

Higher National School of Hydraulic

The Library

Digital Repository of ENSH



المدرسة الوطنية العليا للري

المكتبة

المستودع الرقمي للمدرسة العليا للري



The title (العنوان):

Etude comparative entre la méthode des caractéristiques et la méthode de différentes finies explicites pour le calcul du coup de bélier..

The paper document Shelf mark (الشفرة) : 1-0008-09

APA Citation (توثيق APA):

OunnadiI, Mourad (2009). Etude comparative entre la méthode des caractéristiques et la méthode de différentes finies explicites pour le calcul du coup de bélier.[Mem Ing, ENSH].

The digital repository of the Higher National School for Hydraulics "Digital Repository of ENSH" is a platform for valuing the scientific production of the school's teachers and researchers.

Digital Repository of ENSH aims to limit scientific production, whether published or unpublished (theses, pedagogical publications, periodical articles, books...) and broadcasting it online.

Digital Repository of ENSH is built on the open software platform and is managed by the Library of the National Higher School for Hydraulics.

المستودع الرقمي للمدرسة الوطنية العليا للري هو منصة خاصة بتقييم الإنتاج العلمي لأساتذة و باحثي المدرسة.

يهدف المستودع الرقمي للمدرسة إلى حصر الإنتاج العلمي سواء كان منشورا أو غير منشور (أطروحات، مطبوعات، مقالات، دوريات، كتب....) و بثه على الخط.

المستودع الرقمي للمدرسة مبني على المنصة المفتوحة و يتم إدارته من طرف مديرة المكتبة للمدرسة العليا للري.

كل الحقوق محفوظة للمدرسة الوطنية العليا للري.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE L'HYDRAULIQUE
« ARBAOUI Abdellah »**

Département des Spécialités

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ETAT EN HYDRAULIQUE**

Spécialité : Conception des Systèmes d'Alimentation en Eau Potable

THEME

**Etude comparative entre la méthode des caractéristiques
et la méthode des différences finies explicites (schéma
de MACCORMACK, LAMBDA, et GABUTTI)
pour le calcul du coup de bélier**

Présenté par :

M^r : OUNNADI Mourad

Promoteur :

M^r : A.HACHEMI

Devant le jury composé de :

Président : M^r T.KHETTAL

Examineurs : M^r M.S BENHAFID

M^{me} M.KAHLERASS

M^{me} D.DJOUDAR

M^r M.RASSOUL

M^r M.FODIL CHERIF

juin 2009

Remerciements

*Mes vifs remerciements à monsieur HACHEMI
ABDELKADER pour avoir accepté de m'encadrer et pour ses
conseils ainsi que sa disponibilité à chaque fois que je sollicite
son aide.*

Mes remerciements également :

- *A tous ceux qui ont contribué à ma formation et
particulièrement les enseignants de l'ENSH.*
- *Aux membres du jury qui me feront l'honneur d'examiner
mon travail.*

O.MOURAD

Dédicace

Je dédie ce travail :

*Avant tout à mes chers parents Secoura et Ammar,
qui m'ont soutenues durant toutes ces années de
formation.*

A tous mes frères surtout RACHID

A toute la famille OUNNADI.

*A la meilleure et la plus chère personne
dans ma vie BERKAL KAHINA, sans oublier sa famille.*

*A tout mes amis spécialement Bozboz et Hmida,
Madjid, Hakim, Hamza, Samir, Cherif, Djosif et bien sur
Hidouche, Zino, Hakim Amrani, Ali, Kamel Pinto, Rachid
Aliouat, Brahim Sebah, Moh Tafat, Karim Lamouri, Nassim,
Alilo et toute ma famille de l'E.N.S.H.*

Et à toute la promotion 2008/2009

de l'hydraulique

O.MOURAD

ملخص :

عرف حساب المطرقة المائية تطورا ملحوظا في السنوات الأخيرة ، فلم يعد المهندس يحسب هذه الظاهرة بنفسه. بالتالي صعوبة المشاكل التي نتلقاها الآن تتطلب دوما استعمال طرق التكامل العددي ، و بالطبع الكثير من الطرق العددية تطورت من اجل إيجاد الحل للمعادلات التي توضح ظاهرة المطرقة المائية. نذكر طريقة الخواص ، طرق الفروق المنتهية، طريقة العناصر المنتهية، الطرق الطيفية و طريقة العناصر المحيطة. في هذه المذكرة قمنا بالمقارنة من وجهة نظر الدقة بين طريقة الخواص والبيانات الموضحة للفروق المنتهية(بيان ماكورماك، جابوتى و لامبدا) لغرض حل معادلات المطرقة المائية.

