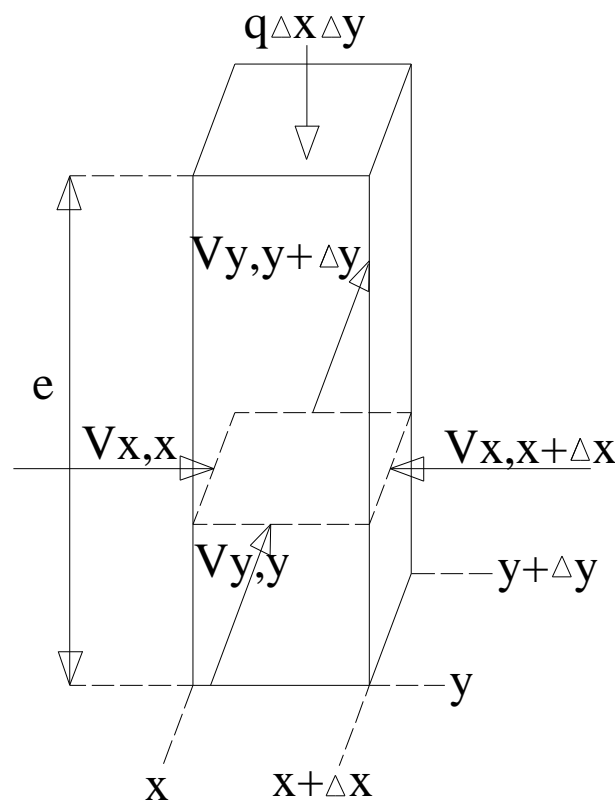


Figure III.2. Volume de contrôle infinitésimal. [22]

Sur un intervalle de temps $[t + \Delta t]$, le débit net qui entre dans le volume de contrôle doit équilibrer la diminution de l'eau emmagasinée. Par hypothèse, le débit qui entre est positif et celui qui sort est négatif. Sur le terrain, il est plus courant d'observer qu'une partie significative de l'écoulement est générée par infiltration dans l'aquifère à partir de couches moins perméables situées au-dessus et en dessous. C'est le phénomène de drainance qu'on a déjà expliqué dans le deuxième chapitre.

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

On considère seulement les écoulements horizontaux et le phénomène d'accumulation ou de drainance.

$$\Delta t \left[(e v_x)_{x+\Delta x} \cdot \Delta y - (e v_x)_x \cdot \Delta y + (e v_y)_{y+\Delta y} \cdot \Delta x - (e v_y)_y \cdot \Delta x + q \Delta x \Delta y \right] = S \Delta x \Delta y (h_{t+\Delta t} - h_t) \quad (\text{III.9})$$

Où:

S: Coefficient d'emmagasinement (sans unité) ;

e: L'épaisseur de l'écoulement saturé en m ;

q: Taux de recharge ou recharge de la nappe en m/s (débit par unité de surface).

Divisons l'équation (III.9) par $\Delta t \Delta x \Delta y$ et prenons les limites $\Delta x \rightarrow 0$,

$\Delta y \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\nabla(e\vec{v}) + q = S \frac{\delta h}{\delta t} \quad (\text{III.10})$$

III.2.2. deuxième forme de loi de continuité: [21]

L'équation de continuité peut être écrite sous une autre forme :

$$C'(h) \cdot \frac{\delta h}{\delta t} = -\vec{\nabla} \bar{q} \quad (\text{III.11})$$

$C'(h)$: C'est le coefficient d'emmagasinement généralisé dépendant du degré de saturation en eau du milieu et de la compressibilité de l'eau et de la matrice poreuse.

III.3. modèles d'écoulement:

L'équation différentielle peut être représentée par différentes classes de modèles dont chaque modèle a ses hypothèses constitutives. Nous commenceront par une description du modèle d'écoulement en milieu saturé puis on va entamer la partie de l'écoulement en milieu variablement saturé qui est représenté par l'équation de Richards.

III.3.1. modèle (équations) d'écoulement en milieu saturé: [22]

Les modèles « saturés » ne gèrent pas les écoulements dans la zone non saturée, le système ayant comme limite supérieure la surface libre de la nappe.

III.3.1.1. modèle d'écoulement en Aquifère captive:

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

Si nous combinons l'équation (III.10) avec la forme généralisée de la loi de Darcy nous obtenons l'équation d'écoulement écrite comme suit:

$$\vec{\nabla} \left(e \overline{\overline{K}}(h) \cdot \vec{\nabla} h \right) + q = S \frac{\delta h}{\delta t} \quad (\text{III.12})$$

Où,

$$\vec{\nabla} \left(\overline{\overline{T}}(h) \vec{\nabla} h \right) + q = S \frac{\delta h}{\delta t} \quad (\text{III.13})$$

$\overline{\overline{T}}$ est le tenseur de transmissivité. Dans un aquifère isotrope $\overline{\overline{T}}$ devient un scalaire T, et l'équation (III.13) devient:

$$T \left(\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h}{\delta y^2} \right) + q = S \frac{\delta h}{\delta t} \quad (\text{III.14})$$

Qui est la forme générale de l'équation d'écoulement en deux dimensions. Dans les écoulements en régime permanent, il n'y a pas de changement dans la charge hydraulique en fonction du temps, c'est-à-dire que la position et la pente de la surface piézométrique sont constantes. Dans de telles conditions, le temps n'est plus une variable indépendante et l'écoulement permanent peut être décrit par l'équation différentielle connue sous le nom d'équation de Poisson :

$$T \left(\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h}{\delta y^2} \right) + q = 0 \quad (\text{III.15})$$

Le taux d'écoulement vertical, q, peut être déterminé à partir de la loi de Darcy. Si la charge au sommet de la couche semi-perméable est h', la charge dans l'aquifère immédiatement en dessous est h, et que la couche semi-perméable a une épaisseur m et une conductivité verticale K_v , alors,

$$q = K_v \left(\frac{h - h'}{m} \right) \quad (\text{III.16})$$

III.3.1.2. Equation d'écoulement en Aquifère phréatique (libre):

Les problèmes d'aquifères phréatiques ou aquifères non confinés méritent une attention particulière. Ils sont très importants, parce que beaucoup de systèmes d'aquifères sont non confinés ou se composent de portions non confinées. Leur

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

traitement numérique est plus compliqué que celui des nappes captives ou semi captives parce que leur formulation est non linéaire.

L'équation correspondante aux aquifères phréatique est obtenue facilement à partir de celle des aquifères captifs en faisant deux modifications. Dans les nappes captives, la transmissivité est fonction seulement de l'épaisseur de l'aquifère et du coefficient de perméabilité. Elle devient fonction de la charge dans les aquifères phréatique ou l'épaisseur de la nappe varie avec l'élévation de la nappe d'eau.

Dans ces conditions, la capacité des aquifères à transporter de l'eau, leur transmissivité, change puisqu'elle est le produit de la conductivité hydraulique et de l'épaisseur saturée. Dans le cas des aquifères captifs, le coefficient d'emmagasinement reflète l'emmagasinement par compressibilité mais dans l'aquifère phréatique, le coefficient d'emmagasinement par compressibilité peut être négligé en comparaison à celui résultant du mouvement de la nappe d'eau, (figure III.3)

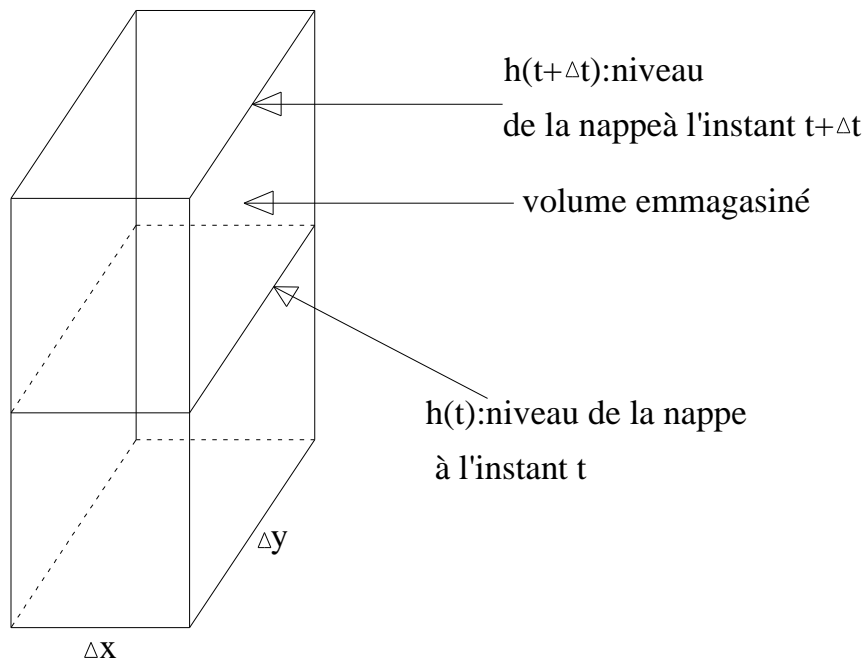


Figure III.3. Mécanisme d'emmagasinement dans un aquifère phréatique. [22]

L'équation d'écoulement dans un milieu anisotrope devient la suivante :

$$\vec{\nabla} \left((h) \cdot \overline{\overline{K}} \cdot \vec{\nabla} h \right) + q = n_d \frac{\delta h}{\delta t} \quad (\text{III.17})$$

Où n_d : porosité de drainage.

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

Et dans un milieu isotrope on obtient l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{K}(h) \cdot \vec{\nabla} h) + q = n_d \frac{\delta h}{\delta t} \quad (\text{III.18})$$

L'équation d'écoulement en deux dimensions dans des aquifères libres est connue sous le nom d'équation de Boussinesq (milieu isotrope) :

$$\mathbf{K}(h) \left[\frac{\delta}{\delta x} \left(h \frac{\delta h}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(h \frac{\delta h}{\delta y} \right) \right] + q = n_d \frac{\delta h}{\delta t} \quad (\text{III.19})$$

Cette équation différentielle est non linéaire et ne peut être résolue directement sauf pour de rares exceptions. Une méthode numérique peut donner des solutions avec une bonne approximation.

L'hypothèse d'écoulement essentiellement plan dans les problèmes des nappes phréatiques a été systématisé par Dupuit en 1863 et est connue sous le nom de théorie de Dupuit. Puisque c'est une théorie qui est très utilisée dans les problèmes d'aquifères, il importe de bien connaître ses limitations. La théorie de Dupuit ne peut s'appliquer là où la composante verticale de l'écoulement ne peut être négligée, telle qu'à l'approche d'une surface de suintement ou d'une frontière verticale imperméable comme le montre les figures III.4 et III.5.

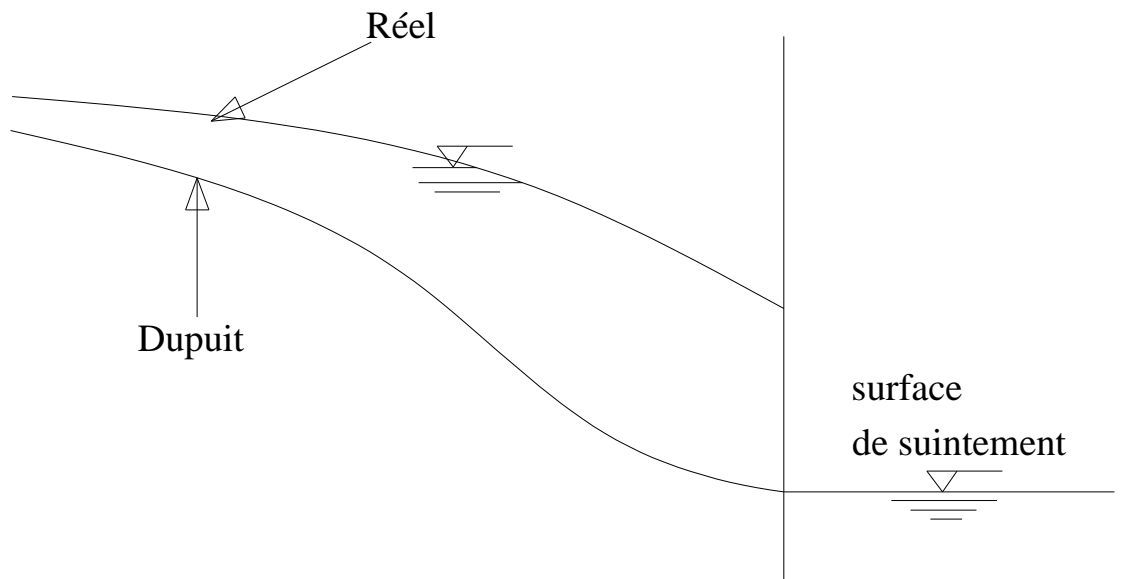


Figure III.4. Erreur de la théorie de Dupuit en présence de surface de suintement. [22]

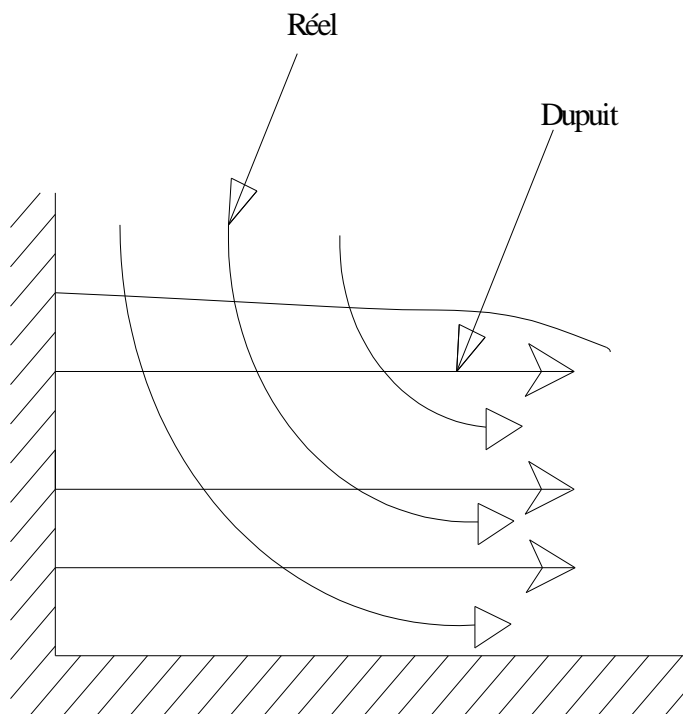


Figure III.5. Erreur de la théorie de Dupuit près d'une frontière imperméable verticale. [22]

L'estimation de l'erreur de la théorie de Dupuit est un sujet qui a intéressé plusieurs chercheurs, ils ont démontré, en utilisant des cas simples (écoulement unidimensionnel et stationnaire), que cette erreur est $\frac{\delta h}{\delta x}$ directement proportionnelle à la pente de la surface libre.

L'erreur de l'hypothèse d'écoulement plan est d'autant plus petite que la pente de la surface libre est petite. Plus cette pente est faible, meilleure est la théorie de Dupuit. L'étude d'erreur ainsi faite par un grand nombre de chercheurs est généralisable pour inclure la direction y et la surface libre non stationnaire.

Cependant il est possible de linéariser l'équation de Boussinesq en faisant l'hypothèse que les fluctuations du toit de la nappe sont faibles par rapport à l'épaisseur de celle-ci. On aboutit alors une équation linéaire de diffusion simple, largement utilisée par les hydrogéologues et connue sous le nom « d'équation de la diffusivité ». [2]

III.3.2. Modèle d'écoulement en milieu variablement saturé (saturé/non saturé):

L'approche la plus classique pour simuler les écoulements de l'eau dans un sol repose sur la modélisation dite « saturée - non saturée » ou « complète » qui considère l'ensemble du système constitué par la nappe et la zone non saturée entre la surface du sol et le toit de la nappe. Dans ce cas, le modèle est fondé sur l'équation dite de Richards (1931), et nécessite – outre la définition des conditions aux limites - la connaissance de deux fonctions décrivant les propriétés hydrodynamiques du sol (relation pression - teneur en eau, relation conductivité hydraulique - teneur en eau). L'équation de Richards permet de déterminer les champs de potentiels (charge hydraulique totale) et la répartition de la teneur en eau dans le sol, la position de la nappe n'étant déterminée qu'a posteriori comme étant la zone où la pression de l'eau est supérieure à la pression atmosphérique. L'équation de Richards permet de décrire les écoulements dans les trois dimensions de l'espace. C'est une équation non-linéaire comme l'équation de Boussinesq dont la résolution nécessite l'utilisation d'outils numériques spécifiques en général fondés sur des éléments finis et un maillage pouvant se déformer avec le domaine.

L'équation de Richards (1931) décrit les transferts d'eau dans un milieu poreux variablement saturé. Elle découle de la combinaison de la loi de Darcy généralisée (III.8) avec l'équation de continuité écrite sous la forme (III.11). On obtient alors l'équation suivante (sous l'hypothèse d'un fluide incompressible de masse volumique et de viscosité dynamique constante):

$$C'(h) \frac{\delta h}{\delta t} = \vec{\nabla} \cdot [\overline{\mathbf{K}}(h) \cdot \vec{\nabla} h] \quad (\text{III.20})$$

Cette égalité ne peut être vérifiée que si le terme source est introduit dans l'équation. On obtient alors:

$$C'(h) \frac{\delta h}{\delta t} = \vec{\nabla} \left[\overline{\overline{K}}(h) \cdot \vec{\nabla} h \right] + r \quad (\text{III.21})$$

C'est l'équation générale de Richards qui tient compte des deux zones saturée et non saturée. [20]

Où:

r: représente le terme source (débit par unité de volume:entrant ou sortant (prélèvements) [T^{-1}];on cas des débits par unité de volume entrants cette valeur multipliée fois la longueur ça donne le taux de rechargement.

h: c'est la charge (L);

$\overline{\overline{K}}(h)$: est le tenseur de conductivité hydraulique (LT^{-1}).

$C'(h)$: c'est le coefficient d'emmagasinement généralisé dépendant du degré de saturation en eau du milieu et de la compressibilité de l'eau et de la matrice poreuse.

Evaluation du coefficient d'emmagasinement généralisé: [20]

Le coefficient d'emmagasinement généralisé est exprimé sous la forme suivante:

$$C'(h) = S_s + \frac{d\theta}{dh} \quad (\text{III.22})$$

Où θ est la teneur en eau.

Donc l'équation (III.21) devient:

$$\left(S_s + \frac{d\theta}{dh} \right) \frac{\delta h}{\delta t} = \vec{\nabla} \cdot \left[\overline{\overline{K}}(h) \cdot \vec{\nabla} h \right] + r \quad (\text{III.23})$$

Dans la zone saturé on considère généralement que la teneur en eau θ est constante ($\theta = \theta_s = \text{cte}$), donc:

$$\frac{d\theta}{dh} \approx 0 \quad (\text{III.24})$$

D'où l'équation (III.23) devient:

$$S_s \frac{\delta h}{\delta t} = \vec{\nabla} \left[\overline{\overline{K}}(h) \cdot \vec{\nabla} h \right] + r \quad (\text{III.25})$$

C'est l'équation de Richards en zone saturée (formulation en h). [20]

Dans la zone non saturée, on peut négliger l'influence du coefficient d'emmagasinement spécifique (S_s) vis-à-vis du terme de stockage de l'eau :

$$S_s \ll \frac{d\theta}{dh} \quad (\text{III.26})$$

Et on a:

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dh} \cdot \frac{\delta h}{\delta t} \quad (\text{III.27})$$

$$\text{Et: } \frac{d\theta}{dh} = C(h) \quad (\text{III.28})$$

C(h) étant la capacité capillaire (L^{-1}).

D'où l'équation (III.23) devient:

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = \vec{\nabla} \left[\bar{K}(h) \cdot \vec{\nabla} h \right] + r \quad (\text{III.29})$$

C'est l'équation de Richards en zone non saturée (formulation mixte). [20]

L'équation générale de Richards s'écrit alors sous la forme: [20]

$$S_s \frac{\delta h}{\delta t} + \frac{\delta\theta}{\delta t} = \vec{\nabla} \left[\bar{K}(h) \cdot \vec{\nabla} h \right] + r \quad (\text{III.30})$$

III.4. Solutions analytiques de l'équation d'écoulement :

En général, pour obtenir la solution analytique exacte à l'équation différentielle, il faut idéaliser fortement, et peut être de manière irréaliste, les propriétés et les conditions aux limites du système aquifère. Dans la plupart des problèmes de terrain, les avantages mathématiques d'avoir une solution analytique exacte sont probablement contrecarrés par les erreurs dues aux hypothèses simplificatrices, relatives à l'environnement complexe du terrain, nécessaires pour l'application du modèle analytique.

Dans la section suivante nous allons présenter quelques solutions analytiques de l'équation d'écoulement.

III.4.1. Solution de Dupuit-Forchheimer : [19]

Dupuit (1863) et Forchheimer (1886) ont résolu, indépendamment, l'équation de Laplace en régime permanent pour une nappe libre. Ils ont proposé de négliger la variation de la charge avec la verticale ; l'écoulement est donc considéré essentiellement horizontal. Cette hypothèse est applicable pour des faibles gradients hydrauliques et pour les nappes limitées en bas par un substratum horizontal imperméable pris comme niveau de référence de la charge.

S'il n'existe aucune infiltration efficace ni perte par évaporation à travers la surface libre de la nappe, le débit q par unité de la largeur, qui traverse la section 1 est le même que celui qui traverse la section 2. Si le substratum est horizontal, $h_1 > h_2$ implique que la section d'écoulement 1 est plus grande que la section 2.