Résumé :

Le calcul du coup de bélier à beaucoup évolué dans les dernières années, aujourd'hui, l'ingénieur concepteur n'effectue habituellement lui-même ce type d'analyse. En effet la complicité des problèmes que l'on trouve maintenant exige souvent l'utilisation des méthodes d'intégration numériques. Evidemment, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour solutionner les équations qui régissent le phénomène du coup bélier. On signalera, la méthode des caractéristiques, les méthodes aux différences finies, la méthode des éléments finies, les méthodes spectrales, la méthode des éléments frontières, etc...

Dans cette thèse nous avons fait une comparaison du point de vu précision entre la méthode des caractéristiques et les schémas explicites des différences finies (schéma de MACCORMACK, GABUTTI et LAMBDA) pour la résolution des équations du coup de bélier.

Abstract:

The calculation of the water hammer evolved much in the last years, today; the engineer originator does not carry out usually itself this type of analysis. Indeed the complicity of the problems which one finds now often requires the use of the numerical methods of integration. Obviously, several numerical methods were developed to solve the equations which govern the phenomenon of the water hammer. One will announce the method of the characteristics, the finite difference methods, the finite element method, the methods spectral, the method of the elements borders, etc...

SOMMAIRE

Introduction général.....	1
CHAPITRE(I) : GENERALITES	
Introduction.....	2
I.1-Aperçu bibliographique.....	2
I.2- Types d'écoulements.....	3
I.2.3-Ecoulement transitoire.....	3
I.2.2-Ecoulement uniforme.....	3
I.2.1-Ecoulement permanent.....	3
I.3-Adductions gravitaires	4
I.3.1-Ecoulement à surface libre.....	4
I.3.2-Ecoulement en charge.....	4
I.3.3-Transition de surface libre à écoulement en charge.....	4
I.3.4-Profil d'une adduction.....	5
I.3.5-La ligne piézométrique.....	6
I.3.6-Le bon fonctionnement d'une adduction.....	7
I.4-Types d'ondes.....	8
I.4.1-Ondes linéaires.....	8
I.4.2-Ondes non linéaires.....	8
I.5-Equations de pertes de charge.....	8
I.5.1-Pertes de charges linéaires.....	8
I.5.2-Pertes de charges singulières.....	9
I.6-Pressions dans le domaine hydraulique.....	10
I.6.1-La pression dynamique.....	10
I.6.2-La pression de service.....	10
I.6.3-la pression statique.....	11
I.6.4-La pression maximale de service(PMS).....	11
I.6.5-La pression maximale de fonctionnement(PMF).....	11
I.7-Pression dans le domaine du matériel hydraulique.....	11
I.7.1-La pression nominale(PN).....	11
I.7.2-La pression d'épreuve à l'usine (PEU).....	11
I.7.3-La pression maximale admissible(PMA).....	12
I.8- Comportement mécanique des conduites.....	12

I.8.1-Comportement élastique.....	12
I.8.2-Comportement visqueux.....	13
I.8.3-Comportement plastique.....	14
Conclusion.....	14

CHAPITRE(II) : PHENOMENE DU COUP DE BELIER

Définition.....	15
II.1-Causes principales du coup de bélier.....	15
II.2-Les risques dus aux coups de bélier.....	15
II.3-Description des phénomènes physiques en jeu.....	16
II.3.1- Etat d'équilibre d'un système hydraulique.....	16
II.3.2-Onde élastique et oscillation en masse.....	16
II.3.3-Perturbation de l'équilibre, effet sur les pressions.....	16
II.3.4-Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une tuyauterie.....	17
a)-Cas d'arrêt brusque de la pompe.....	17
b)-Cas de l'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite.....	18
II.4-Valeur numérique du coup de bélier.....	20
II.4.1-Cas de manœuvre rapide, formule de JOUKOWSKY.....	20
II.4.2 Cas de la fermeture lente d'une vanne de sectionnement.....	20
Conclusion.....	21