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

La conservation du débit entre ces deux sections se traduit par un gradient plus fort à la section 2 qu'à la section 1. Ainsi, le gradient de la surface libre n'est pas constant et croît dans la direction de l'écoulement. Le débit W par unité de largeur déterminé par la loi de Darcy est :

$$W = -Kh \frac{dh}{dx} \quad (\text{III.31})$$

A : $x=0$, on a $h=h_1$, et à $x=L$, on a $h=h_2$, avec L = distance entre les deux puits d'observation. L'intégration de l'équation (III.31) et l'introduction des conditions aux limites donnent :

$$W = -\frac{1}{2} K \left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{L} \right) \quad (\text{III.32})$$

De cette dernière, on peut tirer la charge hydraulique h à une distance x comme suit :

$$h_x = \sqrt{h_1^2 - \frac{2x}{L} (h_1^2 - h_2^2)} \quad (\text{III.33})$$

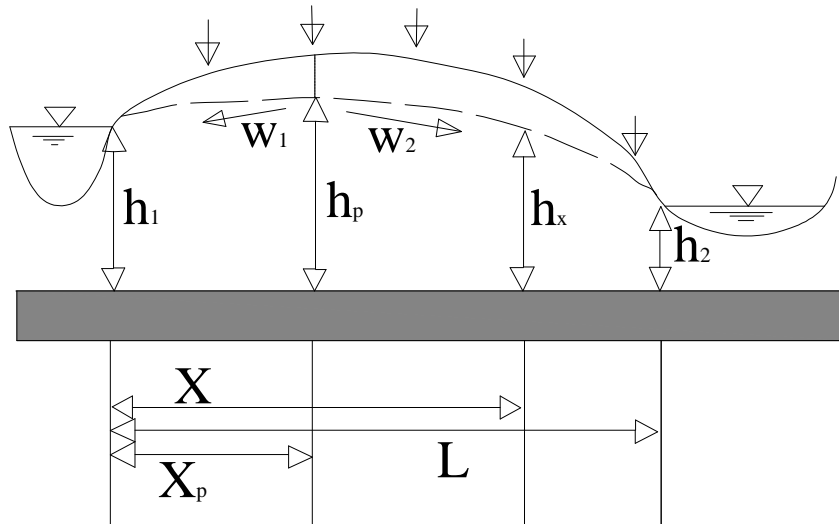


Figure III.6. Profil piézométrique d'une nappe libre située entre deux cours d'eau et alimentée par l'infiltration verticale des précipitations. [19]

III.4.2. Solutions de l'équation de Boussinesq : [19]

Chapitre III Description mathématique des équations de l'écoulement souterrain

En utilisant la méthode de séparation des variables, Boussinesq a pu résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{S_p}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.34})$$

En supposant que $h=h(x,t)$ peut être écrite comme le produit de deux fonctions indépendantes, $h(x,t) = X(x).T(t)$, D'où l'équation (III.34) Devient:

$$\frac{\partial^2(X^2)}{\partial x^2} T^2 = \frac{2S_p}{K} \frac{\partial T}{\partial t} X \quad (\text{III.35})$$

Soit:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2(X^2)}{\partial x^2} = \frac{1}{T^2} \frac{2S_p}{K} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.36})$$

Comme la partie gauche ne dépend que de x et la partie droite, que de t , l'équation implique que chacune de ces deux parties soit égale à une constante indépendante de x et de t (posée comme étant $-\lambda^2$). On a donc, d'une part:

$$-\lambda^2 = \frac{2S_p}{T^2 K} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\lambda^2 K}{2S_p} T^2 = 0 \quad (\text{III.37})$$

Et, d'autre part:

$$-\lambda^2 = \frac{1}{X} \frac{\partial^2(X^2)}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2(X^2)}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (\text{III.38})$$

Qui sont des équations différentielles intégrables. La solution de l'équation (III.37) est donc :

$$T(t) = \frac{1}{A + \frac{\lambda^2 K t}{2S_p}} \quad (\text{III.39})$$

Ou A est une constante d'intégration. La solution de l'équation (III.39) est donnée par Boussinesq :

$$X(x) = B.F \left(\frac{\lambda x}{\alpha \sqrt{3B}} + \frac{C}{\alpha} \right); \quad (\text{III.40})$$

$$\text{Avec: } \alpha = \int_0^1 \frac{\tau \cdot d\tau}{\sqrt{A - \tau^3}} = 0,862$$

Ou B et C sont des constantes d'intégration ; τ une variable d'intégration ; F(x) une fonction auxiliaire donnée par :

$$x = \frac{1}{\alpha} \int_0^F \frac{\tau \cdot d\tau}{\sqrt{1 - \tau^3}}; \quad x \leq 0 \text{ et } F \leq 1 \quad (\text{III.41})$$

La solution de Boussinesq est :

$$h = \frac{\text{BF} \left(\frac{\lambda x}{\alpha \sqrt{3B}} + \frac{C}{\alpha} \right)}{A + \frac{\lambda^2 K t}{2S_p}} \quad (\text{III.42})$$

III.5. Les conditions aux limites: [A]

Pour obtenir une solution unique à l'équation partielle différentielle représentant un processus physique donné, il faut des informations supplémentaires sur l'état physique du processus. Cette information est fournie par les conditions initiales et les conditions aux limites. Pour des problèmes associés au régime permanent, seul les conditions aux limites sont utiles, alors qu'en régime transitoire, les deux types de conditions doivent être spécifiées.

Mathématiquement, les conditions aux limites comprennent la géométrie des limites et les valeurs des variables dépendantes ou de leurs dérivées aux limites. En termes physiques, pour les applications de modèles hydrogéologiques, les conditions aux limites sont généralement de trois types:

- Charge (potentiel) imposé;
- flux imposé;
- flux à valeur dépendante (ou condition aux limites mixte, dans laquelle l'écoulement à travers la frontière est lié à la fois à la valeur et à sa dérivée).

Pour faciliter la compréhension de cette classification, nous supposons que la frontière S est constituée de trois parties schématisées par la figure III.7.

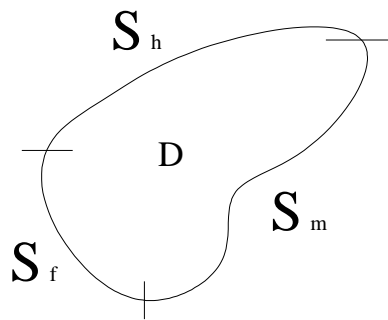


Figure.III.7. Représentation Schématique d'un domaine et de ces frontières. [3]

$$S = S_f + S_h + S_m \quad (\text{III.43})$$

Où,

S_h Représente la portion de S où seuls les variables h sont connus : Type Dirichlet;

S_f Représente la portion de S où seuls les débits ou flux sont connus : Type Neumann;

S_m : représente la portion de S où les variables et les flux sont prescrits : Type Cauchy.

III.5.1. Dirichlet (potentiel imposé):

Pour ce type de conditions aux limites, une valeur constante de potentiel h est imposée sur une portion de la limite du domaine considéré. En hydrogéologie, nous imposons une valeur de la charge hydraulique. Dans les aquifères, le cas le plus courant de limite de type Dirichlet est celui de corps d'eau (lacs, marécages, cours d'eau) en contact avec l'aquifère. Souvent on suppose que le pompage dans un puits d'un aquifère étendu, n'a pas d'influence sur la charge loin du puits.

Le potentiel imposé peut être une fonction de l'espace et du temps, connue et imposée.

Mathématiquement, ce type de condition s'exprime par l'établissement d'une valeur moyenne soit sur une surface (3D), une section (2D) ou un point (1D) définis selon le système de coordonnées utilisé. Les limites aux valeurs prescrites sont définies par la portion S_h , de la frontière S sur laquelle les valeurs des variables dépendantes sont des fonctions connues.

$$h = h_c \text{ sur } S_k \quad (\text{III.44})$$

Lorsque h_c est une constante et que la variable h est la charge, nous avons une limite équilibrée.

Dans tous les cas, une condition à charge imposée doit être maniée avec beaucoup de précautions, car qui dit charge imposée dit absence de contrôle sur le flux. Dans le cas d'une modélisation, si les transmissivités dans la nappe ne sont pas représentatives de la réalité, les débits qui transitent au point de charge imposée seront tout à fait fantaisistes. Ainsi, il est dans le cas général plus judicieux de traiter une source ou une limite de recharge comme un lieu à débit imposé.

III.5.2. Limites aux débits prescrits: Type Newman:

Pour ce type de conditions aux limites, une valeur de flux \vec{q} est imposée sur la portion S_f de la limite du domaine considéré. Ce type de condition est le plus souvent utilisé en spécifiant une valeur de flux égale à zéro (flux nul) pour représenter une limite imperméable ou fermée ou un axe de symétrie dans le domaine considéré. L'équation de la surface S est de la forme :

$$S(x,y,z)=0 \quad (\text{III.45})$$

III.5.3. Limite mixte: Cauchy-Euler (flux imposé fonction du potentiel)

Lorsque sur une portion de la surface, les fonctions des variables et de leurs dérivées sont prescrites, nous avons une limite de type mixte ou de Cauchy. La surface libre peut être considérée comme une frontière de type Cauchy. Dans son traitement, on préfère y considérer indépendamment une limite de type Dirichlet et une limite de type Neumann.

En hydraulique souterraine, ce type de conditions aux limites est rarement utilisé, mais, une telle limite peut cependant servir à représenter l'infiltration en bordure ou sous une rivière ou un bassin dont le niveau peut varier.

Un exemple pour la spécification des conditions aux limites dans un aquifère est montré dans la Figure III.8. Au bord d'un aquifère phréatique peu profond, la limite peut varier selon le niveau de la nappe.

- **Limite A-B:** Charge imposée.
- **Limite B-C:** Flux imposé (nul).
- **Limite C-D:** Flux imposé (non nul).
- **Limite D-E:** Flux imposé (nul).
- **Limite E-A:** Flux imposé (non nul).

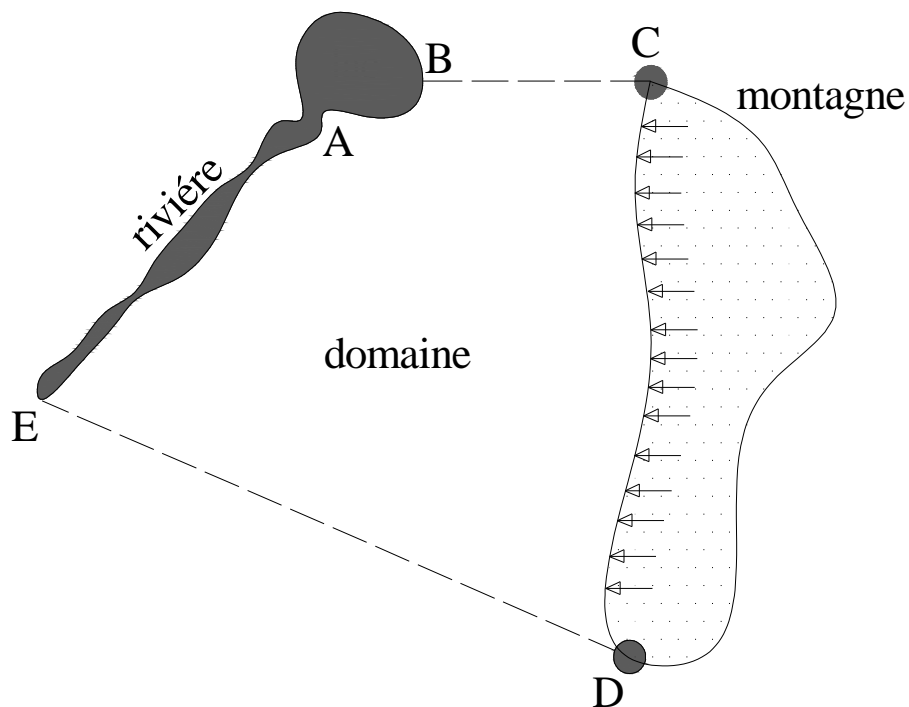


Figure III.8. Exemple de conditions aux limites. Vue en plan d'un aquifère. [22]

III.5.4. Les conditions initiales:

Les conditions initiales (nécessaires pour résoudre l'équation d'écoulement en régime transitoire) spécifient la distribution initiale du potentiel dans tout le domaine considéré au temps zéro. Cette valeur doit être définie pour que le problème soit déterminé.

$$\text{À } t=0, \bar{U}(x, y, z, t) = \bar{U}_0 \quad (\text{III.46})$$

Conclusion:

Ce chapitre représente une synthèse bibliographique contenant l'aspect mathématique de la modélisation des écoulements en milieux poreux à surface libre. On a vu qu'il existe différentes classes de modèles d'écoulement: le modèle saturé qui ne tient pas compte de la zone non saturée et le modèle « saturé - non saturé » ou complet qui tient compte à la fois de la zone saturée et la zone non saturée.

Le modèle saturé est fondé sur l'équation de Boussinesq, tandis que le modèle « saturé - non saturé » est fondé sur l'équation de Richards. Cette dernière prend deux formes selon qu'on est en zone saturée ou en zone non saturée.

Ce qui nous intéresse dans cette étude c'est le développement d'un programme de calcul en éléments finis qui permet la résolution numérique de l'équation de Richards.



CHAPITRE IV:

Modélisation numérique par la méthode des éléments finis



Introduction:

Les équations décrites dans le chapitre précédent, celles qui tiennent compte à la fois de la zone saturée et de la zone non saturée, ont été résolues par la méthode des éléments finis que l'on exposera en détail dans ce chapitre. On présentera, d'abord, la méthode générale adaptée au type de problème qui nous concerne, puis on va voir dans les prochains chapitres sa mise en application. Ces méthodes ont été programmées dans l'environnement de programmation FORTRAN.

IV.1. Les différentes étapes pour modéliser numériquement un système complexe:
[5]

Les étapes à suivre lors de la modélisation numérique de n'importe quel système et avec n'importe quelle méthode numérique de discrétisation sont les suivantes:

- a) Recherche d'un modèle mathématique représentant la physique, mise en équation.
- b) Elaboration d'un maillage. Discrétisation des équations de la physique.
- c) Résolution des équations discrètes (souvent systèmes linéaires à résoudre).
- d) Transcription informatique et programmation des relations discrètes.
- e) Simulation numérique et exploitation des résultats.

L'ingénieur peut être amené à intervenir sur l'une ou plusieurs de ces différentes étapes.

IV.2. Passage d'un problème continu au problème discret: [5]

Pour passer d'un problème exact continu régi par une équation aux dérivées partielles (modèle mathématique) au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

- Les différences finis
- Les volumes finis
- Les éléments finis

IV.2.1. Les différences finis:

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre n_i de points discrets ou noeuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficulté de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

IV.2.2. Les volumes finis:

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en oeuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles.

Avantages : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.
Inconvénient : peu de résultats théoriques de convergence.

IV.2.3. Les éléments finis:

IV.2.3.1. définition:

La méthode des éléments finis est une méthode mathématique qui permet la résolution d'équations différentielles.

La résolution des équations différentielles est possible analytiquement pour des géométries et des cas simples. En revanche, cela devient impossible pour des systèmes complexes, discontinus, que l'on rencontre dans la pratique. C'est pourquoi les formulations permettant une approximation numérique sont plus indiquées. Une méthode s'est montrée particulièrement efficace: la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis permet aujourd'hui de répondre à de nombreuses questions dans les domaines statiques, dynamiques, thermiques, électromagnétique, fluides, acoustiques, etc.

La méthode des éléments finis est de nos jours un outil puissant, disponible à des coûts raisonnables. Le temps de modélisation est désormais réduit, tout simplement parce que la prise en main des logiciels est autrement plus aisée. La méthode des éléments finis est aujourd'hui plus facile d'accès, malgré tout une connaissance de base de la théorie sous-jacente et de ses limites est toujours nécessaire. Peut être même encore plus qu'avant.

La méthode des éléments finis ne remplace pas les connaissances techniques de l'ingénieur ni sa maîtrise de la physique. Elle est seulement un outil de calcul. Et cet outil n'est véritablement efficace que s'il est utilisé par un ingénieur qualifié et expérimenté.

IV.2.3.2. Principe générale de la méthode des éléments finis: [3]

La méthode des éléments finis est une méthode de discrétisation des formes intégrales de type Galerkin, elle remplace la forme intégrale globale par une somme de formes intégrales élémentaires puis discrétise celles-ci en utilisant une approximation par éléments finis. Ce qui conduit à l'obtention d'un système matricielle formé des matrices et des vecteurs élémentaires, puis ce système sera transformé en un système formé des matrices et des vecteurs globaux à l'aide de technique d'assemblage. Après l'introduction des conditions aux limites, ce système sera résolu par l'une des méthodes numériques.

IV.2.3.3. Formulation intégrale: [22]

Soit un domaine D quelconque auquel s'applique le système d'équations différentielles suivant :

$$\{\dot{U}\} + [L(U)]\{U\} = \{F\} \quad (IV.1)$$

Et S est le contour du domaine, sur lequel on retrouve les conditions aux limites suivantes.

$$\{C(U)\} = \{F\}_s \quad (IV.2)$$

Ce système d'équations différentielles s'écrit aussi sous la forme

$$\{R(U)\} = \{\dot{U}\} + [L(U)]\{U\} - \{F\} = 0 \quad (IV.3)$$

La relation (IV.3) s'écrit sous la forme variationnelle suivante:

$$W(U) = \int_D \langle \psi \rangle R(U) dD = 0 \quad (IV.4)$$

Ou encore:

$$W(U) = \int_D \langle \psi \rangle [\{\dot{U}\} + [L(U)]\{U\} - \{F\}] dD = 0 \quad (IV.5)$$

Avec $C(U) = F_s$ sur le contour du domaine S.

Où

$\{U\}$: Vecteur des fonctions solutions;
 $\{\dot{U}\}$: Vecteur des dérivées temporelles de $\{U\}$;
 $[L(U)]$: Opérateur des dérivées spatiales sur $\{U\}$;

$\{F\}$: Les forces volumiques;
 $\{R(U)\}$: Vecteur des résidus du système;
 $W(U)$: Expression variationnel.

La méthode des résidus pondérés consiste à chercher des fonctions U qui annulent la forme intégrale de l'équation (IV.5) dans laquelle ψ est une fonction de pondération. ψ et U doivent satisfaire les conditions aux limites et être dérivables jusqu'à l'ordre n , où n est l'ordre de dérivée maximale du système d'équations différentielles. La méthode la plus utilisée qui nous propose un choix pour les fonctions de pondération ψ est celle de Galerkin.

IV.2.3.4. Formulation par éléments finis: Méthode de Galerkin: [3]

La méthode de Galerkin est la méthode de résidus pondérés la plus utilisée en éléments finis et c'est elle dont nous nous servons dans ce travail. La méthode de Galerkin consiste à choisir comme pondération les fonctions de base qui ont servi à construire la fonction d'interpolation.

À partir de la forme générale (IV.4)

$$\int_D \langle \psi \rangle R(U) dD = 0 \quad (IV.6)$$

On choisit:

$$\psi = \{N\}$$

Ceci permet d'écrire la méthode de Galerkin sous forme :

$$W = \int_D \{N\} R(U) dD = 0 \quad (IV.7)$$

Les fonctions de pondération N sont introduites dans la forme intégrale sous forme d'un vecteur colonne pour respecter les lois du produit matriciel et ainsi obtenir autant d'équations qu'il y a de fonctions de base.

Il est à noter que la méthode de Galerkin est souvent présentée sous la forme variationnelle, c'est-à-dire en posant :

$$\psi = \delta U \quad (IV.8)$$

Où δU est la première variation de U . La variation est ensuite exprimée par interpolation nodale soit:

$$\delta U = \langle \mathbf{N} \rangle \{ \delta U \} \quad (\text{IV.9})$$

La forme (IV.7) devient:

$$\mathbf{W} = \int_D \langle \delta U \rangle \{ \mathbf{N} \} \mathbf{R}(U) dD = 0 \quad (\text{IV.10})$$

Enfin puisque les $\langle \delta U \rangle$ ne sont pas fonctions du domaine géométrique D , ils peuvent être extraits de l'intégration, on retrouve alors la forme (IV.7):

$$\mathbf{W} = \langle \delta U \rangle \int_D \{ \mathbf{N} \} \mathbf{R}(U) dD = 0$$

Ou simplement

$$\mathbf{W} = \int_D \{ \mathbf{N} \} \mathbf{R}(U) dD = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Le vecteur $\{ \mathbf{N} \}$ représente ici les fonctions de base de l'approximation nodale de façon globale, c'est-à-dire valide sur l'ensemble du domaine D . Cependant sachant que les fonctions N sont définies seulement sur des sous-domaines élémentaires donc il est évident que la relation précédente ne peut être écrite en pratique. Nous utilisons donc la propriété de l'intégrale qui consiste à formuler l'intégrale d'un tout comme la somme des intégrales des parties connexes ; ainsi l'expression précédente devient:

$$\mathbf{W} = \sum \left[\int_e \{ \mathbf{N} \} \mathbf{R}(\langle \mathbf{N} \rangle \{ \mathbf{U} \}) dD \right] = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Ou les fonctions N sont alors associées spécifiquement à un élément et à ces inconnues, mais expriment aussi le fait que les autres inconnues ne participent pas à l'approximation.

Avec ce choix, il est possible de réduire les dérivées en utilisant une intégration par partie conduisant ainsi à des formes dites faibles.

Nous pouvons écrire la forme intégrale du modèle d'écoulement souterrain (équation de Richards) à partir de l'application de la méthode de Galerkin de la manière suivante :

$$\int_D \delta h \left[C'(h) \cdot \frac{\delta h}{\delta t} - \left(\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{K}}(h) \cdot \nabla(h) + r \right) \right] dD = 0 \quad (\text{IV.13})$$

$$\text{Tel que: } \left(S_s + \frac{d\theta}{dh} \right) = C'(h)$$

Afin de transformer le modèle intégro-différentiel en un système d'équations différentielles, il suffit de remplacer les fonctions continues h , δh , par des fonctions paramétriques obtenues par approximation nodale c'est-à-dire, utilisant comme paramètres les valeurs discrètes de la fonction localisées en différents noeuds de l'élément.

Les fonctions d'approximations nodales seront basées sur une fonction polynomiale.

Ainsi, on écrira:

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \langle \mathbf{N} \rangle \{ \mathbf{U}_n \} \\ \delta \mathbf{U} = \langle \mathbf{N} \rangle \{ \delta \mathbf{U}_n \} \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

C'est-à-dire pour notre cas:

$$\begin{cases} \mathbf{h} = \langle \mathbf{N} \rangle \{ \mathbf{h}_n \} \\ \delta \mathbf{h} = \langle \mathbf{N} \rangle \{ \delta \mathbf{h}_n \} \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

Ceci nous permettra d'écrire les matrices et vecteurs élémentaires pour les assembler dans les matrices et vecteurs globaux. Comme le problème est non linéaire, nous utiliserons la méthode du point fixe pour les rendre linéaires (méthode itérative de résolution du système).

IV.2.3.5. Approximation par éléments finis: [3]

Cette section est consacrée aux techniques d'approximations grâce auxquelles nous pouvons remplacer un système continu par un système discrétisé équivalent. Nous commençons par décrire l'approximation nodale sur un domaine D , pour introduire ensuite la notion d'approximation nodale par sous domaines dite approximation par éléments finis. Pour cela nous présentons la technique de partition d'un domaine en éléments.

Les concepts de transformation géométrique et d'éléments de référence simplifient la construction des fonctions d'interpolation. Nous développons ensuite la technique générale de construction des fonctions d'interpolation sur un élément de référence. La transformation d'un élément de référence en élément réel est caractérisée par la matrice jacobienne.

IV.2.3.5.1. Approximation nodale:

Dans notre cas, le modèle mathématique fait intervenir une variables ou fonction exacte $u_{ex}(x)$. Celle-ci est représentée par une fonction approchée $u(x)$ telles que la différence (équation IV.16) soit assez petite. Pour construire une fonction approchée $u(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$, nous pouvons choisir un ensemble fini de fonctions dépendant de n paramètres a_i .

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x) \quad (IV.16)$$

Nous devons déterminer les paramètres a_1, a_2, \dots, a_n pour satisfaire la condition (IV.16), en faisant coïncider $u_{ex}(x)$ et $u(x)$ en n points x_1, x_2, \dots, x_n , c'est-à-dire en annulant $e(x)$ en ces n points.

La fonction approchée s'écrit de la manière suivante :

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \dots + N_n(x)u_n \quad (IV.17)$$

$$u(x) = \langle N_1(x) N_2(x) \dots N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (IV.18)$$

Par définition, Les paramètres a_i, u_i sont, respectivement, les paramètres généraux de l'approximation et les paramètres nodaux ou variables nodales de l'approximation. La relation (IV.16) définit une approximation nodale. Les fonctions $N(x)$ sont les fonctions d'interpolation.

IV.2.3.5.2. Dérivées de la fonction d'interpolation:

Dans le cas que nous considérons ici, c'est-à-dire l'emploi de fonctions d'interpolations polynomiales de degré $n-1$, il est évident que seules les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ existent. Ceci est extrêmement important en ce qui concerne le choix du degré d'une fonction d'interpolation en fonction de l'ordre de l'équation différentielle. Les dérivées des fonctions D'interpolation peuvent s'écrire, à une dimension par exemple :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \langle N_{,x} \rangle \{u\} \\ u''(x) &= \langle N_{,xx} \rangle \{u\} \end{aligned} \quad (IV.19)$$

IV.2.3.5.3.Approximation par éléments finis:

La méthode d'approximation nodale par sous domaines simplifie la construction de $u(x)$ et s'adapte très bien au calcul sur ordinateur. Cette méthode consiste à représenter le domaine D par un ensemble de sous domaines D^e .

$$D = \sum [D^e] \tag{IV.20}$$

L'expression de W s'écrit alors :

$$W = \sum [W^e] \tag{IV.21}$$

La méthode d'approximation par éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous domaines qui présente les particularités suivantes :

- ✓ L'approximation nodale sur chaque sous-domaine D^e ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des noeuds situés sur D^e et sur sa frontière.
- ✓ Les fonctions approchées $u^e(x)$ sur chaque sous-domaine D^e sont construites de manière à être continues sur D^e et elle satisfont des conditions de continuité entre les différents sous-domaines.