CHAPITRE(III) : MODELE MATHEMATIQUE

Introduction.....	22
III.1-Description mathématique.....	22
III.1.1-Hypothèse de base.....	22
III.2-Détermination des équations de SAINT VENANT.....	23
III.2.1-Equation de continuité.....	23
III.2.2-Equation dynamique.....	27
III.2.3-Les équations aux caractéristiques.....	30
III.2.4-Les équations d'ALLIEVI.....	32
III.2.5-Interprétation.....	35
III.3-La célérité d'onde « a ».....	37
III.3.1-conduite libres (non enterrée).....	37
III.3.2-Conduite enterrée.....	38

Conclusion.....	39
-----------------	----

CHAPITRE(IV) : METHODES D'ANALYSE DU COUP DE BELIER

Introduction.....	40
IV.1-Méthodes analytique.....	40
IV.2-Méthodes graphique.....	41
IV.3-Méthode des caractéristiques.....	41
IV.4-Méthode des différences finies.....	43
IV.4.1-Discretisation des opérateurs différentiels.....	43
IV.4.2-Schémas implicites.....	45
IV.4.3-Schémas explicites.....	45
a)-Schéma de Maccormack.....	45
b)-Schéma de LAMBDA.....	48
c)-Schéma de GABUTTI.....	50
IV.4.4-Stabilité.....	51
IV.4.5-Conditions aux limites.....	51
a)-Avantages.....	51
b)-Conditions aux limites au niveau d'un réservoir.....	52
c)-Conditions aux limites au niveau d'une vanne.....	52
d)-Conditions aux limites pour les Schémas explicites.....	52
Conclusion.....	53

CHAPITRE(V) : SYSTEMES DE PROTECTION

Introduction.....	54
V.1-Volant d'inertie.....	54
V.2-Soupape de décharge.....	56
V.3-By-pass.....	56
V.4-Cheminée d'équilibre.....	57
V.4.1-Types de cheminée.....	57
a)-Cheminée à l'étranglement.....	57
b)-Cheminée à épanouissement.....	58
c)-Cheminée différentielle.....	59

V.5-Réservoir d'air.....	59
V.5.1-Description technologique.....	59
a)-Les ballons à membrane ou à vessie.....	59
b)-Les ballons sans membrane.....	60
V.5.2- dimensionnement.....	61
V.5.3-Oscillation en masse dans le tronçon cheminée-réservoir.....	61
V.6-Vanne à fermeture lente.....	63
Conclusion.....	64

CHAPITRE(VI) : APPLICATIONS NUMERIQUES ET INTERPRITATION DES RESULTATS

Introduction.....	65
VI.1-Traitement d'un problème à l'aide de l'ordinateur	65
VI.2-Structure d'un programme.....	66
VI.3-Organigramme.....	66
VI.4-Validation du programme.....	68
VI.5-Interprétation des résultats.....	73
VI.5.1-Influence du nombre de courant (cn).....	73
VI.5.2-Influence des pertes de charges sur le coup de bélier.....	74
VI.5.3-Influence des matériaux sur le coup de bélier.....	76
VI.5.4-Influence de l'épaisseur de la conduite sur le coup de bélier.....	79
VI.5.5-Influence du sol sur le coup de bélier.....	82
Conclusion.....	84
Conclusion général.....	85

Liste des figures

Figure (I-1) : Fonctionnement d'une conduite.....	4
Figure (I-2) : profil et lignes piézométriques.....	6
Figure (I-3) : Modifications de la ligne piézométrique.....	7
Figure (I-4) : Détermination de la PMS.....	11
Figure (I-5): Elasticité linéaire, cas du ressort.....	13
Figure (I-6) : Viscosité linéaire, cas de l'amortisseur à huile.....	13
Figure (I-7): Plasticité parfaite, cas du patin à frottement sec.....	14
Figure II.1: Quatre étapes d'un cycle de variation de pression dans une conduite de refoulement.....	19
Figure II.2 : Réservoir à cote constante.....	21
Figure III.1 : forces et contraintes radiales dans un tuyau circulaire.....	23
Figure (III-2) : déplacement d'un élément liquide.....	25
Figure (III-3) : Théorème des quantités de mouvement.....	27
Figure (III-4) : forces exercées sur une tranche liquide.....	28
Figure (III-5) : Circulation des ondes dans une conduite.....	35
Figure (III-6) : Célérité de l'onde «a » en fonction de « D/e », pour différents matériaux.....	37
Figure (III-7) : forces appliquées sur une conduite enterrée.....	38
Figure (IV-1) : schéma utilisé pour la méthode des caractéristiques.....	42
Figure (IV-2) : schéma de discrétisation du domaine.....	46
Figure (IV-3) : discrétisation du domaine pour les schémas explicites.....	52
Figure (V-1) : Coup type du volant d'inertie.....	55
Figure (V-2) : Schéma d'une dérivation.....	57
Figure (V-3) : cheminée à étranglement.....	58
Figure (V-4) : cheminée à épanouissement.....	58
Figure (V-5) : cheminée différentielle.....	59
Figure (V- 6) : schémas de principe des ballons anti-bélier.....	60

Figure (V-7) : organes dissymétriques à la base des ballons anti-bélier.....	61
Figure (V-8) : schéma d'un système simple avec une cheminée d'équilibre.....	62
Figure (VI.1) : organigramme du programme.....	67
Figure (VI.2) : réservoir à niveau constant.....	68
Figure (VI.3) : Méthode des caractéristiques, comparaison entre solution exacte et numérique.....	69
Figure (VI.4) : Méthode de Maccormack, comparaison entre solution exacte et numérique.....	70
Figure (VI.5) : Méthode de LAMBDA, comparaison entre solution exacte et numérique.....	71
Figure (VI.6) : Méthode de GABUTTI, comparaison entre solution exacte et numérique.....	72
Figure(VI.7) : Influence de pertes de charge sur le coup de bélier.....	75
Figure (VI.8) : Influence des matériaux sur le coup de bélier.....	77
Figure (VI.9) : Influence du matériau sur le coup de bélier.....	78
Figure (VI.10) : Influence de l'épaisseur de la conduite sur le coup de bélier.....	80
Figure(VI.11) : Influence de l'épaisseur de la conduite sur le coup de bélier.....	81
Figure (VI.12) : Influence du sol sur le coup de bélier.....	83

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (III-1) : Valeurs du coefficient « k » dans la formule d'Allievi, pour différents matériaux.....	36
Tableau (VI-1) : récapitulatif des résultats	73
Tableau (VI.2) : Valeurs du module d'élasticité et la célérité d'onde de chaque matériau.....	76
Tableau(VI.3) : Valeurs de l'épaisseur et de la célérité d'onde.....	79
Tableau (VI.4) : célérité d'onde.....	82

Introduction générale

On définit habituellement les coups de bélier dans une conduite en charge comme étant les variations de pression résultant d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement. ces variations de pression peuvent causer d'énormes dommages matériels et ont déjà été à l'origine de plusieurs pertes de vie. des installations dans lesquelles des coups de bélier sont susceptibles de se produire se retrouvent dans une foule de champs d'activités : aqueduc, station de pompage, centrales hydro-électrique, systèmes d'irrigation, etc...

Une étude du coup de bélier vise donc à déterminer si la pression dans l'ensemble d'un système est à l'intérieur des limites prescrites suite à une perturbation de l'écoulement.

Le calcul du coup de bélier a beaucoup évolué dans les dernières années ; aujourd'hui, l'ingénieur concepteur n'effectue habituellement plus lui-même ce type d'analyse. En effet la complexité des problèmes que l'on traite maintenant exige souvent l'utilisation des programmes sophistiqués. Toutefois, il demeure essentiel que le concepteur d'un réseau maîtrise bien la physique des écoulements en régime non permanent.

Bien que la méthode des caractéristiques soit la plus usuelle calculer l'écoulement transitoire dans les conduites, dans ce travail on essaiera d'appliquer d'autres méthodes à savoir les schémas de différences finies explicites.

Dans ce travail, nous allons présenter le phénomène transitoire, en établissant les équations qui le régissent. Puis, en se penchant sur la présentation des différentes méthodes de résolutions des équations de SAINT VENANT dont on s'intéresse à l'application de la méthode de différences finies explicite (schéma de MACCORMACK, schéma de LAMBDA et schéma de GABUTTI), ainsi que la méthode des caractéristiques pour simuler le phénomène du coup de bélier produit dans une conduite gravitaire après la fermeture brusque d'une vanne.

Par la suite, on décrira une panoplie d'équipements anti-bélier avec leurs caractéristiques propres et leurs contextes d'utilisation.

Finalement notre étude sera achevée par des applications numériques des deux méthodes (méthode des caractéristiques et méthode de différences finie explicite) où des programmes de calculs seront élaborés pour suivre l'évolution des paramètres caractérisant l'écoulement lors du régime transitoire dans le temps et dans l'espace.