IV.2.3.5.4.Approximation sur un élément de référence:

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe nous utilisons l'élément de référence de forme très simple repéré dans un espace de référence qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique τ . par exemple dans le cas d'un élément carrés linéaire à 4 noeuds:

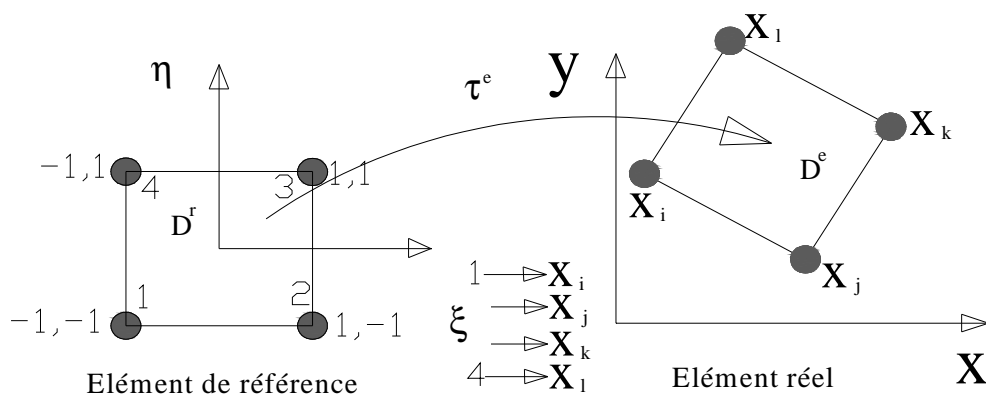


Figure IV.1.élément de référence et transformation géométrique en élément réel. [3]

Dans le cas de cette étude :

La transformation τ définit les coordonnées x de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées ξ du point correspondant de l'élément de référence.

$$\tau: \xi \rightarrow x = x(\xi) \quad (IV.22)$$

La transformation τ dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des noeuds géométriques qui le définissent. Il y a donc une transformation τ différente pour chaque élément réel :

$$\tau: \xi \rightarrow x = x(\xi, x_i, x_j, x_k, \dots) \quad (IV.23)$$

Où: x_i, x_j, x_k, \dots sont les coordonnées des noeuds géométriques qui appartiennent à l'élément e .

Chaque transformation est choisie de manière à présenter les propriétés suivantes:

- ✓ Elle est bijective en tout point (ξ, η) .
- ✓ Les noeuds géométriques de l'élément de référence se transforment en noeuds géométriques de l'élément réel.
- ✓ Chaque portion de frontière de l'élément de référence, définie par les noeuds géométriques de cette frontière, correspond à la portion de frontière de l'élément réel définie par les noeuds correspondants.

IV.2.3.5.5.Expression de la fonction approchée:

Nous choisissons sur le domaine D un ensemble de n noeuds d'interpolation de coordonnées x_i . Sur chaque élément D^e , nous utilisons une approximation nodale de type (IV.16) de la fonction exacte $u_{ex}(x)$:

$$u_{ex}(x_i) = u(x_i) = \langle N_1(x_i) N_2(x_i) \dots N_n(x_i) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{U_n\} \quad (IV.24)$$

Où:

x appartient à D^e ,

u_1, u_2, \dots, u_n sont les valeurs de u_{ex} aux n noeuds d'interpolation de l'élément, ou variables nodales, $N(x)$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

Remplaçons l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence:

$$u_{ex}(\xi) \approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} \quad (IV.25)$$

Avec:

$$\tau: \xi \rightarrow x(\xi) = \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{x_n\} \quad (IV.26)$$

Où $\{u_n\}$ sont les variables nodales de l'élément et $\langle \bar{N}(\xi) \rangle$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

IV.2.3.5.6. Propriétés de la fonction approchée:

IV.2.3.5.6.1. Propriétés fondamentales de l'approximation nodale:

La fonction approchée $u(x)$ coïncide avec la fonction exacte $u_{ex}(x)$ en tous les noeuds d'interpolation de l'élément de coordonnées x_i :

$$u_{ex}(x_i) = u(x_i) = u_i = \langle N_1(x_i)N_2(x_i).....N_n(x_i) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{u_n\}$$

D'où:

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0(\text{casi} \neq j) \\ 1(\text{casi} = j) \end{cases}$$

Avec le même raisonnement et en utilisant l'approximation sur l'élément de référence, nous obtenons :

$$u_{ex}(\xi_i) = u(\xi_i) = u_i = \langle N_1(\xi_i)N_2(\xi_i).....N_n(\xi_i) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (IV.27)$$

D'où :

$$N_j(\xi_i) = \begin{cases} 0(\text{casi} \neq j) \\ 1(\text{casi} = j) \end{cases}$$

IV.2.3.5.6.2. Continuité sur l'élément:

Pour que la fonction approchée $u(x)$ soit continue sur l'élément, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre m , il faut que les fonctions $N_i(x)$ soient continues et à dérivées continues jusqu'à l'ordre m .

IV.2.3.5.6.3. Notion de continuité inter élémentaire:

Un élément offre une certaine continuité lorsque la fonction d'interpolation sur les limites géométriques de l'enlèvement n'est fonction que des valeurs nodales constituant cette frontière.

Autrement dit, si nous désirons que $u(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre m soient continues sur une frontière commune à deux éléments, il faut que $u(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre m dépendent de manière unique des seules variables nodales associées aux noeuds de cette frontière. Dans ce cas, on dit que l'approximation est de type C^m .

IV.2.3.5.7. Transformation des opérateurs de dérivation:

Comme l'approximation (IV.24) sur l'élément réel est souvent compliquée nous utilisons systématiquement l'approximation (IV.27) sur l'élément de référence :

$$u_{ex} \approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\}_{u_{ex}} \approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} \quad (IV.28)$$

Associée à la transformation (IV.24):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau: \xi \rightarrow x = x(\xi) = \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{x_n\} \\ \quad \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \langle xy \rangle \\ \xi = \langle \xi\eta \rangle \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (IV.29)$$

La transformation τ étant bijective :

$$\tau^{-1}: x \rightarrow \xi = \xi(x) \quad (IV.30)$$

Si nous disposons explicitement de (IV.30), nous pouvons reporter $e(x)$ dans (IV.28) pour obtenir l'approximation sur l'élément réel :

$$u[\xi(x)] = \langle N(\xi(x)) \rangle \{u_n\} = \langle N(x) \rangle \{u_n\} = u(x) \quad (IV.31)$$

Toutes les expressions qui impliquent des dérivées de u en x , y sont transformées en dérivées en ξ et η grâce à la matrice de transformation dite matrice jacobienne $[J]$.

IV.2.3.5.7.1. Transformation des dérivées:

Nous devons utiliser le principe de dérivation en chaîne pour le calcul des dérivées en ξ d'une fonction ϕ à partir de ses dérivées en x :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\delta\phi}{\delta\xi} \\ \frac{\delta\phi}{\delta\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta\xi} & \frac{\delta y}{\delta\xi} \\ \frac{\delta x}{\delta\eta} & \frac{\delta y}{\delta\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta\phi}{\delta x} \\ \frac{\delta\phi}{\delta y} \end{Bmatrix} \tag{IV.32}$$

Ce qui nous noterons :

$$\{\delta_\xi\} = [J]\{\delta_x\} \tag{IV.33}$$

Où $[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation géométrique dont les termes sont obtenus par dérivation par rapport à ξ de la relation (IV.26) que nous réécrivons sous la forme :

$$\langle xy \rangle = \langle \bar{N}(\xi) \rangle [\{x_n\} \{y_n\}] \tag{IV.34}$$

$\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ étant les coordonnées x, y des noeuds géométriques de l'élément. La matrice jacobienne s'écrit:

$$[j] = \begin{Bmatrix} \frac{\delta}{\delta\xi} \\ \frac{\delta}{\delta\eta} \end{Bmatrix} \langle xy \rangle = \begin{bmatrix} \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} [\{x_n\} \{y_n\}] \tag{IV.35}$$

Elle est donc le produit de deux matrices, l'une contenant les dérivées en ξ des fonctions de transformation géométriques, et l'autre les coordonnées des n noeuds géométriques de l'élément.

IV.2.3.5.8. Transformation des intégrales:

Le changement de variable (IV.26) permet de passer de l'intégration d'une fonction ϕ sur l'élément réel V^e à une intégration plus simple sur l'élément de référence V^r :

$$\int_{V^e} \phi(x) dx dy = \int_{V^r} \phi[x(\xi)] \det(J) d\xi d\eta \tag{IV.36}$$

$\det(\mathbf{J})$ étant le déterminant de la matrice jacobienne $[\mathbf{J}]$. En effet, en repère cartésien orthonormé, l'élément de surface dS est le produit mixte :

$$dS = (d\vec{x} \cdot d\vec{y})$$

et dans le repère curviligne (ξ, η) :

$$dS = (d\vec{\xi} \cdot d\vec{\eta})$$

Les composantes de ces vecteurs dans un repère cartésien sont :

$$\begin{cases} d\vec{\xi} = (J_{11} \vec{i} + J_{21} \vec{j}) d\xi \\ d\vec{\eta} = (J_{12} \vec{i} + J_{22} \vec{j}) d\eta \end{cases}$$

Le produit mixte s'écrit donc :

$$dS = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta$$

IV.2.3.6. Discrétisation des formes intégrales: [22]

Le milieu continu est découpé en n éléments pour obtenir une solution approchée à la forme intégrale, nous représentons U sur chaque élément en fonction des valeurs nodales inconnues u_1, u_2, \dots, u_n . Cette forme intégrale sera remplacée par une somme des termes W_e correspondant à chaque élément.

La forme intégrale est discrétisée à l'aide d'un schéma d'approximation nodale en utilisant un type d'élément, chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que par le type de courbe ou de surface qui en forme la frontière. De plus nous donnons le nombre de noeuds géométrique nécessaire pour définir l'élément (figure IV.2).

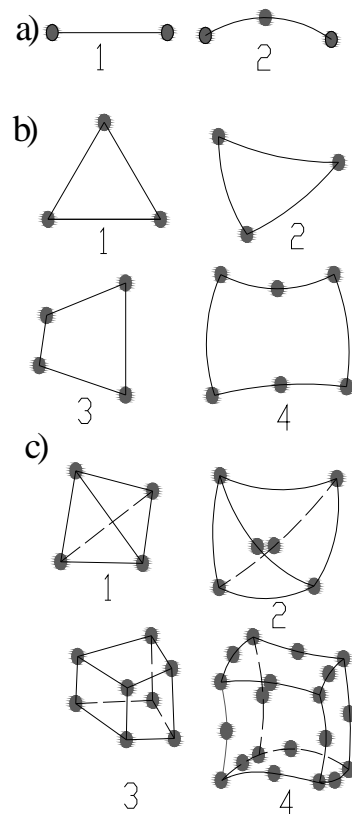


Figure IV.2. divers types d'éléments: [3]

a)-Élément à une dimension :

1:linéaire à 2 nœuds

2:quadratique à 3 nœuds

b)- Élément à deux dimensions:

1:triangulaire linéaire à 3 nœuds

2: triangulaire quadratique à 6 nœuds

3: quadrilatères linéaires à 4 nœuds

4: quadrilatères quadratiques à 8 nœuds

c)- Élément à trois dimensions:

1:tétraédrique linéaire à 4 nœuds

2: tétraédrique quadratique à 10 nœuds

3:hexaédrique linéaire à 8 nœuds

4: hexaédrique quadratique à 20 nœuds

L'inconnue U dans W^e est représentée en fonction du variable nodale u_n par les techniques d'interpolation classiques.

$$u^e = \langle N(\xi\eta) \rangle \{u_n\} \quad (\text{IV.37})$$

On considère l'écoulement transitoire en deux dimensions dans une nappe libre. On représente d'abord le cas général ou la conductivité hydraulique K est anisotrope

(différente dans les deux directions principales correspondants aux axes cartésiens x et y), l'équation générale de Richards s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(h)_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(h)_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + r = C'(h) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (IV.38)$$

En appliquant le principe de Galerkin sur l'équation (IV.38), on aura la forme intégrale suivante :

$$\int_D \langle N \rangle \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K(h)_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(h)_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + r - C'(h) \frac{\partial h}{\partial t} \right] dD = 0 \quad (IV.39)$$

Ou bien:

$$\int_D \langle N \rangle^t \frac{\partial}{\partial x} \left(K(h)_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) dD + \int_D \langle N \rangle^t \frac{\partial}{\partial y} \left(K(h)_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) dD + \int_D \langle N \rangle^t r dD - \int_D \langle N \rangle^t C'(h) \frac{\partial h}{\partial t} dD = 0 \quad (IV.40)$$

L'intégration par partie de chaque intégrale nous donne :

$$\int_D \langle N \rangle^t \frac{\partial}{\partial x} \left(K(h)_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) dD = - \int_D \frac{\partial \langle N \rangle^t}{\partial x} \left(K(h)_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) dD + \oint_S \langle N \rangle K(h)_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x dS \quad (IV.41)$$

$$\int_D \langle N \rangle^t \frac{\partial}{\partial y} \left(K(h)_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) dD = - \int_D \frac{\partial \langle N \rangle^t}{\partial y} \left(K(h)_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) dD + \oint_S \langle N \rangle K(h)_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y dS \quad (IV.42)$$

Avec :

n_x : Est la composante de la normale suivant l'axe x,

n_y : est la composante de la normale suivant l'axe y.

L'équation (IV.40) devient:

$$\int_D \nabla N \cdot K(h) \cdot \nabla h \cdot dD - \int_S \langle N \rangle \cdot q_n dS + \int_D \langle N \rangle r dD + \int_D C'(h) \langle N \rangle^t \frac{\partial h}{\partial t} dD = 0 \quad (IV.43)$$

Avec:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) : \text{Est le Laplacien ;}$$

$$q_n = K. \left(\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right)$$

On a:

$$D = \sum D^e$$

Et: $\mathbf{h} = \langle \mathbf{N} \rangle \{ \mathbf{h}^e \}$

L'équation (IV.43) devient alors :

$$\sum_e \int_{D^e} \langle \nabla \mathbf{N} \rangle^t . \mathbf{K}(\mathbf{h}) . \langle \nabla \mathbf{N} \rangle . \{ \mathbf{h}^e \} dD^e - \int_{S^e} \langle \mathbf{N} \rangle q_n dS^e - \int_{D^e} \langle \mathbf{N} \rangle r^e dD^e + \int_{D^e} \mathbf{C}'(\mathbf{h}) \langle \mathbf{N} \rangle^t \langle \mathbf{N} \rangle \frac{\delta \{ \mathbf{h}^e \}}{\delta t} dD^e = 0$$

(IV.44)

Elle s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$[\mathbf{K}^e] \{ \mathbf{h}^e \} + [\mathbf{C}'^e] \frac{\partial \{ \mathbf{h}^e \}}{\partial t} - \{ \mathbf{f}^e \} = 0$$

(IV.45)

Avec:

$[\mathbf{K}^e] = \int_{D^e} \langle \nabla \mathbf{N} \rangle^t . \mathbf{K}(\mathbf{h}) . \langle \nabla \mathbf{N} \rangle . dD^e$: C'est la matrice de rigidité élémentaire.

$[\mathbf{C}'^e] = \int_{D^e} \mathbf{C}'(\mathbf{h}) \langle \mathbf{N} \rangle^t \langle \mathbf{N} \rangle . dD^e$: C'est la matrice masse élémentaire.

$\{ \mathbf{f}^e \} = \int_{D^e} \langle \mathbf{N} \rangle \{ \mathbf{r}^e \} . dD^e + \int_{S^e} \langle \mathbf{N} \rangle q_n . dS^e$: C'est le vecteur sollicitation

élémentaire.

IV.2.3.7. Technique d'assemblage: [3]

La Technique d'assemblage, caractéristique de la méthode des éléments finis, permet de passer des matrices et vecteurs élémentaires à la matrice et aux vecteurs globaux. Ainsi après assemblage, on obtient pour (IV.45):

$$[K_g] \{h_g\} + [C'_g] \frac{\partial \{h_g\}}{\partial t} = \{F_g\} \quad (IV.46)$$

Avec:

$$[K_g] = \sum_e [K^e] \text{ est la rigidité globale.}$$

$$\text{Et: } [C'_g] = \sum_e [C'^e] \text{ est la matrice masse globale.}$$

$$\{F_g\} = \sum_e \{f^e\}: \text{ C'est le vecteur globale des sollicitations.}$$

L'indice g signifie le terme global et e signifie le terme élémentaire.

Pour un régime permanent ($\frac{\delta h}{\delta t} = 0$) on obtient:

$$[K_g] \{h_g\} = \{F_g\} \quad (IV.47)$$

IV.2.3.8. Discrétisation temporelle: [20]

Sachant que \dot{h} est la variation temporelle d'ordre 1 de la solution qui peut être approchée par un schéma de différences finies sur le pas de temps Δt (n étant l'indice du pas de temps):

$$\dot{h} \approx \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \quad (IV.48)$$

Donc en remplace dans (IV.46) on obtient:

$$[K_g]^n \cdot \{h_g\}^n + [C'_g]^n \cdot \left[\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \right] = \{F_g\}^n \quad (IV.49)$$

Le schéma suivant résume les différentes étapes suivies pour la résolution de l'équation différentielle avec la méthode des éléments finis :

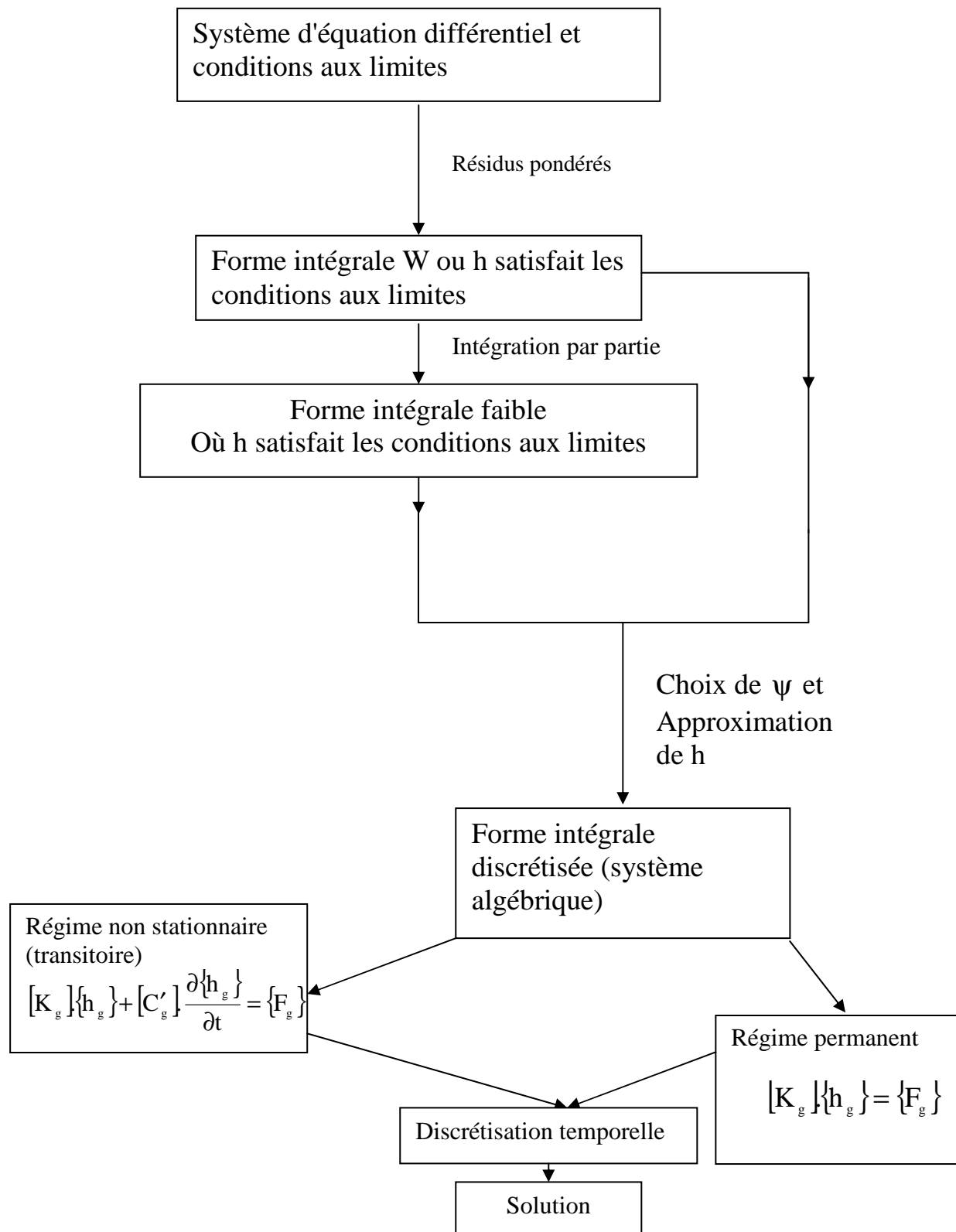


Figure IV.3. Différentes étapes de résolution de l'équation différentielle avec la méthode des éléments finis.

IV.2.3.9.Méthodes numériques en éléments finis:

Les méthodes numériques sont très utilisées dans la méthode des éléments finis. Leur importance est considérable surtout on intégration et pour la résolution de système algébrique (voire figure IV.4).

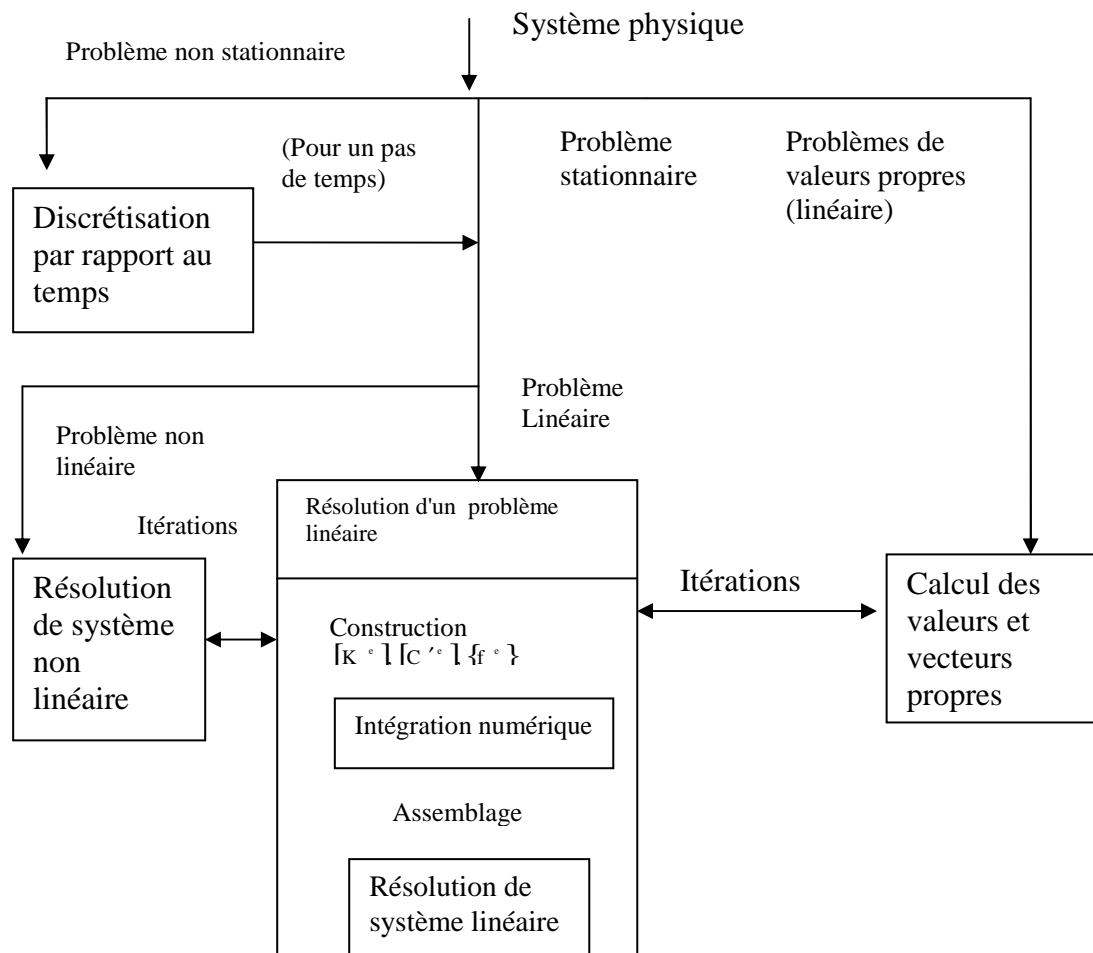


Figure IV.4. Méthodes numériques utilisées dans la méthode des éléments finis.