Introduction

Dans ce chapitre nous allons donner un aperçu bibliographique sur le régime transitoire et définir quelques types d'écoulements que l'on rencontrera au cours de notre travail et aussi un aperçu sur les adductions gravitaires, nous allons ensuite présenter et définir les différents types d'ondes. Et on terminera par un éclaircissement sur les pertes de charge ainsi que la terminologie du terme pression, et le comportement mécanique des conduites.

I.1 Aperçu bibliographique

L'hydraulique est une science aussi ancienne que la civilisation humaine, puisqu'elle commande toutes les utilisations de l'eau.

L'étude des écoulements transitoires a commencé par l'examen des propagations des ondes sonores dans l'air, la propagation des ondes dans l'eau peu profonde et l'écoulement du sang dans les artères.

NEWTON: a étudié la propagation des ondes dans les canaux, il a obtenu expérimentalement la vitesse du son dans l'air comme égale à 348m/s. [1]

MONGE(1789) : a développé une méthode graphique pour intégrer des équations hyperboliques aux dérivées partielles. Cette méthode qu'on nomme la méthode des caractéristiques a ensuite été adaptée et retravaillée de façon à permettre son implantation sur des calculateurs numérique. [2]

CHAUDRY(1987) : présente une description complète de cette méthode de calcul. [1]

THOMAS YOUNG (1808, médecin) : a élaboré expérimentalement sa théorie de la propagation des ondes de pression dues aux pulsations cardiaques, à l'occasion de ces études, il introduisait le célèbre ' module d'Young '. [3]

MANABREA(1858) : fut le premier à s'intéresser à l'étude du mouvement varié dans les canalisations.

La solution définitive du problème a été donnée par l'Italien LORENZO ALLIEVI dans un mémoire magistral publié en 1901 dans les annales de la société des ingénieurs et architectes Italiens. [3]

Plusieurs auteurs ont repris les résultats fondamentaux obtenus par ALLIEVI et ont étudié l'application aux problèmes particuliers posés par les conditions de refoulement usuelles de la pratique courante (conduites forcées, conduites de refoulement, etc ...). Parmi les savants et ingénieurs qui ont apporté leur contribution à l'étude de ces phénomènes complexes, citons M.M Boussinesq, Korteweg, Joukowski, Rateau, Jouguet, Camechel, Gariel, Louis Bergeron, Escande, Dubin, Eydoux, etc.... [2]

De 1928 à 1933 le français Louis Bergeron, simultanément semble t'il avec le Suisse Othmar Schnyder, à mis au point une méthode graphique pour l'étude du coup de bélier dans les systèmes en charge quelconques, le principe de la méthode avait été donné par les autrichiens Kreitner et Lowy(1928). [2]

Deux autres savants JAEGER en 1956, et ANGUS en (1935-1938) ont contribué à l'amélioration de cette méthode graphique. [3]

L'événement du calcul numérique vers la moitié de ce siècle a déroulé dans des perspectives nouvelles. Une procédure numérique s'appuyant sur la méthode des caractéristiques à été élaborée par la contribution de PARMARIAN (1967), de WYLIE et STREETER (1967). Cette procédure n'a cessé d'être élargie et consolidée pour rendre compte des divers phénomènes qui accompagnent le passage des ondes de coup de bélier dans les tuyauteries. [3]

Le développement de l'outil informatique et l'accroissement constant de sa puissance ont permis de traiter des problèmes beaucoup plus complexes et d'améliorer la précision de calcul. On enregistre dans ceci : HUSSEIN KHAN [3] qui a utilisé la méthode des caractéristiques pour comparer entre le phénomène d'oscillation en masse et coup de bélier d'onde dans une cheminée d'équilibre.

I.2 Types d'écoulements

I.2.1 Ecoulement permanent

Un écoulement est dit permanent lorsque toutes les caractéristiques hydrauliques et les propriétés des fluides restent invariables dans le temps, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

I.2.2 Ecoulement uniforme

Un écoulement est dit uniforme lorsqu'à un instant donné, la vitesse du fluide a une même direction et même intensité en tout point de ce fluide.

I.2.3 Ecoulement transitoire

Un écoulement est dit transitoire lorsque les paramètres hydrauliques à savoir (la vitesse, la pression) et les propriétés du fluide sont fonction du temps et de l'espace :

$$u=u(x,t) ; p=p(x,t) ; \rho=\rho(x,t)$$

On peut rencontrer ce phénomène transitoire soit dans les écoulements en charge, soit dans les écoulements à surface libre. Parmi ces phénomènes transitoires, le phénomène du coup de bélier que nous analyserons ici.

I.3 Adductions gravitaires

Dans cette partie, on distinguera l'écoulement à surface libre de l'écoulement en charge d'une adduction gravitaire. [4]

I.3.1 Ecoulement à surface libre

L'écoulement à surface libre sur un tronçon d'adduction est un cas fréquent, la conduite fonctionne comme un canal ouvert, l'eau n'atteint pas la partie supérieure des tuyaux (à l'intérieur). Le débit est fonction de la pente au point donné de la hauteur d'eau dans la tuyauterie et des frictions sur les parois.

I.3.2 Ecoulement en charge

L'écoulement en charge correspond au fonctionnement d'une adduction dont les tuyaux sont pleins et où les tronçons en amont et en aval interviennent sur l'écoulement. Le débit est alors fonction de la pente générale et des frictions sur la tuyauterie. Le débit est en général plus grand dans une adduction en charge, c'est-à-dire dont la tuyauterie est pleine et où l'eau qui s'y écoule est poussée par la pression exercée par l'eau en amont.

On constate alors que :

1. Une adduction qui fonctionne à surface libre, dont les tuyaux ne fonctionnent pas en pression, ne nécessite pas de tuyaux de forte résistance.
2. Au niveau économique, on se rend compte que travailler à surface libre coûte cher : une adduction non remplie est une adduction surdimensionnée, puisqu'avec un diamètre inférieur on peut transporter la même quantité d'eau.

I.3.3 Transition d'écoulement à surface libre à écoulement en charge

Pour qu'une adduction fonctionne en permanence à surface libre, le bon sens permet de se rendre compte que le tracé de l'adduction est très contraignant, car il s'agit de réaliser un canal où en aucun cas l'eau ne remonte et donc sans grands changements de pente. Cette condition n'est que très rarement remplie dans le cas d'adduction d'eau potable, il y a donc une transition vers le fonctionnement en charge. On s'en rend compte lorsqu'un tuyau est à moitié rempli et que le relief remonte ou que l'on bouche la tuyauterie à son extrémité inférieure.

Il faut savoir que la phase intermédiaire est problématique, l'augmentation de la capacité de débit de l'adduction n'étant pas régulière:

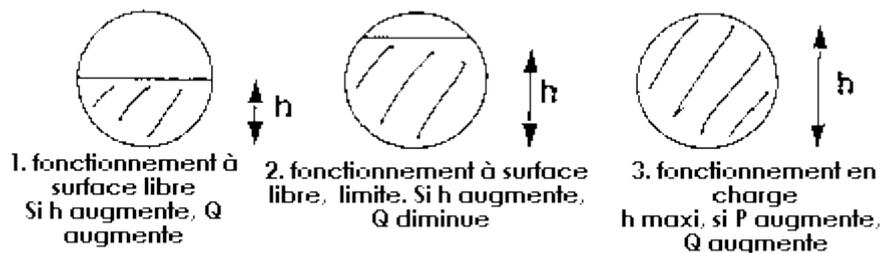


Figure I.1 : Fonctionnement d'une conduite.

1. La tuyauterie est en place, un faible débit l'alimente, il n'y a pas de remontée sur le trajet, et l'extrémité est ouverte. Le fonctionnement est à surface libre.

2. En augmentant le débit, le niveau d'eau dans l'adduction augmente, les surfaces de friction de l'eau contre les parois augmentent elles aussi.

3. A partir d'une certaine limite, en continuant à augmenter ce débit, la hauteur d'eau dans la tuyauterie augmente moins vite que les frictions sur les parois de la tuyauterie. Le débit qui peut transiter dans l'adduction diminue. Les frictions limitent le débit, il se produit des à-coups en amont et en aval. La pression dans la tuyauterie est restée nulle, le sommet de la tuyauterie n'a pas été atteint, sauf par moment.

4. En augmentant encore le débit, la paroi supérieure de la tuyauterie est atteinte, la pression augmente dans la tuyauterie et permet d'augmenter à nouveau le débit transité dans l'adduction.

5. A un moment donné, le régime se stabilise, l'adduction gravitaire fonctionne en charge, à sa capacité qui est fonction du diamètre des tuyaux, de leur rugosité, de la longueur du parcours et de la différence de dénivelé entre le point de départ et le point d'arrivée, et éventuellement, des obstacles rencontrés : vannes, raccords...