IV.2.3.9.1.intégration numérique: [3]

Les méthodes d'intégration numérique permettent de construire les matrices et vecteurs élémentaire par intégration sur l'élément de référence.

IV.2.3.9.2.Résolution du système algébrique:

Des non-linéarités apparaissent dans la formulation à cause de l'apparition des termes non linéaires par rapport aux inconnues du problème dans les équations aux dérivées partielles. Dans notre cas les matrices de perméabilité et d'emmagasinement dépendent du temps ou de charge hydraulique.

Résoudre le système non linéaire, c'est chercher un vecteur $\{h\}$ qui rend le résidu $\{R(h)\}$ aussi proche que possible de zéro. La solution exacte rend $\{R(h)\}$ nul.

La recherche de la solution $\{h\}$ se fait de manière itérative à chaque pas de temps en régime transitoire. Parmi les méthodes itératives on distingue la méthode de point fixe et celle de Newton-Raphson, cette dernière rend le système dissymétrique, c'est pourquoi la méthode de point fixe est utilisée.

Conclusion:

Cette présentation succincte a démontré les étapes à suivre pour l'analyse d'un système physique par éléments finis.

Dans notre travail cette méthode est une contribution à l'analyse des écoulements en milieu poreux.

L'équation de Richards décrit la totalité de cet écoulement que ce soit dans la zone saturée ou non saturée. Le système matriciel obtenu est non linéaire donc pour sa résolution on opte pour l'une des méthodes itératives. Dans notre étude, c'est la méthode du point fixe qui est utilisé.

Tout Cela a été mis en œuvre dans le programme développé dans le chapitre suivant.



CHAPITRE V:

Programmation effectuée



Introduction:

Le programme développé dans le cadre de ce travail est dans le but d'analyser par la méthode des éléments finis, le comportement et l'évolution de l'écoulement en nappe libre lors de la recharge et en fonction des débits pompés.

V.1.les blocs fonctionnelles caractéristiques du programme:

La résolution de n'importe quel problème se ramène à l'écriture d'un certain programme informatique dans un langage bien défini.

La préparation de ce programme se fait en deux principales étapes complémentaires. On s'appuie dans notre étude sur une représentation graphique (organigramme).

Dans la seconde étape, on utilise le codage de l'organigramme dans un langage de programmation (FORTRAN).

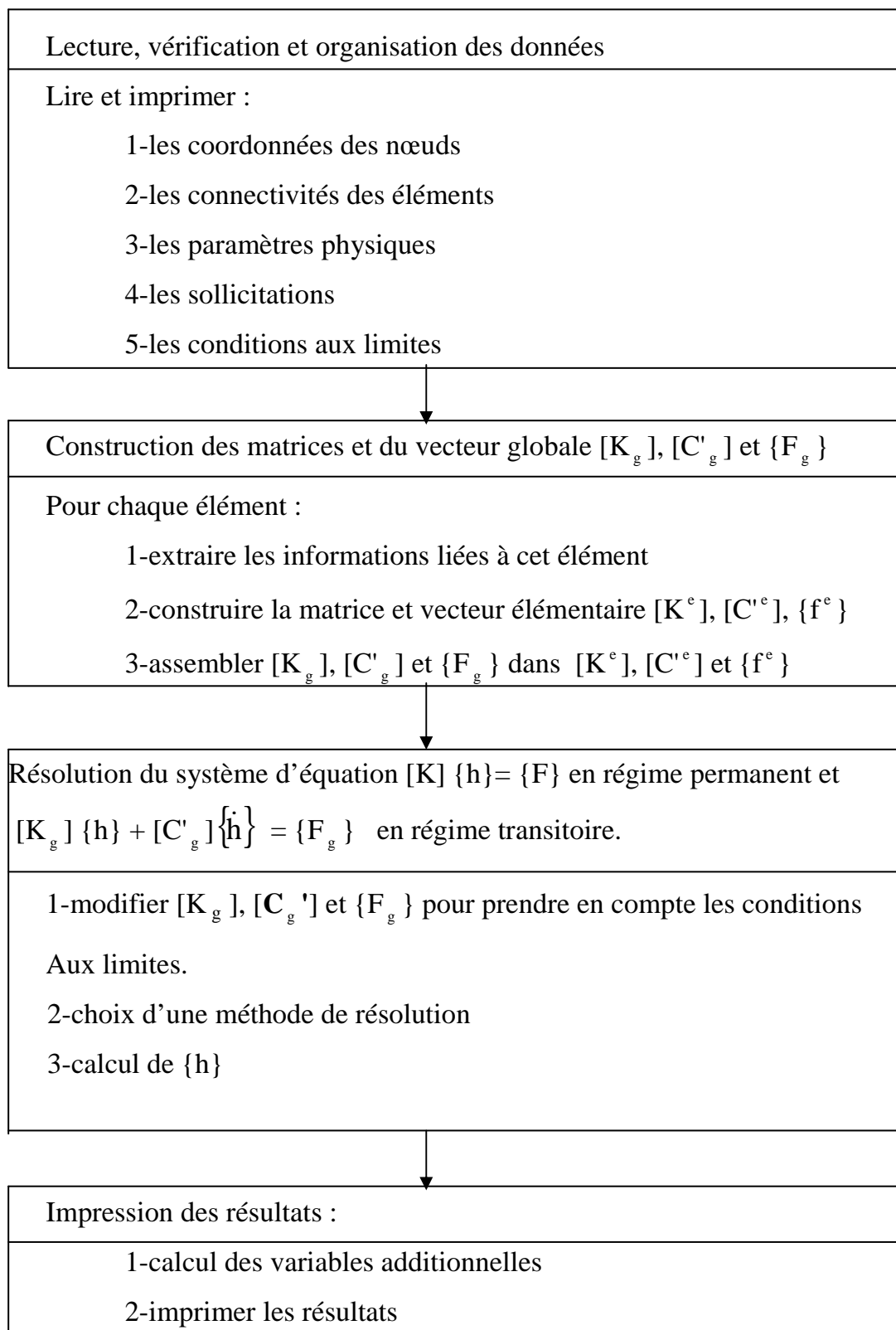
Une fois le codage réalisé, le programme sera chargé dans la mémoire de l'ordinateur, il sera compilé puis exécuté.

Les avantages du langage cité ci-dessus sont :

- Indication des erreurs,
- Possibilité d'utiliser des modèles graphiques,
- La compilation et le linkage sont très rapides.

Tout programme basé sur la M.E.F inclut des blocs fonctionnels caractéristiques (figure V.1): Lecture et vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (charge, débit, pression, etc.), les efforts imposés et conditions aux limites ;

- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale des sollicitations ;
- Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites ;
- Impression des résultats de calcul.



FigureV.1: blocs fonctionnelles caractéristiques d'un programme d'éléments finis.

V.2. structure du programme développé:

Tout programme basé sur la méthode des éléments finis est constitué de trois étapes de traitement: étape de prétraitement, étape de traitement et étape de post-traitement.

V.2.1. Etape de prétraitement:

Elle consiste à préparer des données nécessaires au programme principal. Dans cette étude les données définissant la géométrie de la structure sont préparées à l'aide d'un programme de maillage automatique « mailleur ». Ce module nous permet d'éviter l'introduction manuelle des données, et par conséquent, gagner du temps.

V.2.1.1. Module « mailleur »:

Le module « mailleur » est le premier sous-programme du programme principal, il permet de générer le maillage automatique de la structure, il est transcrit en langage Fortran sous Windows.

La démarche suivie pour mailler une structure à l'aide du module «mailleur » comprend trois étapes:

- Diviser la région de la structure en plusieurs blocs suivant la géométrie de celle-ci ;
- Diviser chaque bloc en éléments finis et génération des coordonnées des nœuds ;
- Connexion des blocs.

Première étape: Définition de la topologie des blocs:

Le domaine de la structure est subdivisé en blocs quadrilatéraux suivant la géométrie et le type de matériaux qui les constituent. Chaque bloc doit être constitué de huit points définissant la topologie du bloc. (Voir figure V.2).

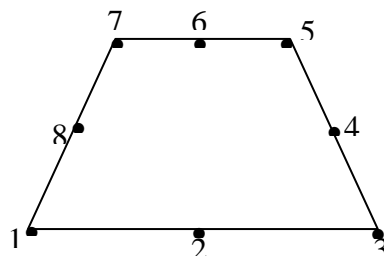
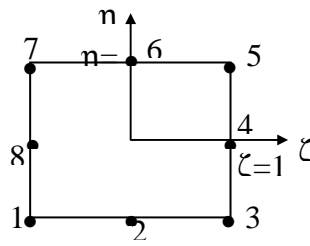


Figure V.2 : Bloc de type quadrilatéral à huit nœuds.



FigureV.3 : Elément quadratique Isoparamétrique.

Chaque bloc est présenté par un élément quadratique isoparamétrique à huit nœuds, dans les coordonnées naturelles (ζ, η) . Les coordonnées globales X, Y de chaque point généré sont données par :

$$X(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\zeta, \eta) \cdot x_i \tag{V.1}$$

$$Y(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\zeta, \eta) \cdot y_i \tag{V.2}$$

$N_i(\zeta, \eta)$: sont les fonctions d'interpolation d'un élément quadratique isoparamétrique à huit nœuds illustré dans la figureV.3.

Les fonctions d'interpolation sont données par les formules suivantes:

$$N_i(\zeta, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \zeta\zeta_i) \cdot (1 + \eta\eta_i) \cdot (\zeta\zeta_i + \eta\eta_i + 1), \quad i = 1, 3, 5, 7 \tag{V.3}$$

$$N_i(\zeta, \eta) = \frac{1}{2} \zeta_i^2 (1 + \zeta\zeta_i) (1 - \eta^2) + \frac{1}{2} \eta_i^2 (1 + \eta\eta_i) \cdot (1 - \zeta^2), \quad i = 2, 4, 6, 8 \tag{V.4}$$

Deuxième étape: Subdivision des blocs:

Pour chaque bloc, on spécifie Ndivx et Ndivy, le nombre de divisions suivant x et y respectivement et les facteurs de forme $(W_\zeta)_i$ et $(W_\eta)_i$ correspondant à chaque division i.

Les coordonnées naturelles de chaque nœud ainsi généré sont données par une transformation définie comme suit :

$$\zeta_i = \zeta + \frac{2 \cdot (W_\zeta)_i}{W_\zeta^T \cdot F} \tag{V.5}$$

$$\eta_i = \eta + \frac{2 \cdot (W_\eta)_i}{W_\eta^T \cdot F} \tag{V.6}$$

Tel que:

$$W_{\zeta}^T = \sum_{i=1}^{ndivx} (w_{\zeta})_i ; W_{\eta}^T = \sum_{i=1}^{ndivy} (w_{\eta})_i$$

$$\text{Et } F = \begin{cases} 1 & \text{pour element lineaire} \\ 2 & \text{pour element quadratique} \end{cases}$$

Les types d'élément que le programme « mailleur » peut générer sont :

- a) Eléments linéaires quadrilatéraux à quatre nœuds;
- b) Eléments linéaires triangulaires à trois nœuds ;
- c) Eléments quadratiques quadrilatéraux à huit nœuds.

Troisième étape: Connectivité des blocs:

Après la subdivision de chaque bloc et la numérotation des nœuds, cette étape a pour but d'éliminer les nœuds répétés à l'interface de deux blocs adjacents afin de les numérotter une seule fois pour un seul bloc. Cette technique est basée sur la comparaison des coordonnées des nœuds entre eux.

V.2.1.2. Structure du programme « mailleur » :

Le module « mailleur » se compose d'un programme principal, quatre sous-programmes primaires et un sous-programme secondaire.

1-Subroutine input: Ce sous programme permet de lire la topologie des blocs définie dans la première étape précédente à partir d'un fichier de données « géom.dat » introduites manuellement. Il doit contenir :

- Nombre total de points définissant la structure (np).
- Nombre de blocs (nbloc), nombre de nœuds par élément (ntype) et le nombre de dimensions (ndime);
- Pour chaque bloc, on spécifie les points qui le caractérisent ;
- Coordonnées de chaque point définissant les blocs;
- Nombre de divisions et les coefficients de forme de chaque division pour chaque bloc.

2-Subroutine générate: Le sous-programme « générate » est le plus important du module « mailleur », il consiste à générer les nœuds du maillage et effectuer les calculs développés dans la deuxième étape de traitement. C'est dans ce sous-programme qu'on fait appel au sous-programme secondaire schapef.

3-Subroutine shapef: C'est un sous-programme secondaire qui permet de donner les différentes fonctions d'interpolation en fonction des coordonnées naturelles.

4-Subroutine output: Il permet de stocker les résultats obtenus dans un fichier « géom.res », il contient :

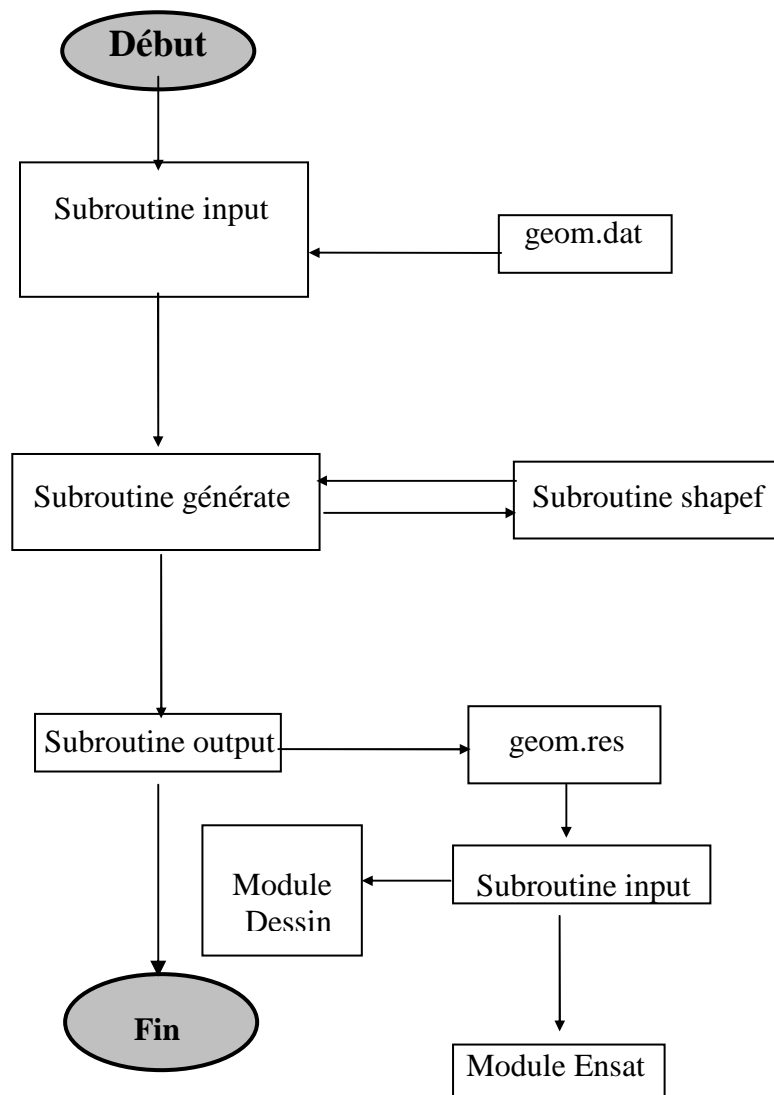
- Nombre de blocs, nombre des éléments, nombre de nœuds, nombre de dimensions, le type d'élément et nombre de matériaux,
- Connexion des éléments,
- Coordonnées de chaque nœud.

L'organigramme du module « mailleur » est présenté sur la figureV.4.

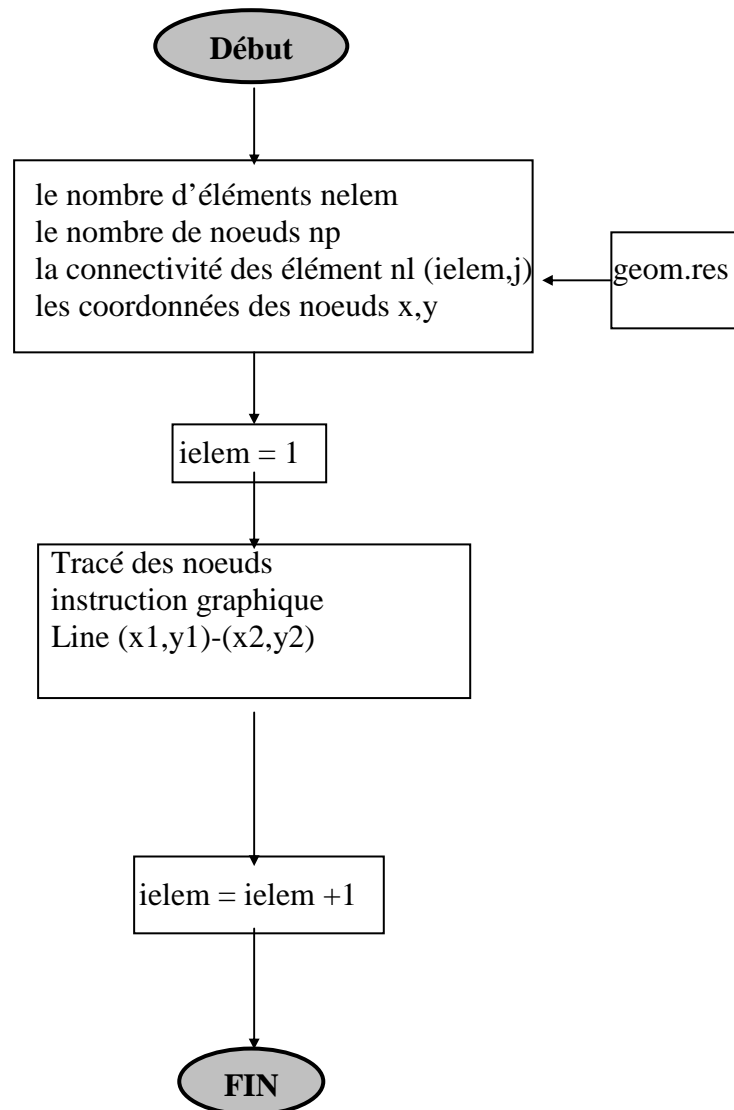
V.2.1.3.Tracé du maillage:

Le tracé du maillage se fait à l'aide du module «dessin.bas » transcrit en langage Basic, il utilise le fichier « geom.res » obtenu à l'aide du programme « mailleur » comme un fichier de données.

En premier lieu, il positionne les noeuds de chaque élément par ses coordonnées, ensuite, il permet de relier entre les noeuds de l'élément en respectant la connectivité. L'organigramme du module « dessin » est porté sur la figureV.5.



FigureV.4: Organigramme du « mailleur ».



FigureV.5: Organigramme du module Dessin.

V.2.2. Etape de traitement:

Après la préparation des données à l'aide du module « mailleur », elle vient cette étape qui consiste à résoudre le problème physique, c'est l'étape principale du programme de calcul. Elle permet de calculer la matrice de rigidité, le vecteur des forces et les conditions aux limites.

Les grandes démarches de cette étape sont:

- Etape d'Initialisation des matrices et des vecteurs ;
- Etape d'assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur force ;
- Etape de traitement des conditions aux limites ;
- Etape de résolution du système matriciel ;
- Etape de sortie des résultats.

Toutes ces étapes sont structurées dans un programme de calcul par éléments finis appelé « Ensaf ».

V.2.2.1. Module « Ensats » :

Ce module utilise les résultats préparés à l'aide du module « mailleur » pour effectuer les étapes citées dans l'étape de traitement. Son programme principal offre la possibilité de choisir le type de matériau de l'aquifère, suivant qu'il est homogène ou non.

On présente ci-dessous les différents sous-programmes qui composent le module « Ensats ».

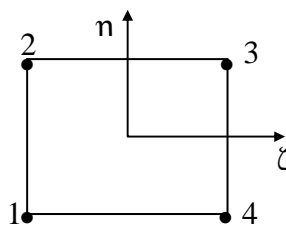
1-Subroutine input: Ce sous programme permet de lire les données préparées à l'aide du programme « mailleur » à partir du fichier géom.res, ainsi les données qui sont introduites manuellement dans un autre fichier de données. Ces données représentent les caractéristiques des matériaux qui constituent la structure (perméabilités), le nombre de points de Gauss, le nombre d'itérations et la tolérance.

2-Subroutine largebande: Ce sous programme donne la demi-largeur bande de la matrice de rigidité (iw).

3-Subroutine gauss: Il donne les coordonnées naturelles des points de gauss et les coefficients de pondération nécessaires à l'intégration numérique en fonction de ngp « nombre des points de Gauss ».

4-Subroutine Formln: Le sous-programme Formln consiste à donner les fonctions d'interpolation en coordonnées naturelles et ses dérivées.

Puisque l'élément choisi dans le présent travail est l'élément quadrilatéral isoparamétrique à quatre nœuds, les fonctions d'interpolations et ses dérivées sont données par: [3]



FigureV.6 : Elément quadrilatéral isoparamétrique à quatre nœuds.

$$N_1(\zeta, \eta) = (1 - \zeta)(1 - \eta)$$

$$N_2(\zeta, \eta) = (1 - \zeta)(1 + \eta)$$

$$N_3(\zeta, \eta) = (1 + \zeta)(1 + \eta)$$

$$N_4(\zeta, \eta) = (1 + \zeta)(1 - \eta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = -(1 - \eta) \quad , \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -(1 - \zeta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = -(1 + \eta) \quad , \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 1 - \zeta$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = (1 + \eta) \quad , \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 1 + \zeta$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = 1 - \eta \quad , \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -(1 + \zeta)$$

5-Subroutine nulvec : Il permet d'initialiser un vecteur à la valeur de zéro.

6-Subroutine null: Ce sous-programme affecte la valeur de zéro à une matrice.

7-Subroutine matmul: Il permet d'effectuer le produit de deux matrices

8-Subroutine matran: Il calcule la matrice transposée d'une matrice.

9-Subroutine twoby2: Il permet de déterminer l'inverse de la matrice Jacobienne bidimensionnelle et de calculer son déterminant.

10-Subroutine Msmult : Il permet de calculer le produit d'une matrice par un scalaire.

11-Subroutine matadd: Ce sous-programme permet d'effectuer la somme de deux matrices.

12-Subroutine Formkv: Il permet de stocker la matrice bande symétrique de taille (n x n) dans un vecteur de taille n x (iw+1), en prenant seulement les valeurs situées dans le triangle supérieur de la matrice bande figure V.7.

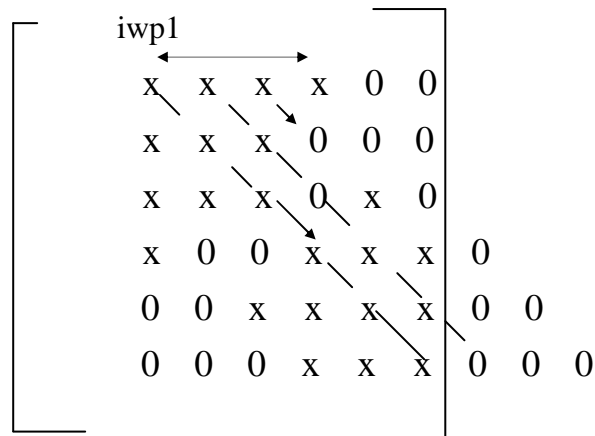


Figure V.7: Matrice bande de rigidité formée à l'aide du Sous programme formkv.
 Kv : Vecteur avec termes diagonaux en n premières positions
 $iwp1 = iw + 1$

Le stockage des éléments de la matrice bande se fait en plaçant les valeurs des termes diagonaux de la matrice bande dans les n premières positions du vecteurs cible KV et ainsi de suite suivant la flèche.

La formule donnant la nouvelle position des éléments du vecteur est donnée par Griffith.

K_{ij} sera stockée à la position $n.(J-I) + I$

Avec: $I = NL(ielem,i)$, $J = NL(ielem,j)$, numéro du noeud j de l'élément ielem

13-Subroutine banred: Il décrit la première étape de résolution du système matriciel après l'assemblage, c'est l'étape de réduction. Il permet d'effectuer la triangularisation de la matrice de rigidité globale stockée dans le vecteur kv par l'élimination de Gauss. Cet algorithme se trouve dans presque tous les ouvrages d'éléments finis, mais l'algorithme appliqué sur le vecteur kv est présenté par Griffiths . [10]

14-Subroutine BacsuB: Ce sous programme permet d'effectuer la deuxième étape de résolution du système matriciel par l'élimination de Gauss dite étape de substitution. Il permet de donner le vecteur solution des charges hydrauliques. Ce sous programme est donné par Griffiths.

15-Subroutine condition : Il existe plusieurs méthodes d'introduire les conditions aux limites exposées dans plusieurs ouvrages. Dans ce travail, la méthode choisie est dite « méthode de pénalisation ». Cette méthode consiste à ajouter aux termes diagonaux de la matrice de rigidité dont les charges hydrauliques sont imposées, un nombre C très grand d'ordre $10.e+10$ selon la précision de la machine utilisée (nombre de chiffres après la virgule).

Ce nombre est ajouté seulement aux nœuds situés à l'amont et à l'aval de la nappe libre où règne une charge hydraulique imposée.

En régime permanent le système matriciel est donné par :

$$K(h).h = 0 \quad (V.7)$$

Après l'introduction des conditions aux limites, le système s'écrit:

$$(K(h)+K_b).h = Q_b \quad (V.8)$$

La matrice K_b est définie comme suit :

La $i^{\text{ème}}$ diagonale de la matrice K_b est égale à C , si la charge hydraulique correspondante est imposée. Si non, elle est nulle.

Le vecteur Q_b se comporte comme suit :

La $i^{\text{ème}}$ ligne du vecteur $Q_b = C$, si la charge est imposée. Si non, elle est égale à zéro.

Ce sous programme permet aussi de tenir compte des conditions aux limites au niveau du forage et des conditions aux limites liées à la recharge.

V.2.2.2. Les Conditions aux limites :

Les trois types de conditions aux limites, qu'on connaît en mathématicien sont :
Les conditions de Dirichlet, qui portent sur la variable : h imposé ;

Les conditions de Neumann, qui portent sur la dérivée première de la variable : $\frac{\partial h}{\partial n}$
imposé ;

Les conditions de Fourier, qui portent sur h et $\frac{\partial h}{\partial n}$: $h + \frac{\partial h}{\partial n}$ imposé ;

Ces types de conditions aux limites sont déjà cités dans le troisième chapitre
Nous y ajouterons ici un quatrième type : les conditions de surface libre ou de suintement, qui sont des conditions aux limites doubles.

a)-Limites à potentiel imposé :

On impose des conditions de Dirichlet sur une limite la charge hydraulique à la limite est indépendante des conditions de circulation dans la nappe.

Ce sera généralement le contact d'une nappe avec un plan d'eau libre.

b)-Limites à flux imposé :

C'est une condition de Neumann. En effet, imposer une valeur du gradient de charge normal à la limite, $\frac{\partial h}{\partial n}$ revient, d'après la loi de Darcy, à imposer la valeur du

flux : $-K \frac{\partial h}{\partial n}$ sur cette limite.

On distingue :

Les limites à flux nul: $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ Par exemple, le contact d'une formation aquifère avec un imperméable.

Les limites à flux imposé non nul. Par exemple, un affleurement dans une zone où le taux d'infiltration de la pluie est inférieur aux possibilités d'ingestion de la nappe.

Un prélèvement à débit imposé dans un ouvrage (puits) constitue également une limite à flux imposé.

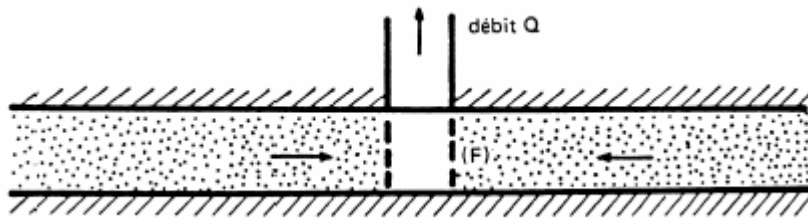


Figure V.8: schémas représentant la limite à flux imposé.

c)-Surface libre :

Deux conditions définissent une surface libre :

- p = pression atmosphérique sur tout point M de la surface libre.

Exprimé en charge, on prend par convention 0 pour la pression atmosphérique, et on écrit : $h = z$

- de plus, la surface libre est une surface à flux nul si la nappe n'est pas alimentée par sa surface ce qui est notre cas :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

C'est donc une deuxième condition imposée à la même surface.

V.2.2.2.1. Traitement numérique de la surface de suintement:

Première itération:

On impose la condition de flux nul sur tout les points de la surface de suintement.

Passage de l'itération j à l'itération $j+1$:

- Cas des points à condition de flux nul à l'itération j :

- Si $h > z$, on impose $h = z$;

- Si $h \leq z$, on maintient la condition de flux nul.

- Cas des points à condition $h = z$ à l'itération j :

- Si le flux est rentrant, on impose la condition de flux nul;

- Si le flux est sortant, on maintient la condition $h = z$.

Le flux est désigné sortant si il est négatif ($-k \cdot \text{grad}(\bar{h}) \cdot \vec{n} \leq 0$).

V.2.2.2.2. Test de convergence:

La convergence du processus itératif est atteinte pour un pas de temps donné, lorsque, pour tout nœud du maillage, à chaque itération, la différence maximale entre deux solutions successives atteint une tolérance fixée par l'utilisateur, au contraire il y a divergence et donc arrêt du programme lorsqu'on dépasse, sans converger, un nombre d'itérations donné par l'utilisateur.

La formule usuelle du test de convergence est donnée par [13] :

$$\frac{|h_i^j - h_{i-1}^j|}{h_{i-1}^j} \leq \text{tol} \quad (\text{V.9})$$

h_i^j : charge hydraulique au nœud j à l'itération i

tol : Tolérance fixée est d'ordre 0.001.

V.2.2.2.3. Traitement numérique des conditions du forage :

C'est un calcul itératif qui est en jeu. Tel que à chaque pas de temps et à chaque itération la ligne de surface de la nappe libre est supposée horizontale et les débits

nodaux sortants du mur du forage sont égaux tel que : $q_n = \frac{-Q}{n}$ avec :

Q : est le débit pompé ; le signe moins signifie que le débit est extrait ;

n : est le nombre de nœuds se trouvant sur le mur du forage et au dessous de la surface libre de la nappe.

V.2.2.2.4. Traitement numérique des conditions de recharge :

C'est toujours un calcul itératif .a chaque pas de temps et a chaque itération la surface piézométrique est supposée horizontale et les débits nodaux d'alimentation ou

de rechargement sont égaux tel que: $q'_n = \frac{Q'}{n'}$ ou Q' : est le débit totale

d'alimentation de la nappe (m^3/s) et n' est le nombre de nœuds se trouvant au niveau de la surface du sol. Le taux de rechargement donné en m/s est le rapport entre le débit d'alimentation et la section. Dans le cas ou on travail on deux dimensions

seulement on a : $W_{n'} = \frac{W}{n'}$ ou W est le débit total d'alimentation par unité de largeur

de la nappe et $W_{n'}$ est le débit nodale d'alimentation par unité de largeur. Le taux de rechargement dans ce cas est la rapport entre débit total d'alimentation par unité de largeur et la longueur de la nappe. Le débit Q' est obtenue en multiplions W par la largeur.

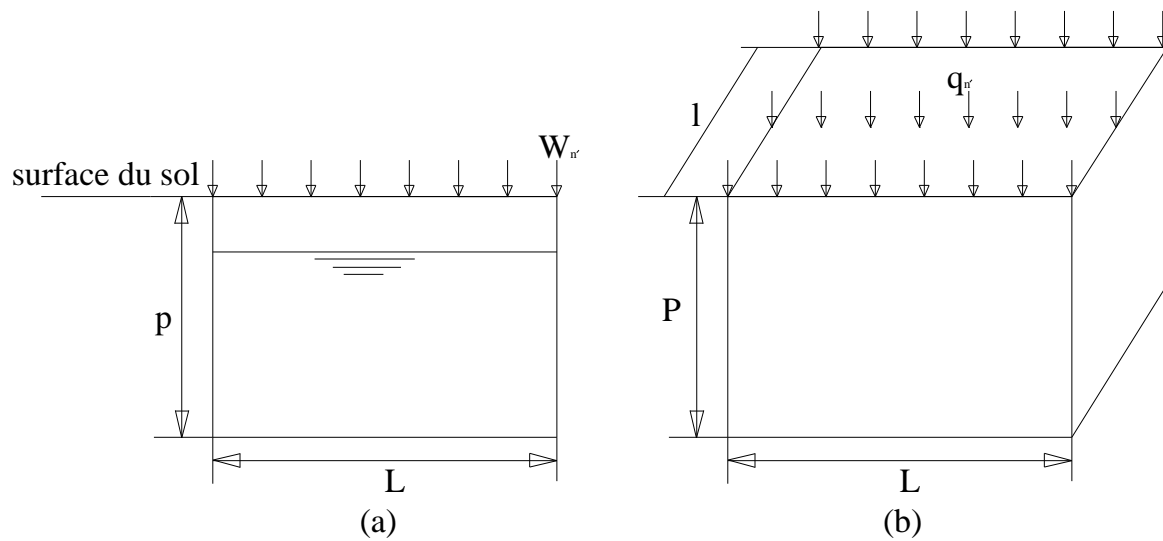


Figure V.9: exemple de traitement numérique des condition de recharge:

(a): deux dimension, $n' = 8$.

(b): trois dimensions, $n' = 24$.

L:longueur, l:largeur, p:profondeur.

16-Subroutine forage : Ce sous programme permet d’agglomérer les données nécessaires (débit pompé, nombre de nœuds n, rayon du forage, la charge d’eau et le temps de pompage) afin de calculer les débits nodaux au cours du pompage.

17-Subroutine recharge: Ce sous programme permet d’agglomérer les données nécessaires (débit d'alimentation ou taux de recharge, nombre de nœuds n' , la charge d’eau et le temps de rechargement) afin de calculer les débits nodaux d'alimentation au cours du rechargement.

18-Subroutine surface libre: Ce sous programme calcule la position de la surface libre. La position de la surface libre se détermine, à l’intérieur de l’élément, par interpolation linéaire entre deux nœuds adjacents 1 et 2 voir figure V.10.

La position de la surface libre entre les nœuds 1 et 2 se calcule comme suit:

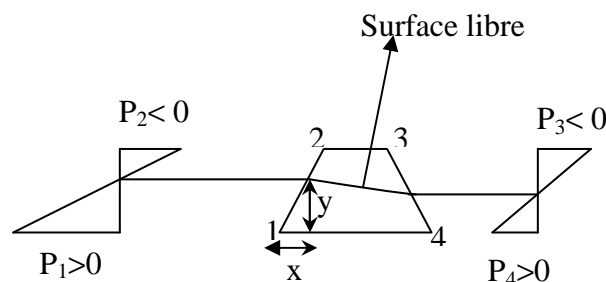


Figure V.10: Position de la surface libre dans un élément fini

La distance (y) entre le point de surface libre et le nœuds n°1 suivant y est calculée par :

$$y = \frac{p_1 \cdot \Delta cordy}{p_1 + p_2} \tag{V.10}$$

La distance (x) entre l'abscisse du point de la surface libre et le nœud n°1 est donnée par:

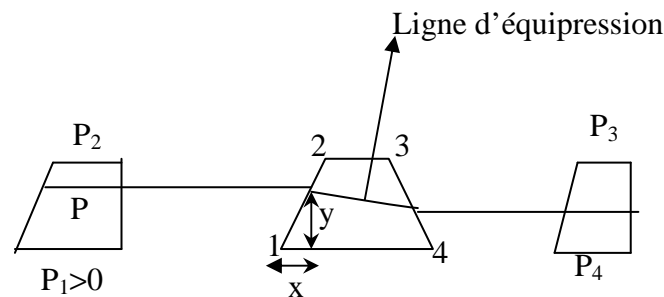
$$x = y \cdot \frac{\Delta cordx}{\Delta cordy} \tag{V.11}$$

Alors, les coordonnées du point de la surface libre entre 1 et 2 sont données par:

$$X = x_1 + x$$

$$Y = y_1 + y$$

19-Subroutine réseau : Ce sous programme permet de calculer le champ des vecteurs vitesse et le réseau d'écoulement établi dans la nappe. La méthode de détermination des lignes d'équipressions est la même que celle décrite ci-dessus pour la détermination de la surface libre. A l'intérieur de chaque élément, la valeur de la charge ou de pression est interpolée linéairement entre deux nœuds adjacents.



FigureV.11: Position d'une ligne d'équipression dans un élément fini

Pour les lignes d'équipressions, les valeurs sont interpolées entre les nœuds 1 et 2 et entre les nœuds 3 et 4 (voir figureV.11).

Par exemple, entre les nœuds 1 et 2, la position de l'équipression de valeur p est

$$\text{donnée par: } Y_p = \frac{(p_1 - p_2) \cdot \Delta cordy}{\Delta cordx} + y_1 \tag{V.12}$$

$$X_p = x_1 + p_1 - p_2 \tag{V.13}$$

Le calcul s'effectuera pour chaque élément afin de tracer l'équipression de valeur p .

V.2.3.étape de post-traitement :

C'est la dernière étape du traitement, elle permet d'écrire les résultats dans des fichiers, les imprimer et le tracé de leurs graphes.

Le sous programme 'output' du module « E.nsat », représente cette étape.

20-Subroutine output : Ce sous programme permet d'écrire les résultats sur un fichier de résultat appelé « charge ». Il contient les valeurs de la charge hydraulique en chaque nœud ainsi que les valeurs d'équipressions et le champ des vitesses dans un fichier « réseau ».

Le tracé des graphes est réalisé à l'aide du logiciel « Grapher » sous Windows utilisant les fichiers précédents comme fichiers de données.

L'organigramme du module « Ensat » est présenté sur la figureV.12.

L'exécution des trois modules en même temps se fait à l'aide d'un programme de type « bath » appelé « magister.bat », qui les englobe sous une forme exécutable:

- Mailleur.exe,
- Ensat.exe,
- Dessin.exe.

La figureV.13 illustre l'organigramme du programme « magister »

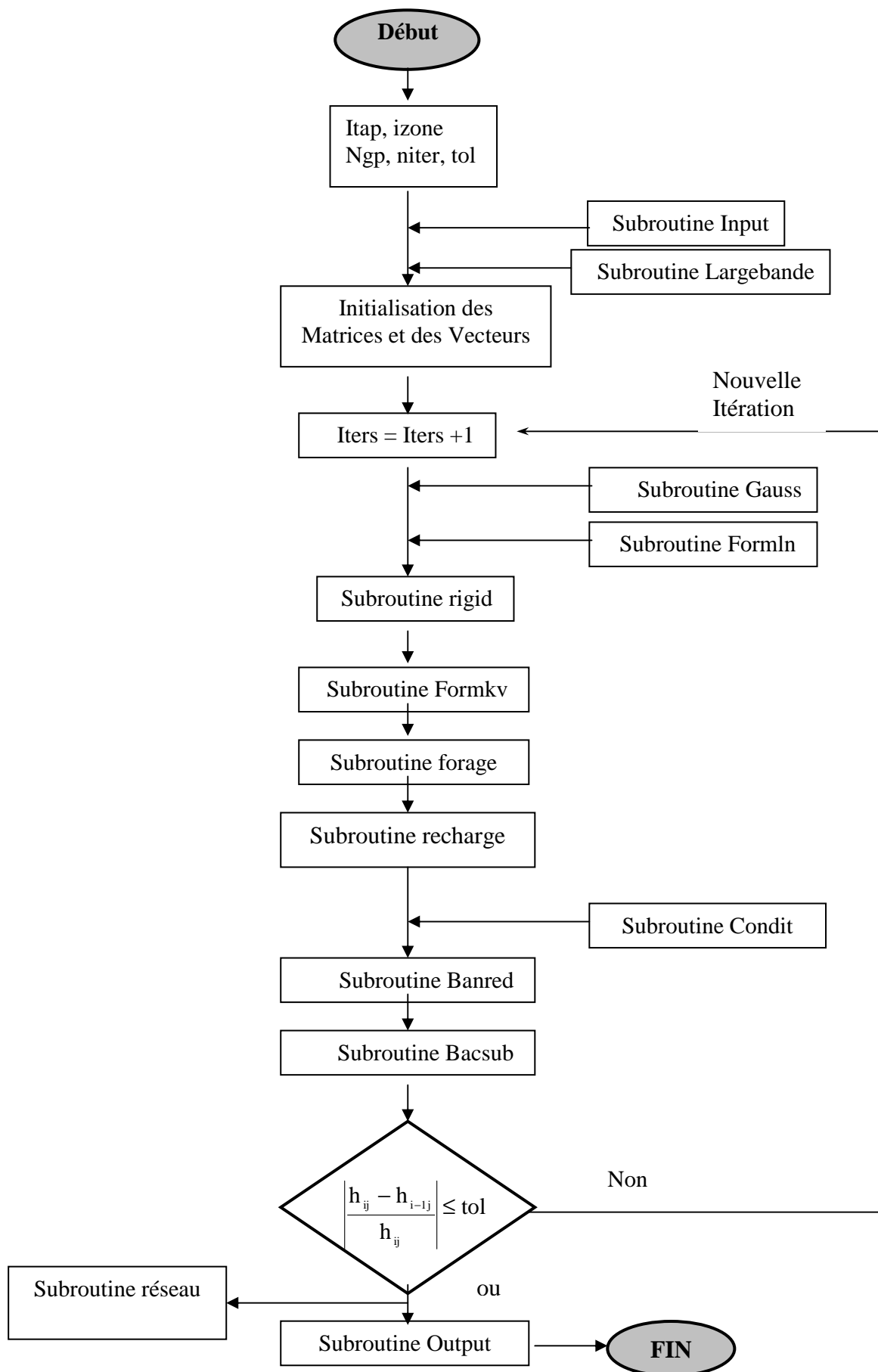
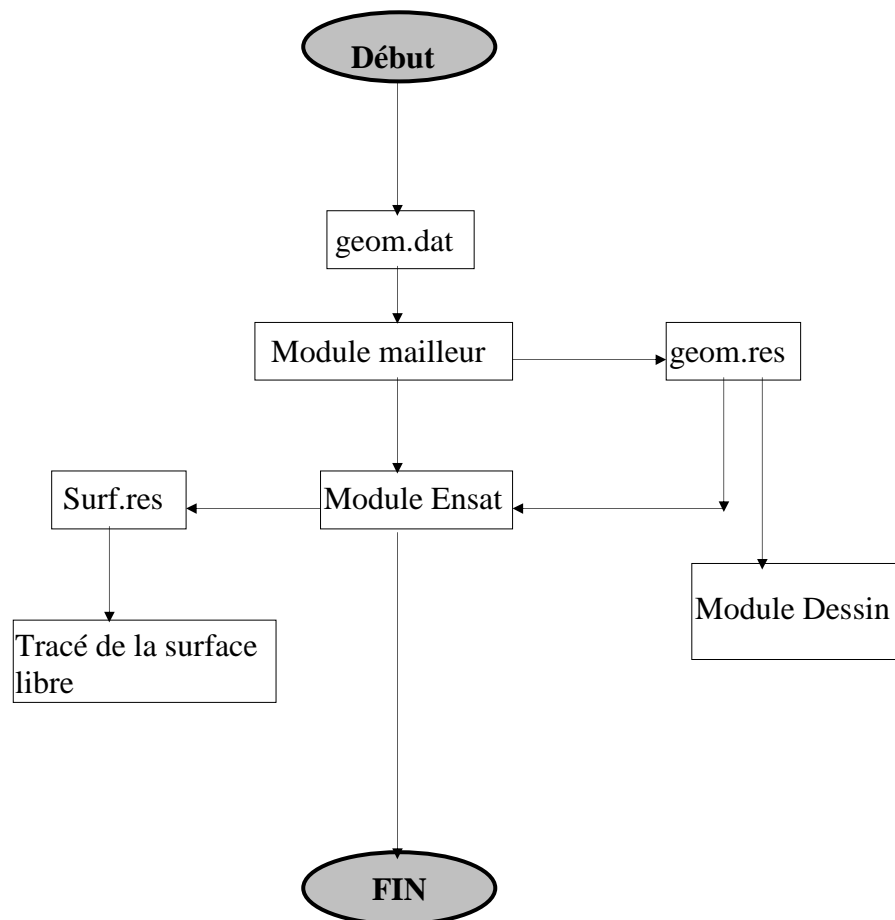


Figure V.12: Organigramme du module Ensaf en régime permanent.

Le programme Ensatr du régime permanent est adapté au régime transitoire. Il est appelé ‘Ensatr’ : « Ecoulement non-saturé transitoire ».

Dans le programme ‘Ensatr’, à chaque pas de temps, à chaque itération, on répète les mêmes étapes que celles de programme ‘ENSAT’, seulement on ajoute le calcul et l’assemblage de la matrice d’emmagasinement globale.



FigureV.13 : Organigramme du programme magister.bat.

Conclusion:

Dans la section précédente on a essayé, par l’élaboration de ce programme, d’aider le lecteur à franchir la frontière entre la théorie et la mise en application de la méthode des éléments finis sur ordinateur.

A travers ce chapitre, les organigrammes des programmes ont été décrits avec leurs sous-programmes détaillés. Le programme « mailleur » génère le maillage automatique, et prépare les données utilisées par le programme « Ensats », ce dernier permet de résoudre l’équation de Richards appliqué sur l’écoulement permanent ou transitoire dans une nappe libre par la méthode des éléments finis.



CHAPITRE VI:

Application

du programme

et

discussion des résultats



Introduction:

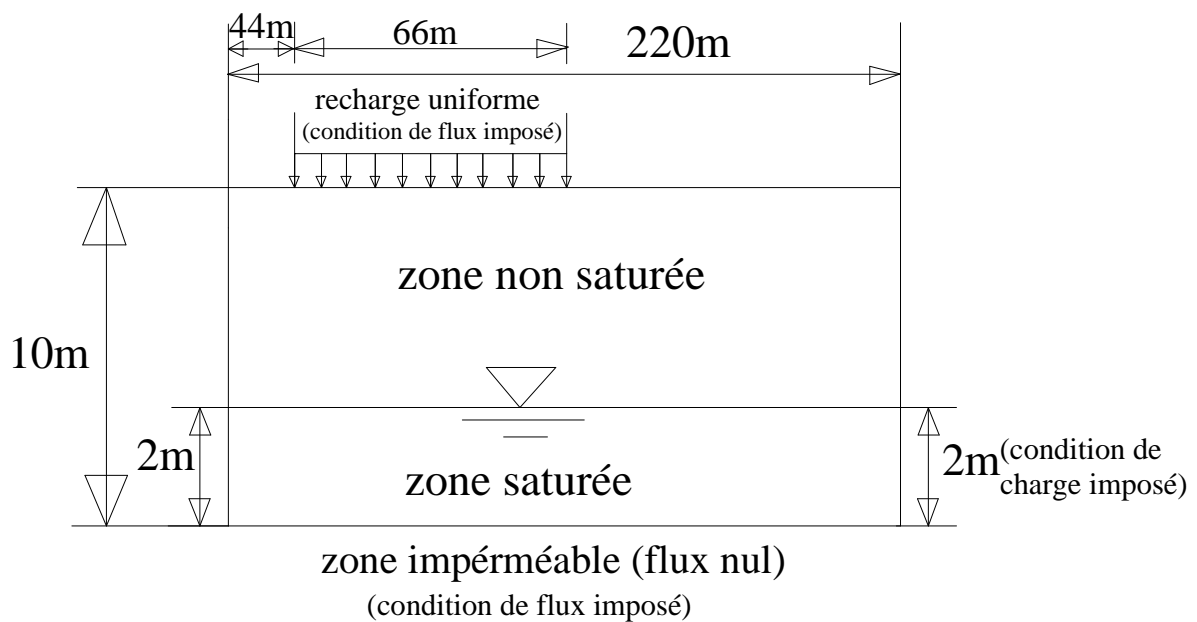
Dans le présent chapitre, l'étude est consacrée à des applications du programme développé sur une nappe fictive. La recharge de cette nappe que ça soit uniforme (cas de bassin d'infiltration par exemple) ou ponctuelle (cas de forage d'injection), fait l'objet de ces applications.

Les applications servent à étudier l'évolution dans l'espace et dans le temps de l'écoulement à surface libre suite à une recharge et on tenant compte, selon le cas, des débits pompés. Il en résulte donc la détermination de la position de la surface libre, le champ des vecteurs vitesse et le relèvement du niveau piézométrique. Ainsi on a étudié l'influence de quelques paramètres hydrodynamique sur la recharge.

VI.1. premier cas: effet du temps: Lors de cet exemple nous avons étudié l'évolution de la surface libre à plusieurs moments en fonction d'une recharge répartie uniformément sur une longueur de 66m ainsi on va représenter le champ des vitesses obtenu après un temps égale $4 \text{ e}6 \text{ s}$.

VI.1.1.présentation de la nappe et conditions aux limites:

La figureVI.1 illustre la structure étudiée et les conditions aux limites:



FigureVI.1. structure étudiée et conditions aux limites. Premier cas.

VI.1.2. Données du problème:

Perméabilités à saturation :

$$K_{xx} = 0.001 \text{ m/s}$$

$$K_{yy} = 0.001 \text{ m/s}$$

$$K_{xy} = K_{yx} = 0.$$

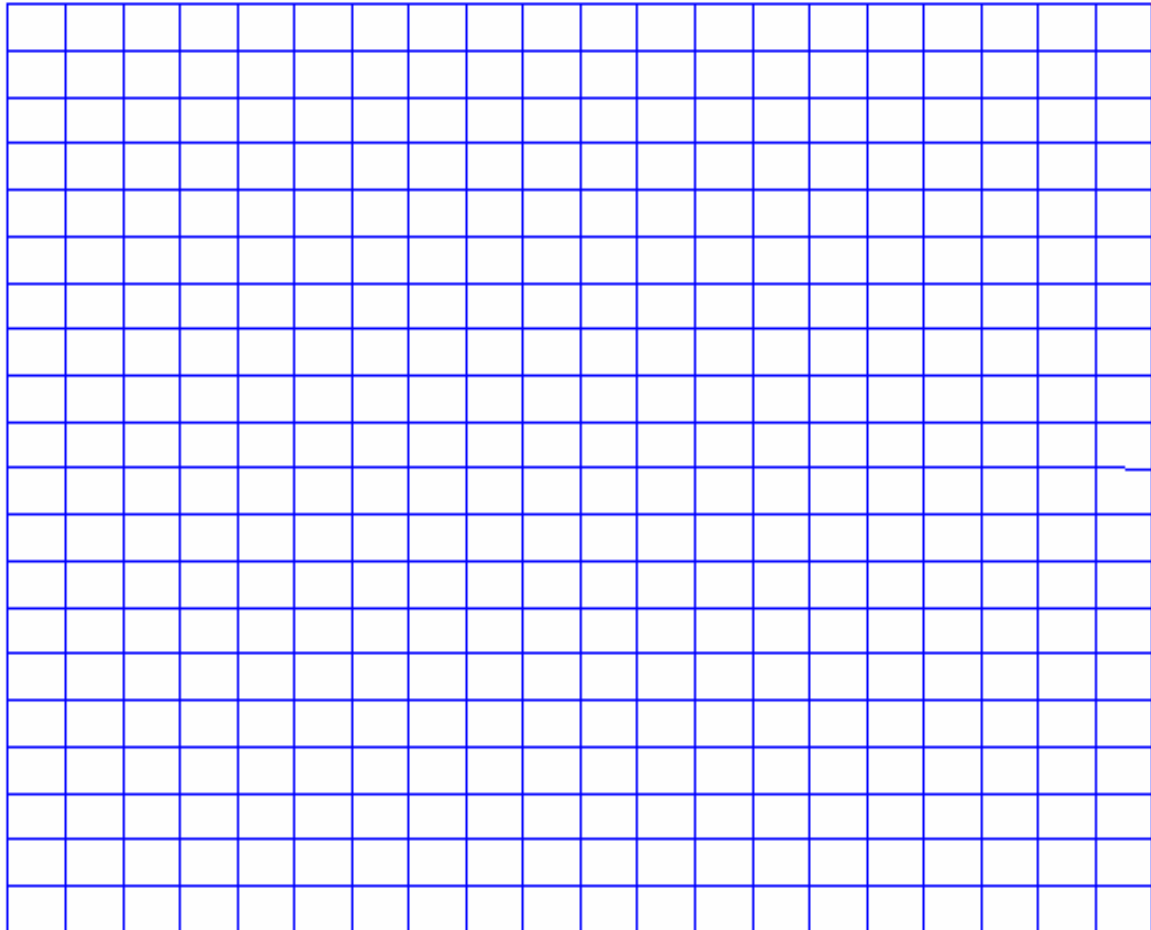
Coefficient d'emmagasinement S: 0,06

Taux de rechargement: $1 \text{ e-}5 \text{ m/s}$

Pas de temps: 2e+6second

VI.1.3.Maillage de la structure :

Le maillage de la structure est assuré à l'aide du programme « Mailleur » défini en cinquième chapitre. Il consiste à diviser la structure en éléments finis en respectant la géométrie de la nappe et les propriétés des matériaux qui constituent l'aquifère. Le résultat du maillage de la structure est donné sur la figure VI.2.



FigureVI.2: Maillage automatique de la structure.

VI.1.4.caractéristique du maillage:

Type d'élément fini : rectangulaire isoparamétrique à quatre nœuds.

Nombre des éléments : 400

Nombre des nœuds : 441

Il est à noter que le maillage de la structure ainsi que les caractéristiques de ce maillage ne va pas changer pour tous les cas qu'on va étudier dans ce chapitre car les dimensions de la structure ne change pas et le fichier des données du programme Mailleur ne change pas aussi.

VI.1.5. conditions aux limites sur les nœuds:

Le taux de recharge est appliqué du nœud numéro 100 au nœud 222. La charge d'eau initiale est appliquée du nœud 1 au nœud 5 de la première face et du nœud 421 au nœud 425 de la deuxième face.

VI.1.6. Résultats obtenus:

Les lignes qui représentent la surface libre à plusieurs moments (2e6, 4e6, 6e6, et 8e6) de recharge sont illustrées dans la figure VI.3.

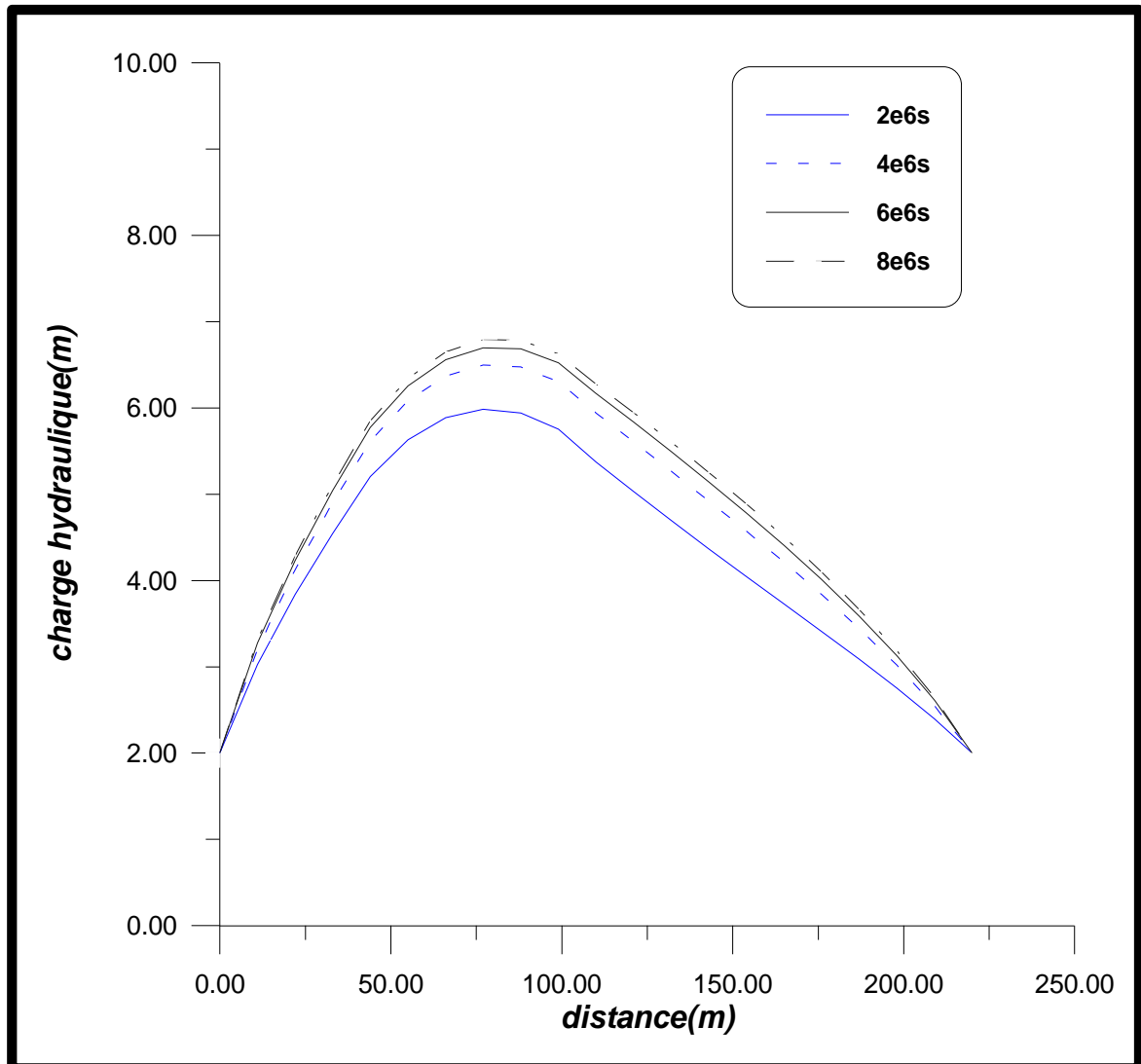


Figure VI.3. Surface libre lors de la recharge dans le temps et dans l'espace.

La figure VI.4 représente le champ des vitesses obtenu à l'aide du logiciel MATLAB. Les valeurs prises pour la détermination du champ des vitesses sont les composantes x et y d'espace et les composantes u et v de la vitesse. Ces composantes sont données par notre programme développé dans cette étude.

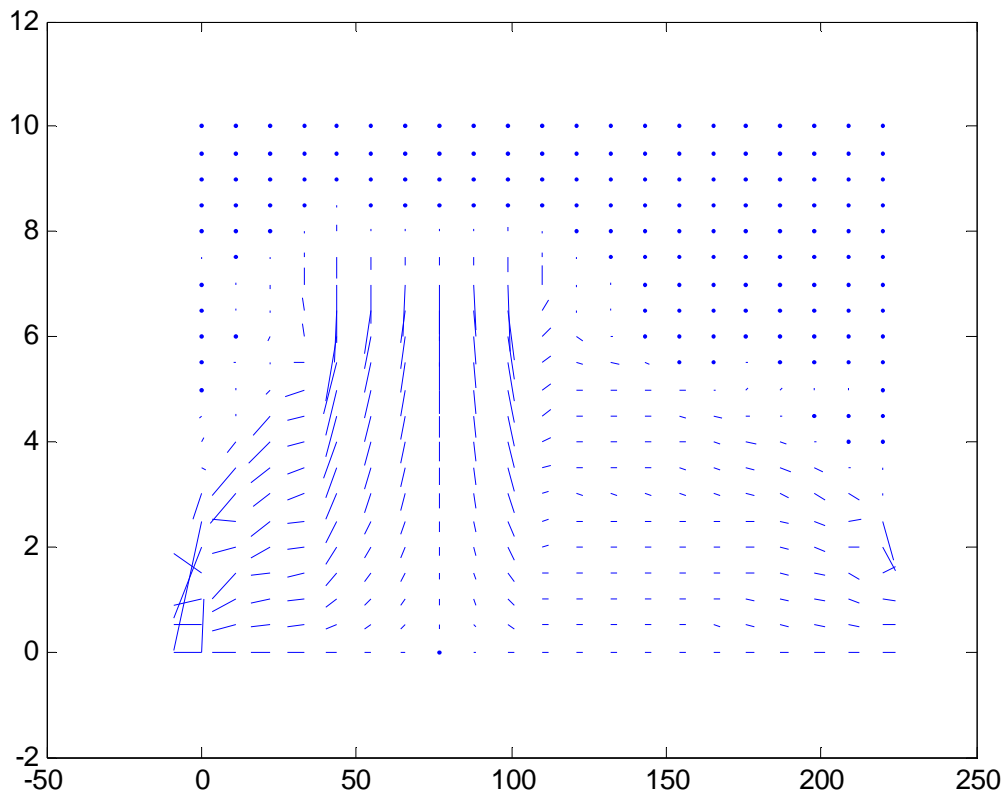


Figure VI.4. le champ des vecteurs vitesses obtenu pour le premier cas après un temps de $4 \text{ e}6 \text{ s}$.

VI.1.7.Observations et discussions :

VI.1.7.1.surface libre:

Si on prend une seule courbe pour l'interpréter On peut dire que le niveau piézométrique de la nappe augmente à partir du niveau initial ayant comme ordonnée 2m pour atteint une valeur maximale puis il diminue pour revenir à la valeur initiale de la charge hydraulique. Pour l'ensemble de ces courbes Nous remarquons une formation de plusieurs courbes convexes représentant de la surface piézométrique au cours du temps et le niveau piézométrique s'élève avec l'augmentation de temps de recharge mais cela dans les premiers temps seulement car on remarque qu'il n' y a pas une différence considérable entre la courbe de la surface libre à $4 \text{ e}6 \text{ s}$ et $8 \text{ e}6 \text{ s}$ donc l'effet du temps sur l'évolution de la surface libre à diminué donc on est proche du régime permanent ou l'allure de la surface libre ne varie plus en fonction du temps. Cependant un régime permanent rigoureux n'existe pas, sauf dans des conditions exceptionnelles. Dans la réalité il est possible d'admettre l'apparition d'un régime quasi-permanent.

VI.1.7.2. champ des vecteurs vitesse:

Le champ vectoriel que nous avons obtenu précédemment représente champ des vitesses du courant liquide qui fera avancer les particule d'eau au fil du temps. Le chemin emprunté par ces particules est appelé trajectoire.

VI.2. deuxième cas:influence de coefficient d'emménagement:

Dans ce cas on va prendre l'exemple du premier cas, celle après un temps de 4×10^6 s, et on le compare avec un autre exemple qui à les mêmes données que celui du premier cas sauf le coefficient d'emménagement S qu'on va le prendre égale à 0.25 au lieu de 0.06 pour voir l'effet de changement de coefficient d'emménagement sur le comportement de la ligne phréatique (voir figure VI.5). Le champ des vitesses est aussi représenté dans ce cas mais seulement pour $S = 0.25$.

VI.2.1.Resultats obtenus:

Les lignes représentant la surface libre à plusieurs coefficients d'emménagement (0.06, 0.25) sont illustrées dans la figure VI.5.

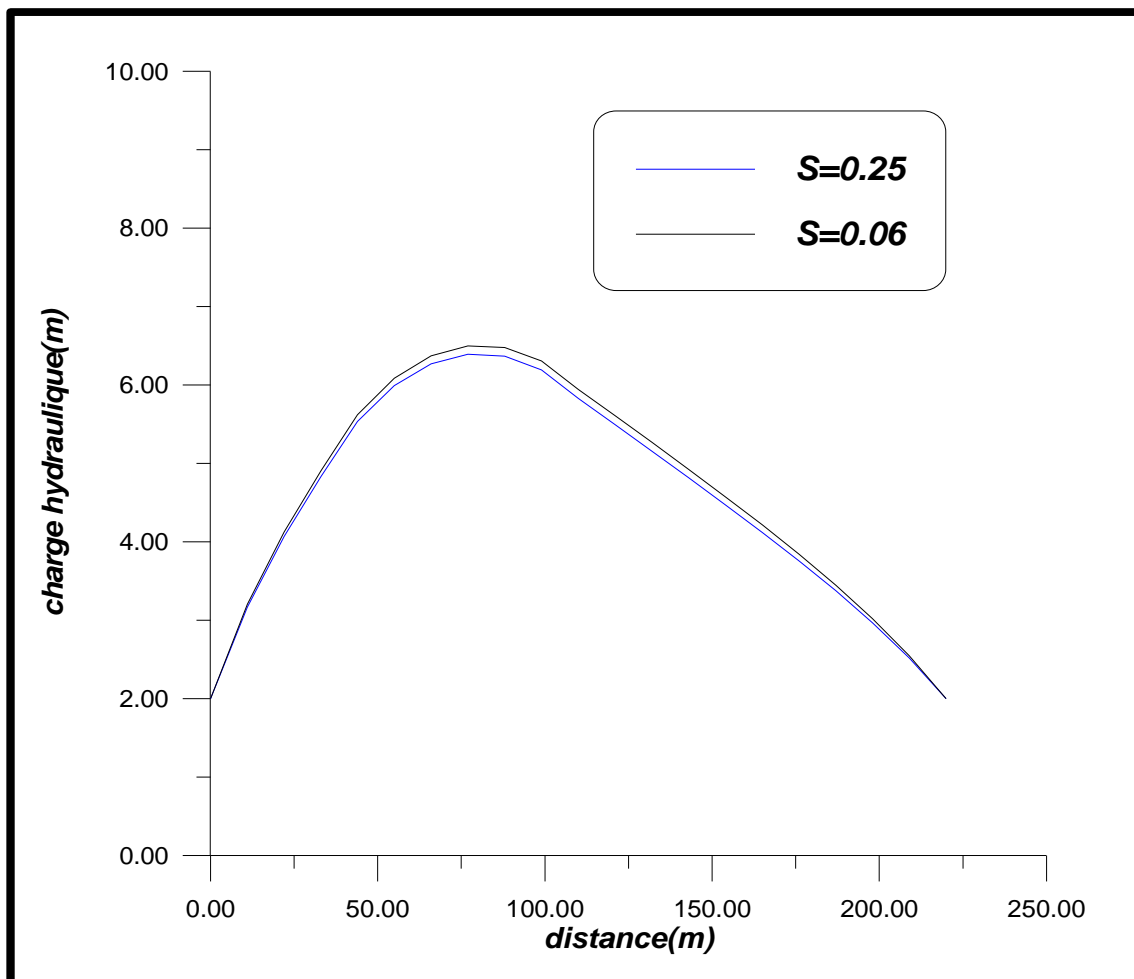
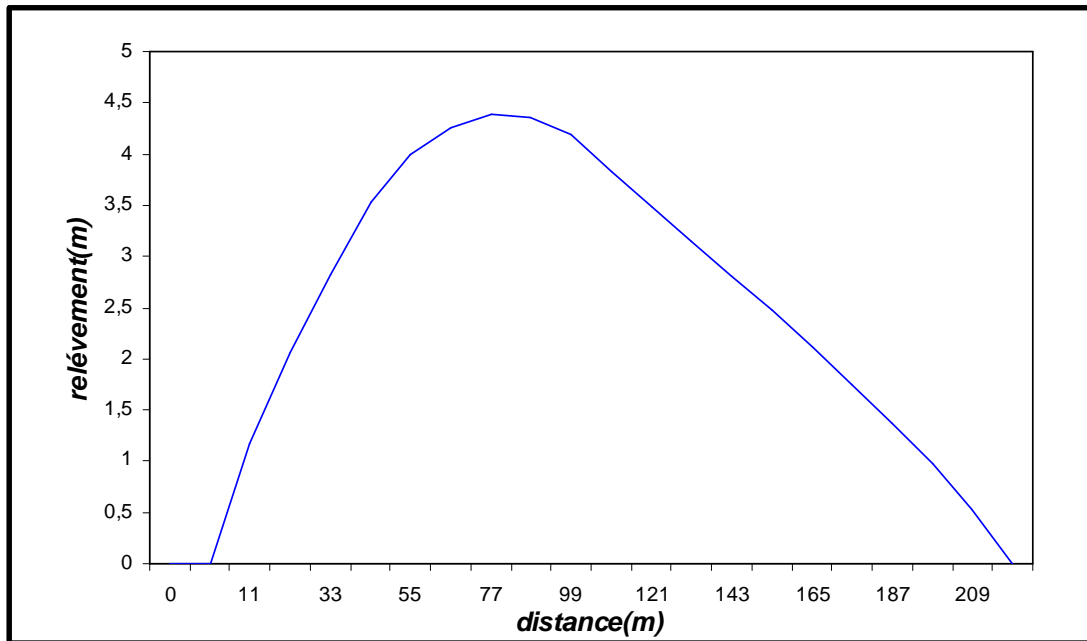


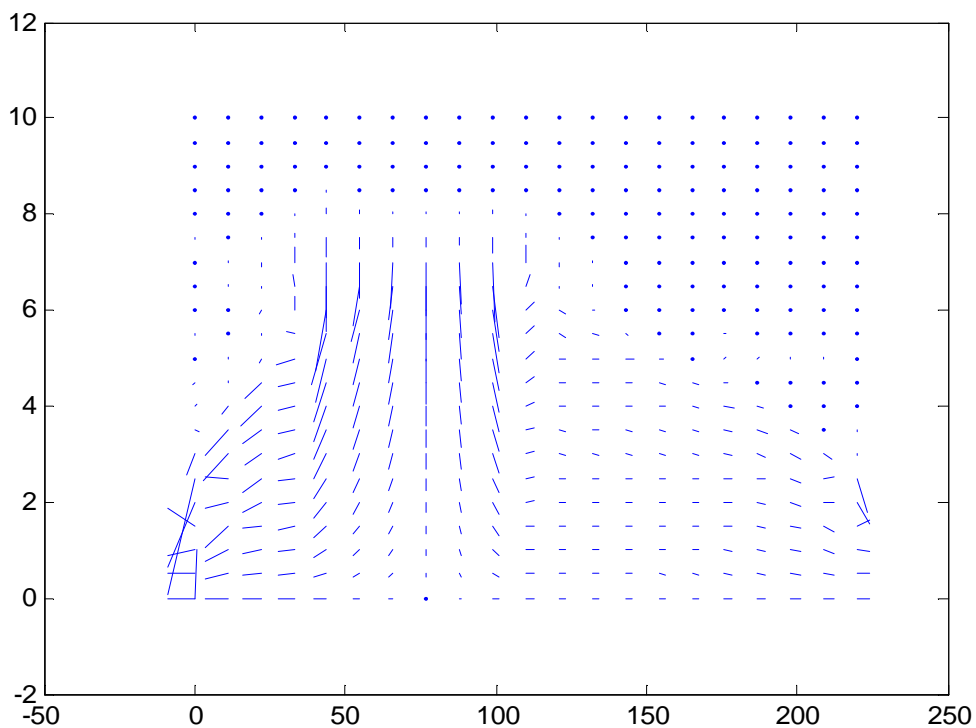
Figure VI.5. l'évolution de la surface libre dans l'espace selon différents coefficients d'emménagement après un temps de 4×10^6 s.

La figureVI.6 représente le relèvement du niveau piézométrique dans la nappe après un temps de $4 \text{ e}6 \text{ s}$.



FigureVI.6.relèvement du niveau piézométrique dans l'espace après un temps de $4 \text{ e}6 \text{ s}$ avec $S = 0.25$.

Le champ des vitesses obtenu pour $S = 0.25$ est représenté par la figureVI.7 :



FigureVI.7.champ des vitesses obtenu pour le deuxième cas après $4 \text{ e}6 \text{ s}$ avec $S = 0.25$.

VI.2.2.Observations et discussions :**VI.2.2.1.surface libre:**

Nous remarquons une formation de deux courbes différentes qui représentent l'évolution de la surface libre dans l'espace après un temps de recharge égale à 4×10^6 s. chaque courbe est caractérisé par un coefficient d'emmagasinement différent de coefficient d'emmagasinement de l'autre courbe, mais l'influence de coefficient d'emmagasinement n'est pas considérable vue que les deux courbes sont presque identiques et superposées on certains points. On dit ça parce que il ne faut pas oublier que les deux valeurs de coefficients d'emmagasinement pris dans ce cas ne sont pas proche l'une de l'autre.

VI.2.2.2.champ des vecteurs vitesses:

Le champ des vitesses obtenu dans ce cas est semblable à celui obtenu pour le premier cas car le premier et le deuxième cas ne se diffère que par le coefficient d'emmagasinement donc, tout comme l'allure obtenu de la surface libre, le coefficient d'emmagasinement n'a pas une influence considérable sur le champ des vitesses.

VI.3. troisième cas:influence de coefficient de perméabilité:

Dans ce cas on va prendre aussi l'exemple du premier cas, celle après un temps de 4×10^6 s, et on le compare avec un autre exemple qui à les mêmes données que celui du premier cas sauf le coefficient de perméabilité qu'on va le prendre $K_{xx} = K_{yy} = 0.0001$ au lieu de 0.001 pour voir l'effet de changement de coefficient de perméabilité sur le comportement de la ligne phréatique (voir figure VI.8).

VI.3.1.Resultats obtenus:

Les lignes qui représentent la surface libre à plusieurs coefficients de perméabilité (0.001 , 0.0001) sont illustrées dans la figure VI.8.

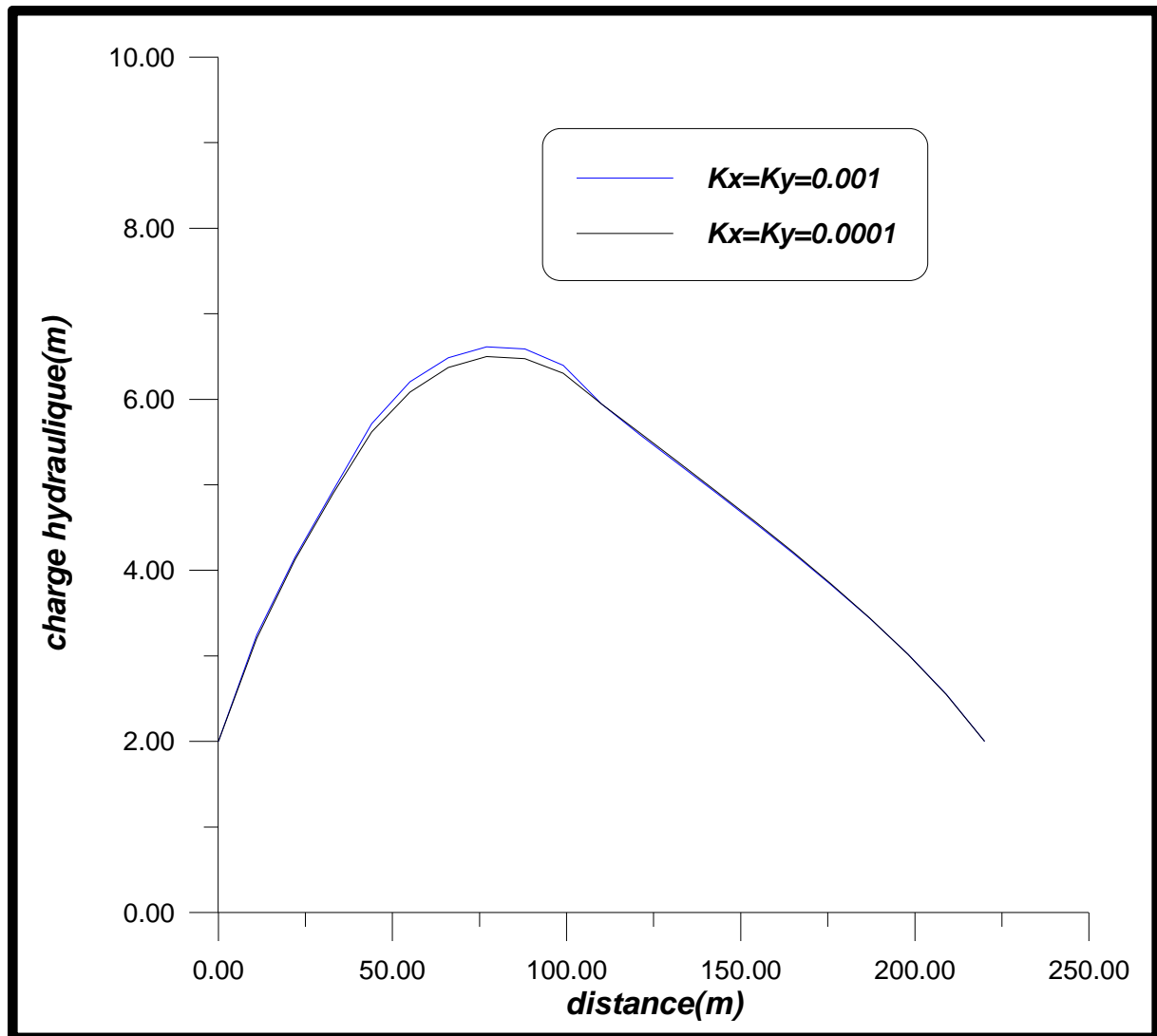


Figure VI.8. l'évolution de la surface libre dans l'espace selon différents coefficients de perméabilité après un temps de 4 e6s.

VI.3.2.Observations et discussions :

Selon les deux courbes représentées dans cette figure on peut dire que le niveau piézométrique s'élève dans l'espace avec l'augmentation de coefficient de perméabilité. Donc l'allure de la surface libre se diffère d'un sol à un autre si chaque un de ces sols est caractérisé par un coefficient de perméabilité différent de l'autre. L'influence de coefficient de perméabilité apparaît seulement sur la zone de répartition de taux de recharge (longueur de répartition uniforme du taux de recharge), loin de cette zone les deux courbes sont superposées.

VI.4. quatrième cas:influence de taux de recharge:

Dans ce cas on va voir l'influence de taux de recharge (recharge répartie uniformément sur une certaine longueur) sur le comportement de la ligne phréatique. Donc on va varier la valeur de ce taux on prenant $1 \text{ e-}5 \text{ m/s}$ comme première valeur et

0.75 e-5m/s comme deuxième valeur et 0.5 e-5m/s comme troisième valeur. La structure étudiée et la longueur de répartition de la recharge ainsi que la position de la recharge sont les mêmes que ceux du premier cas.

VI.4.1. Données du problème:

Perméabilités à saturation :

$$K_{xx} = 0.001 \text{ m/s}$$

$$K_{yy} = 0.001 \text{ m/s}$$

$$K_{xy} = K_{yx} = 0.$$

Coefficient d'emmagasinement S: 0,25

Pas de temps: 4e+6second

Temps final de simulation: 4e+6second

VI.4.2. Résultats obtenus:

La figure VI.9 illustre l'allure de la surface libre en fonction des valeurs prises de taux de recharge:

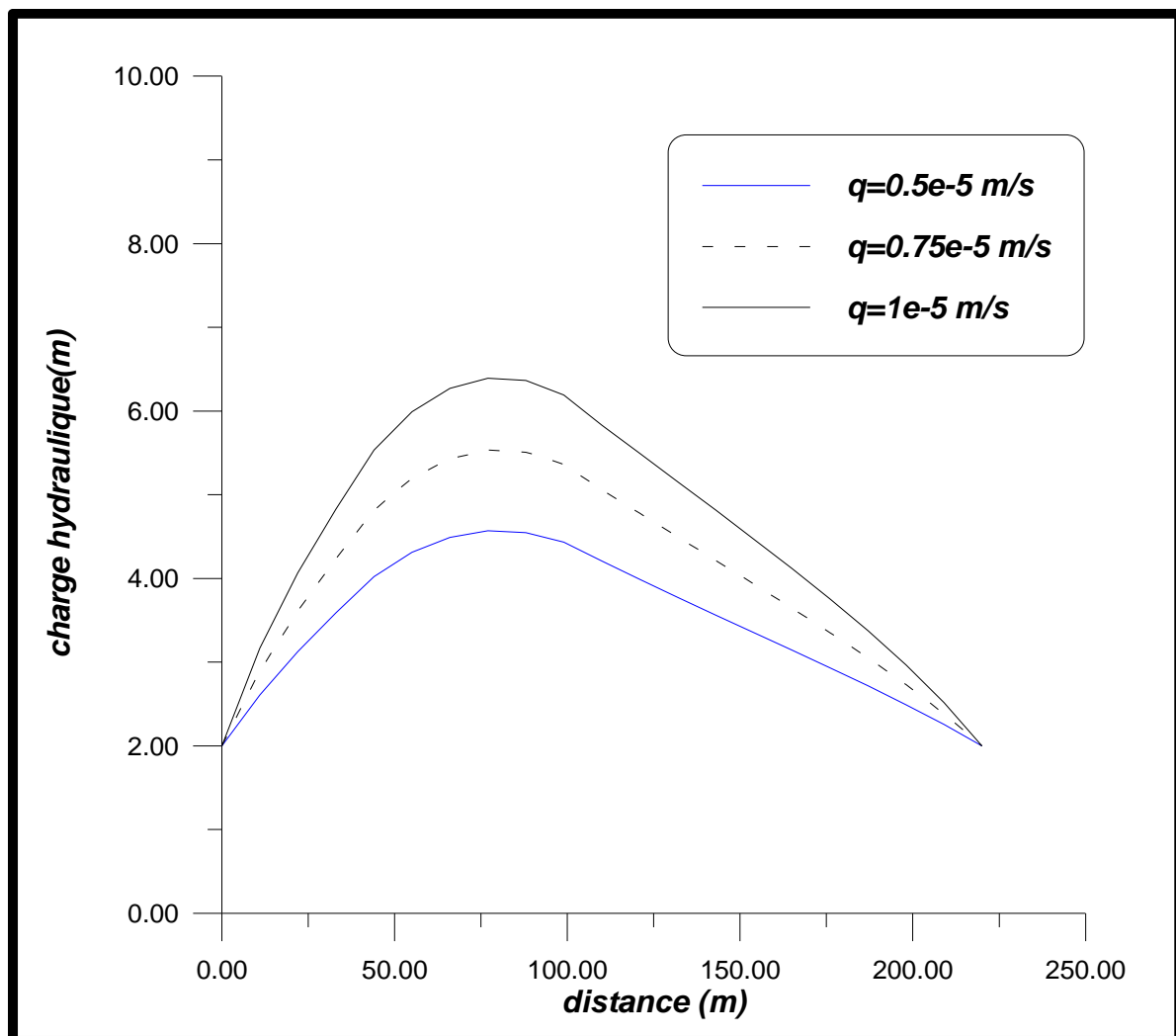


Figure VI.9. L'évolution de la surface piézométrique en fonction des taux de recharge.

VI.4.3. Observations et discussions :

Nous remarquons une formation de plusieurs courbes, chaque courbe est caractérisée par un taux de recharge différent de l'autre. Le niveau piézométrique augmente avec l'augmentation de taux de recharge de la nappe. On dit alors que le relèvement de niveau est proportionnel au taux de recharge de la nappe. Donc l'évolution de la surface libre est en fonction, dans la majorité des cas, de type de recharge (naturelle ou artificielle) et le moyen utilisé pour la recharge car par exemple le taux de recharge fourni par la précipitation n'est pas le même que celui fourni par une rivière ou par un bassin d'infiltration ou par un forage d'injection.

VI.5. cinquième cas: forage d'injection (recharge ponctuelle):

Dans ce cas au lieu que ça soit une recharge répartie uniformément sur une longueur ça sera une recharge ponctuelle avec un forage d'injection donc on aura un débit spécifique (débit d'alimentation) en m^2/s au lieu d'un taux de recharge. On va prendre ici deux variantes, la différence entre les deux variantes résulte seulement dans la valeur du débit d'alimentation de la nappe c'est-à-dire qu'on va prendre deux valeurs différentes de ce débit d'alimentation. toutes les autres données sont les mêmes pour les deux variantes.

VI.5.1.présentation de la nappe et conditions aux limites:

La figure VI.10 illustre la structure étudiée et les conditions aux limites en cas de forage d'injection.

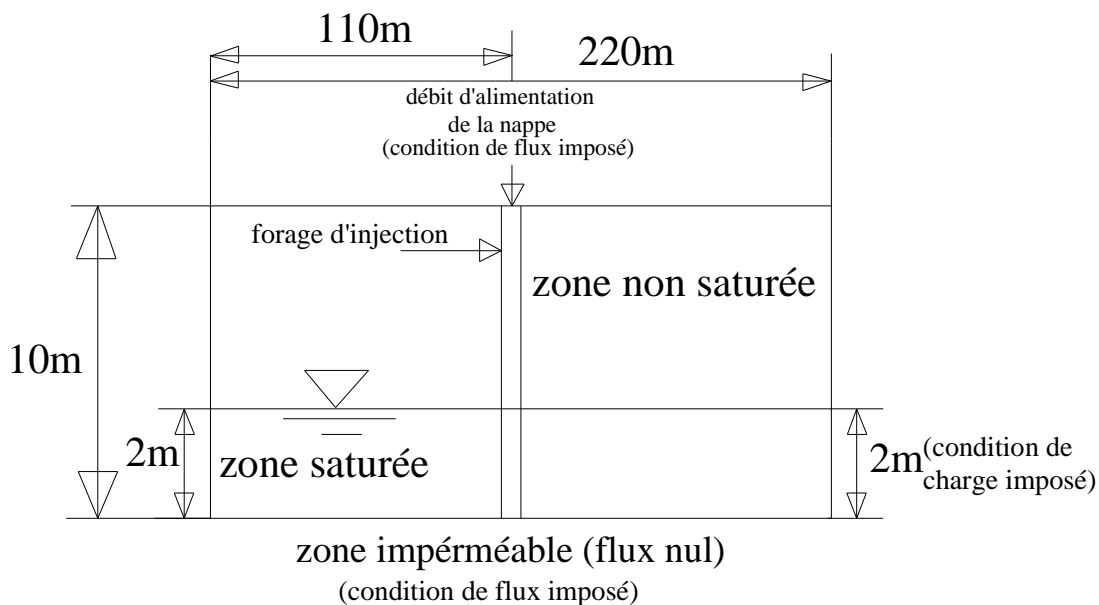


Figure VI.10. structure étudiée et conditions aux limites. Cinquième cas.

VI.5.2. Données du problème:

Perméabilités à saturation :

$$K_{xx} = 0.001 \text{ m/s}$$

$$K_{yy} = 0.001 \text{ m/s}$$

$K_{xy} = K_{yx} = 0$.

Coefficient d'emmagasinement S : 0,06

Débit d'alimentation spécifique à partir du forage d'injection: $5 \text{ e-}5 \text{ m}^2 / \text{s}$ pour la première variante et $3 \text{ e-}5 \text{ m}^2 / \text{s}$ pour la deuxième variante.

Pas de temps: $4 \text{ e+}6 \text{ second}$

Temps final de simulation: $4 \text{ e+}6 \text{ second}$

Le forage d'injection est situé au milieu de la structure, et il occupe toute l'épaisseur de la structure.

VI.5.3. Résultats obtenus: cette fois, pour mieux voir l'allure des deux courbes on a pris un pas pour l'axe des ordonnées égale à 0.5m au lieu de 1m (vue que les débits d'alimentation spécifique sont relativement faibles).

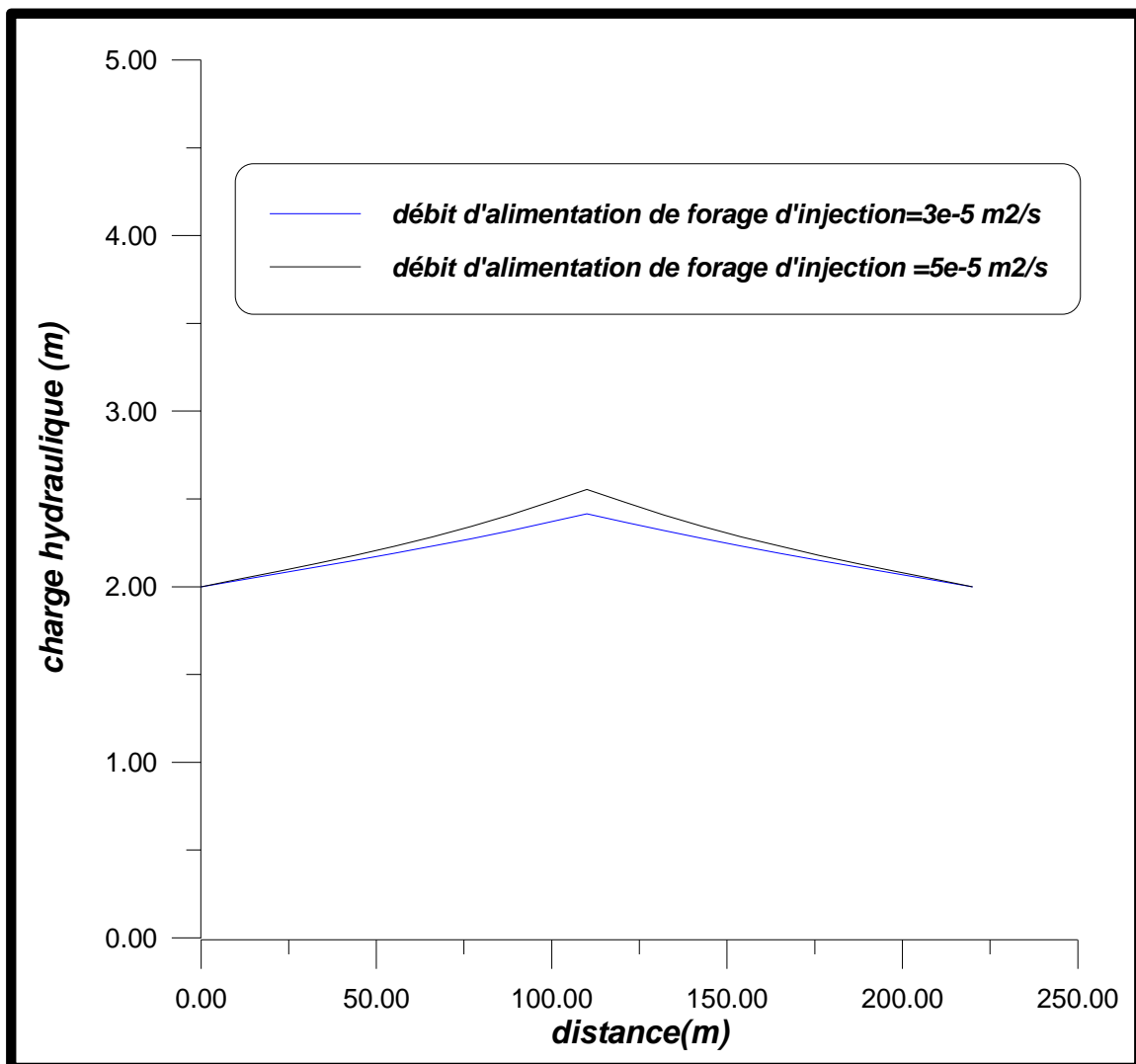


Figure VI.11. évolution de la surface libre dans l'espace après un temps de $4 \text{ e}6 \text{ s}$ en cas d'alimentation par un forage d'injection avec deux débits différents.

Le champ des vitesses obtenu pour un débit d'alimentation de $5 \text{ e-}5 \text{ m}^2 / \text{s}$ est le suivant :

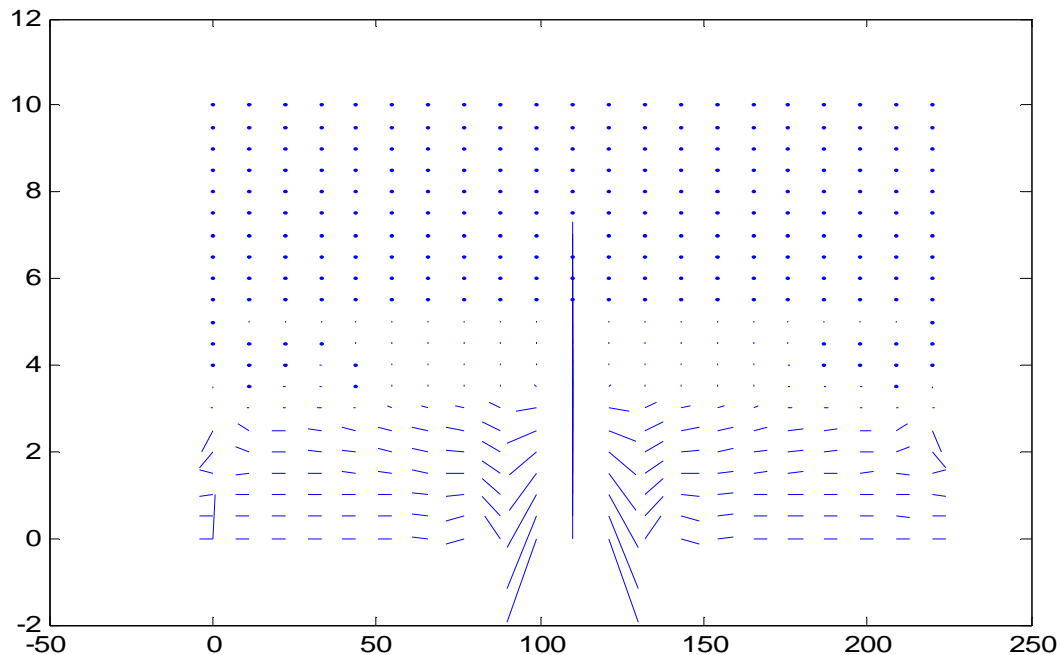


Figure VI.12. champ des vitesses obtenu pour le cinquième cas avec un débit d'alimentation de $5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

VI.5.4. Observations et discussions:

VI.5.4.1. surface libre:

Nous remarquons une formation de deux cônes de recharge (cône de surpression) suite à l'alimentation de la nappe par un forage d'injection. Chaque cône est caractérisé par un débit d'alimentation. Les cônes de recharge ont la forme inversée du cône de dépression apparaît lors du pompage. On remarque aussi que le relèvement du niveau augmente avec l'augmentation de débit d'injection ce qui est tout à fait logique. Le niveau piézométrique maximal dans les deux courbes représente le niveau d'eau dans le forage d'injection après $4 \times 10^6 \text{ s}$ d'alimentation.

VI.5.4.2. champ des vitesses:

On remarque que le champ des vitesses obtenu pour un forage d'injection se diffère à celui obtenu pour une recharge répartie uniformément et comme nous avons défini un champ des vitesses comme les vitesses du courant liquide qui fera avancer les particules d'eau au fil du temps alors on peut expliquer cette différence par un changement des lignes de courants dans le cas de forage d'injection par rapport aux cas d'une recharge uniforme traités dans les exemples précédents. Et automatiquement si les lignes de courant change la surface libre change aussi puisque elle représente la première ligne de courant, c'est ce qu'on a vu dans la courbe de la surface libre.

VI.6. sixième cas: recharge et pompage en parallèle avec un taux de recharge important par rapport au débit de pompage:

Dans cette section on va prendre deux variantes et on va comparer entre ces deux variantes:

VI.6.1.première variante:

C'est la variante qui représente la recharge et le pompage en même temps c'est-à-dire qu'on a un taux de recharge qui tend à remplir la nappe d'eau et un débit spécifique d'extraction qui tend à abaisser le niveau piézométrique dans la nappe. Le taux de recharge est important par rapport au débit spécifique d'extraction.

VI.6.1.1.présentation de la nappe et conditions aux limites:

La figure VI.13 représente la structure étudiée et les conditions aux limites dans ce cas:

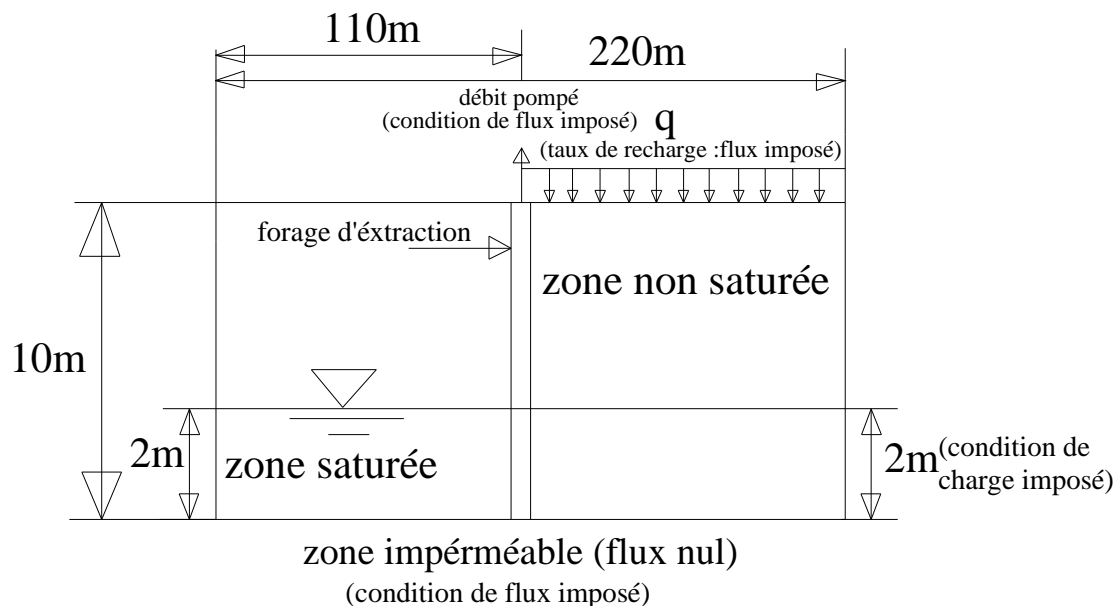


Figure VI.13. Structure étudiée et conditions aux limites. Sixième cas variante de recharge et pompage en parallèle.

VI.6.1.2. Données du problème:

Perméabilités à saturation :

$$K_{xx} = 0.001 \text{ m/s}$$

$$K_{yy} = 0.001 \text{ m/s}$$

$$K_{xy} = K_{yx} = 0.$$

Coefficient d'emmagasinement S: 0,10

Taux de rechargement: $1.5 \cdot 10^{-6}$ m/s répartie sur une longueur de 110m (appliquée du nœud 211 au nœud 441).

Débit d'extraction du forage: $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (forage d'extraction au milieu).

Pas de temps: $4 \cdot 10^6$ second

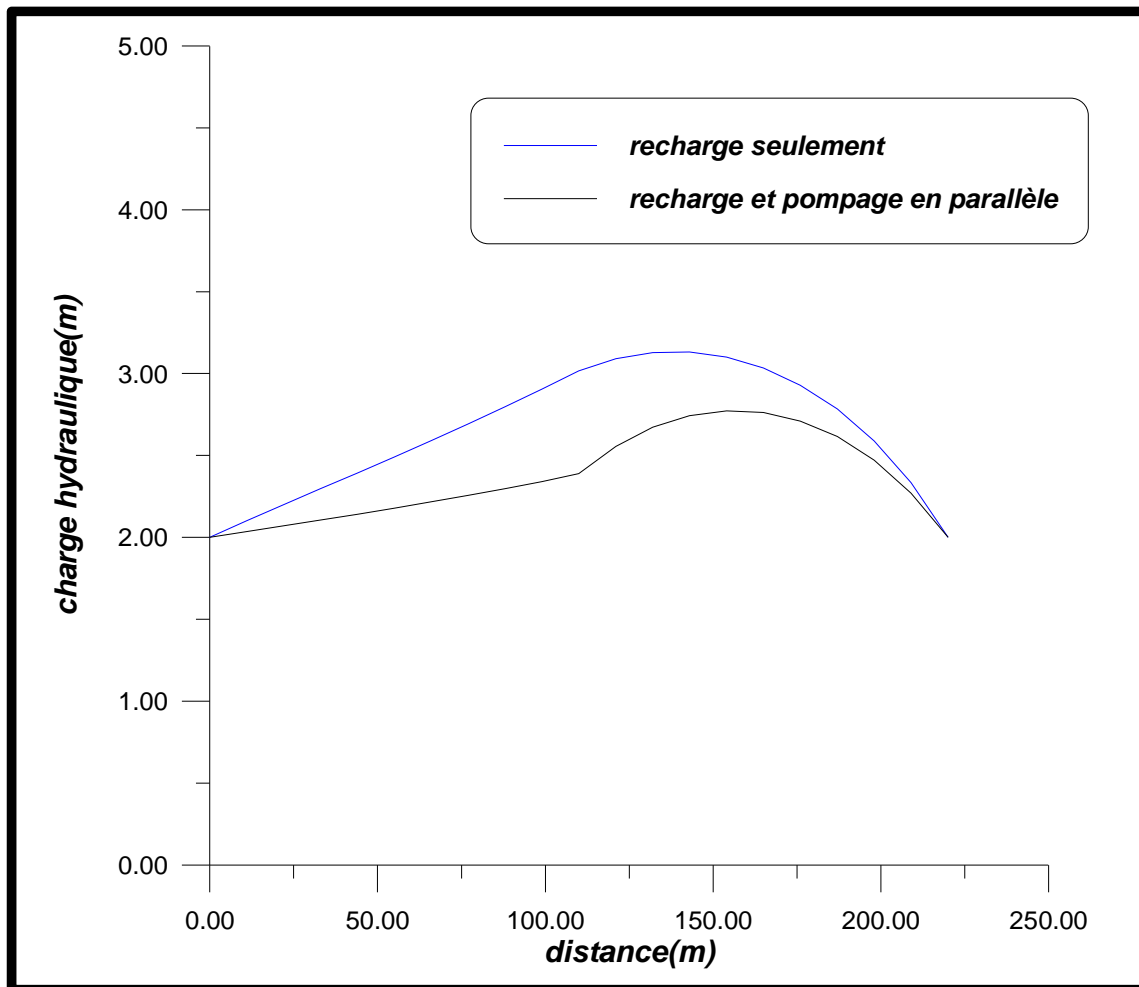
Temps finale de simulation: $4 \cdot 10^6$ second

VI.6.2.deuxième variante:

Dans cette variante on prend un recharge seulement c'est-à-dire qu'il n'y a pas de pompage (débit pompé nul) et on garde toute les données de la première variante.

VI.6.3. Résultats obtenus:

La figureVI.14 représente les résultats obtenus pour les deux variantes:



FigureVI.14.l'évolution de la surface libre dans l'espace. Recharge seulement et recharge et pompage en parallèle avec un taux de recharge important par rapport au débit de pompage.

VI.6.4. Observations et discussions:

Selon la figure présentée ci-dessus on remarque que l'allure qui représente la surface libre en cas de recharge seulement augmente presque linéairement à partir de la valeur de la charge d'eau initiale jusqu'à une certaine valeur où elle devient courbée et elle continue l'augmentation pour atteint une valeur maximale puis elle chute. Le

niveau piézométrique maximal se trouve toujours sur un point situé le long de la longueur de répartition uniforme de la recharge.

Le relèvement de niveau piézométrique dans le cas de recharge et pompage en parallèle est moins important que celui du cas de recharge seulement et cela à cause du pompage qui a tendance à abaisser le niveau d'eau. L'effet du pompage est plus important sur la zone non soumise à une recharge répartie (partie gauche de la structure).

VI.7. septième cas: recharge et pompage en parallèle avec un débit de pompage important par rapport au taux de recharge:

Dans ce cas on va étudier le cas inverse, c'est-à-dire que le débit de pompage aura une influence considérable sur l'évolution de la surface piézométrique.

Ici on a aussi deux variantes: la première variante représente un recharge et pompage en parallèle avec un débit de pompage important par rapport au taux de recharge, la deuxième variante représente un recharge seulement (débit pompé nul).

Ce qui va changer dans ce cas par rapport au cas précédant (sixième cas) c'est que dans ce cas on prend une valeur de taux de rechargement égale à 8×10^{-7} m/s c'est-à-dire qu'on a diminué le taux de rechargement pour augmenter l'effet de pompage sur le niveau piézométrique de la nappe.

VI.7.1. Résultats obtenus:

La figure VI.15 représente les résultats obtenus pour les deux variantes:

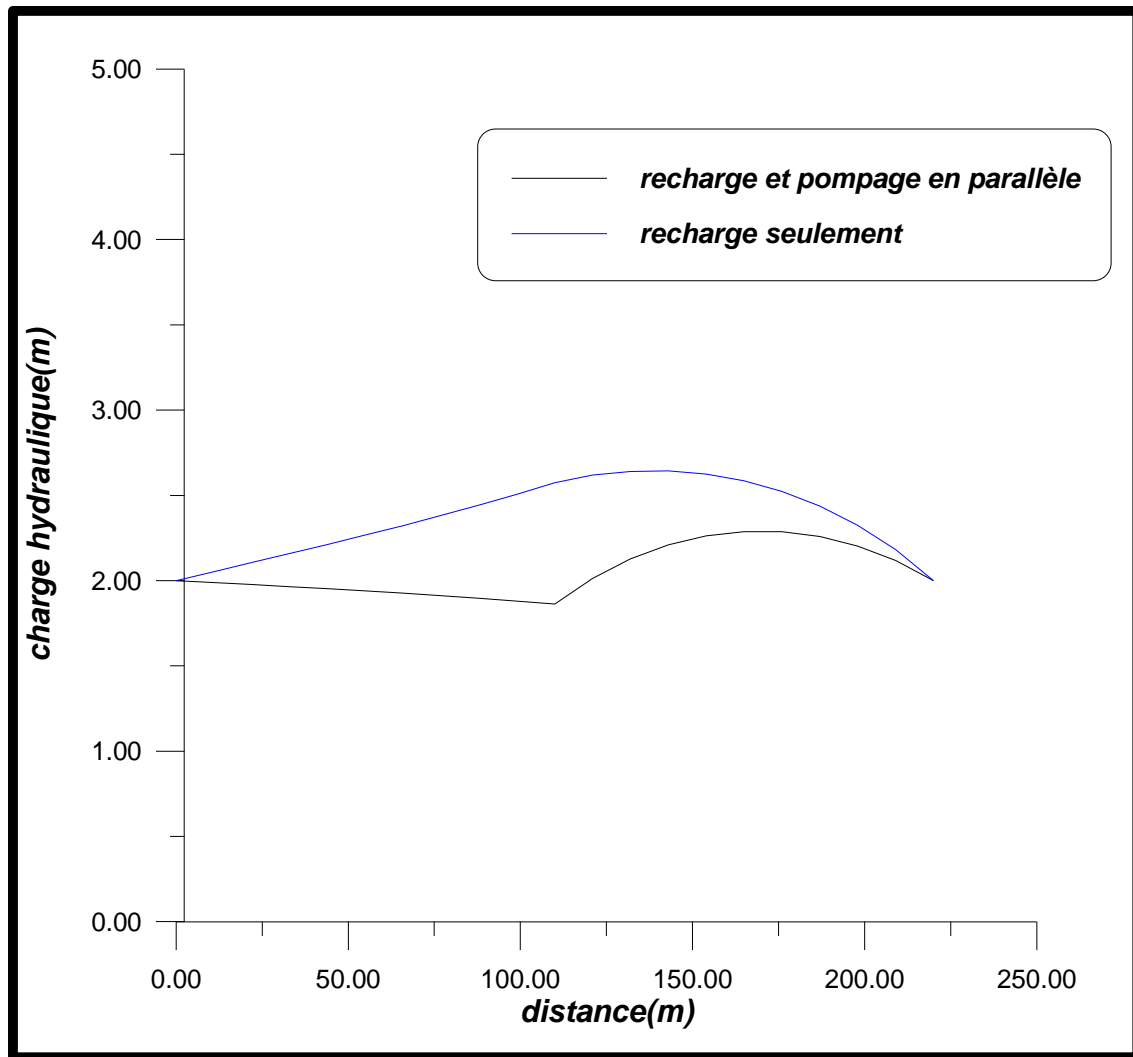


Figure VI.15. l'évolution de la surface libre dans l'espace. Recharge seulement et recharge et pompage en parallèle avec un débit de pompage important par rapport au taux de recharge.

VI.7.2. Observations et discussions:

Dans ce cas l'effet du pompage est très considérable surtout au niveau de la partie non soumise à la recharge répartie. Dans cette partie le niveau piézométrique à diminuer au dessous de la valeur du niveau initiale pour atteint une valeur minimale puis il augmente et elle dépasse le niveau initial jusqu'à qu'il atteint une valeur maximale puis il chute pour retourner au niveau initial.

Donc dans ce cas on peut diviser la nappe en deux partie:une partie caractérisé par un relèvement de niveau piézométrique et une partie caractérisé par un abaissement de niveau piézométrique.

Conclusion:

Les résultats obtenus par le traitement des exemples d'application laissent tirer les conclusions suivantes:

- ◆ La charge hydraulique augmente avec le temps de recharge.
- ◆ La valeur maximale de la charge hydraulique est atteinte toujours en un point ayant comme abscisse le point qui se situe en zone de répartition du taux de rechargement.
- ◆ L'allure de la surface libre de la nappe est influencée par certains paramètres hydrodynamiques tel que le coefficient d'emmagasinement et le coefficient de perméabilité.
- ◆ le relèvement de niveau piézométrique de la nappe est proportionnel au taux de rechargement de la nappe.
- ◆ L'évolution de la surface piézométrique diffère selon le type de la recharge et le moyen utilisé pour la recharge de la nappe.
- ◆ Les cônes de recharge ont la forme inversée du cône de dépression apparaît lors du pompage.
- ◆ On cas ou on a une recharge et un pompage en parallèle avec un débit de pompage important par rapport au taux de recharge la nappe peut être divisée en deux parties: une partie caractérisée par un relèvement de niveau piézométrique et une partie caractérisée par un abaissement de niveau piézométrique.
- ◆ Le champ des vitesses change avec le changement des lignes de courants et avec le changement de la courbe qui représente la surface libre.

Conclusion générale:

Cette étude a été faite dans le but de développer un programme numérique susceptible de simuler l'écoulement dans la zone non saturée du sol et l'écoulement souterrain au cours de recharge de la nappe.

Dans les paragraphes suivants, nous synthétisons les points d'intérêts général et particulier de ce travail:

- ◆ Une synthèse bibliographique sur les écoulements souterrains qui contient toute les notions fondamentales nécessaire à la compréhension du problème physique traité dans ce travail.
- ◆ Une description détaillée sur le phénomène de recharge des nappes d'eau. Cette description nous a permis d'une part d'enrichir nos connaissances sur un phénomène très important qui fait partie de l'hydrogéologie et d'autre part d'éviter les pièges et remédier aux problèmes les plus courants qui se posent lors de l'utilisation de modèles numériques.
- ◆ La formulation analytique de l'équation de Richards qui représente le modèle d'écoulement en milieu poreux dans la zone « saturée - non saturée » et l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résoudre. L'application de la méthode des éléments finis nous a conduit à un système matriciel non linéaire. Cette non linéarité intervient au niveau de la matrice de perméabilité (rigidité) et la matrice masse. Ce système est résolu par une méthode itérative (la méthode du point fixe).le type d'élément utilisé pour le maillage dans notre étude est un élément isoparamétrique à quatre nœuds.
- ◆ Une mise au point de tous les procédés précédents. dans cette section, nous avons élaboré en premier lieu, un module de génération du maillage automatique. et en deuxième lieu, un module de résolution du système non linéaire .les données géométriques sont préparées à l'aide du premier module qui nous à permis d'éviter l'introduction manuelle de ces données et réduire le temps de l'exécution. le deuxième module utilise ces données préparées pour déterminer par un processus itératif transitoire la position de la surface libre, le champ des vecteurs vitesse dans une nappe libre suite à un événement pluvial ou au cours d'une recharge artificielle.
- ◆ Une application nous a permis d'une part de tester la validation du programme développé et d'autre part de discuter sur les résultats

obtenus afin de tirer quelques conclusions. ces conclusions peuvent être résumées comme suit: la charge hydraulique augmente avec le temps de recharge et elle est proportionnelle au taux de rechargement de la nappe. Elle atteint toujours sa valeur maximale dans l'espace en un point ayant comme abscisse le point qui se situe en zone de répartition du taux de rechargement. néanmoins cette charge hydraulique est influencée par certains facteurs tel que les paramètres hydrodynamiques comme le coefficient d'emménagement et le coefficient de perméabilité et d'autre facteurs comme le type de la recharge (naturelle ou artificielle) et le moyen utilisé pour la recharge de la nappe (bassin d'infiltration, forage d'injection.....etc.). la conclusion qu'on a tiré concernant le champ des vecteurs vitesse c'est que ce dernier change avec le changement des lignes de courants et avec le changement de la courbe qui représente la surface libre de la nappe.

Références bibliographiques

- [1].**AEK ABADA**: l'étude de l'intrusion marine, thèse de MAGISTER, centre universitaire de Khemis Melyana ,2007.
- [2].**CYRIL KAO**: fonctionnement hydraulique des nappes superficielles, thèse de DOCTORAT, ENGREF, janvier 2002.
- [3].**DHATH.G, TOUZOT.G**: une présentation de la méthode des éléments finis. MALOINE ED, deuxième édition ,1984.
- [4].**ERIC GILLI, CHRISTIAN MANGAN ET JAQUES MUDRY**: hydrogéologie:objets, méthodes, applications. 2^e cycle, DUNOD, PARIS, 2006.
- [5].**ERIC GONCALVES**: discrétisation des équations aux dérivées partielles, INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, septembre 2005.
- [6].**F.ZWAHLEN ET P.RENARD**: hydrogéologie générale, université de Neuchâtel,2002.
- [7].**FREDERIC PORTET**: interprétation d'essais de pompage, octobre 2003.
- [8].**G.DE MARSILY**: cours d'hydrogéologie, université de Paris, septembre 2004.
- [9].**GILBERT CASTANY**: hydrogéologie principes et méthodes, 2^e cycle ,DUNOD Paris,1998.
- [10].**GRIFFITHS D.V**: programming the finite element methode .USA,1988.
- [11].**JEAN-JAQUES COLLIN**: les eaux souterraines connaissance et gestion.BRGM.
- [12].**J.F.ARANYOSSY,R.NJITCHOUA ET G.M.ZUPPI**: l'apport des isotopes de l'environnement à l'étude de la recharge et de la dynamique des aquifères.
- [13].**JOHN.C.BRUSH,JR**: asurvey of free boundary value problels in the theory of fluid flow through prous media:Variationnal inequality approach part 1,Advances in water resources,vol3,june 1980.
- [14].**MAXA.SAINTE-PE**: alimentation artificielle des nappes, colloque international sur les eaux souterraines, décembre 1970.
- [15].**MICHEL CARLIER** : hydraulique générale et appliquée EYROLLES.
- [16].**MOHAMED MANSSOUR ECHEBLAK**: hydrogéologie appliquée, université Omar Mokhtar, Lybie.
- [17].**MOHAMED OULD BABA SY**: Recharge et Paléo recharge du système aquifère du Sahara septentrional. Thèse de DOCTORAT en géologie, université de Tunis El-manar, janvier 2005.
- [18].**NELSON ACEVEDO**: méthodes d'étude d'un aquifère à nappe libre, Ecole Polytechnique de Montréal, décembre 1996.
- [19].**OLIVIER BANTON ET LUMONY M.BANGOY**: Hydrogéologie multi science environnementale des eaux souterraines, presse de l'université du Québec/AUPELF, 1999.
- [20]. **SERGE BROUYERE** : étude de modélisation de transport et de piégeage des solutés en milieu souterrain variablement saturé, Thèse de DOCTORAT université de Liège, septembre 2001.
- [21]. **THAIS PARIS ANGUENA** : étude du transport d'eau et de solutés dans un sol a nappe superficielle drainée artificiellement, Thèse de DOCTORAT, Paris 2004.
- [22]. **YASSER HAMD** : contribution à la modélisation numérique du cycle de l'eau, Thèse de PH.D, université Laval, Québec, 2001.

Sitographie

[A]. www.e-sige.ensmp.fr

[B]. www.environnement.wallonie.be/cartosig/cartehydrogeo/concepts.htm