Donc si on choisit des gros diamètres de tuyauterie peuvent entraîner un fonctionnement à surface libre dans certains tronçons, en charge dans d'autres avec des à-coups parfois violents. D'où la nécessité de savoir dimensionner au mieux l'adduction et de réguler l'écoulement si nécessaire.

I.3.4 Profil d'une adduction

Le profil de l'adduction est une donnée indispensable pour visualiser le fonctionnement de l'adduction. Il peut être établi à partir d'un relevé de terrain (niveau, clinomètre, carte et boussole). On y reporte en x les distances, en y les altitudes. Il est indispensable de choisir une échelle différente sur chacun des axes de façon à bien visualiser les reliefs le long du tracé.

I.3.5 La ligne piézométrique

La ligne piézométrique permet de visualiser la pression exercée par l'eau en chaque point du tracé. Elle correspond au niveau qu'atteindrait l'eau dans un tuyau vertical connecté sur l'adduction.

- Pour une adduction gravitaire de section uniforme et alimentée à son maximum :
- Lorsque l'adduction débouche à gueule bée, ou dans un réservoir, la ligne piézométrique est une droite qui relie les points extrêmes de l'adduction. L'eau est à la pression atmosphérique au départ et en fin d'un parcours sans obstacle. La pression est maximum au point du profil le plus éloigné de la ligne piézométrique.
 - Lorsque l'adduction est fermée à son extrémité en aval, la ligne piézométrique est horizontale. La plus forte pression s'exerce au point de cote le plus bas.
 - Lorsque l'adduction est à demi-fermée par une vanne en fin de parcours, suivant le débit transitant dans l'adduction, la ligne piézométrique prend une valeur située entre les deux extrêmes.
- C'est ce qui est représenté sur la figure ci-dessous.

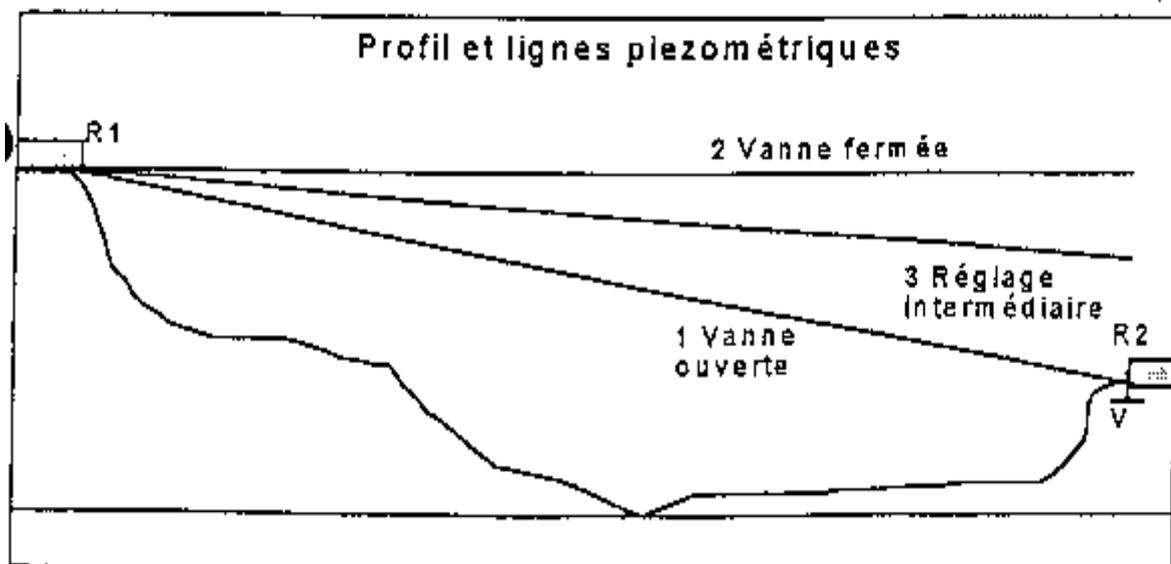


Figure I.2 : Profil et lignes piézométriques.

I.3.6 Le bon fonctionnement d'une adduction

La figure ci-dessous permet de mieux comprendre et de visualiser la modification de la ligne piézométrique dans le cas d'une adduction gravitaire.

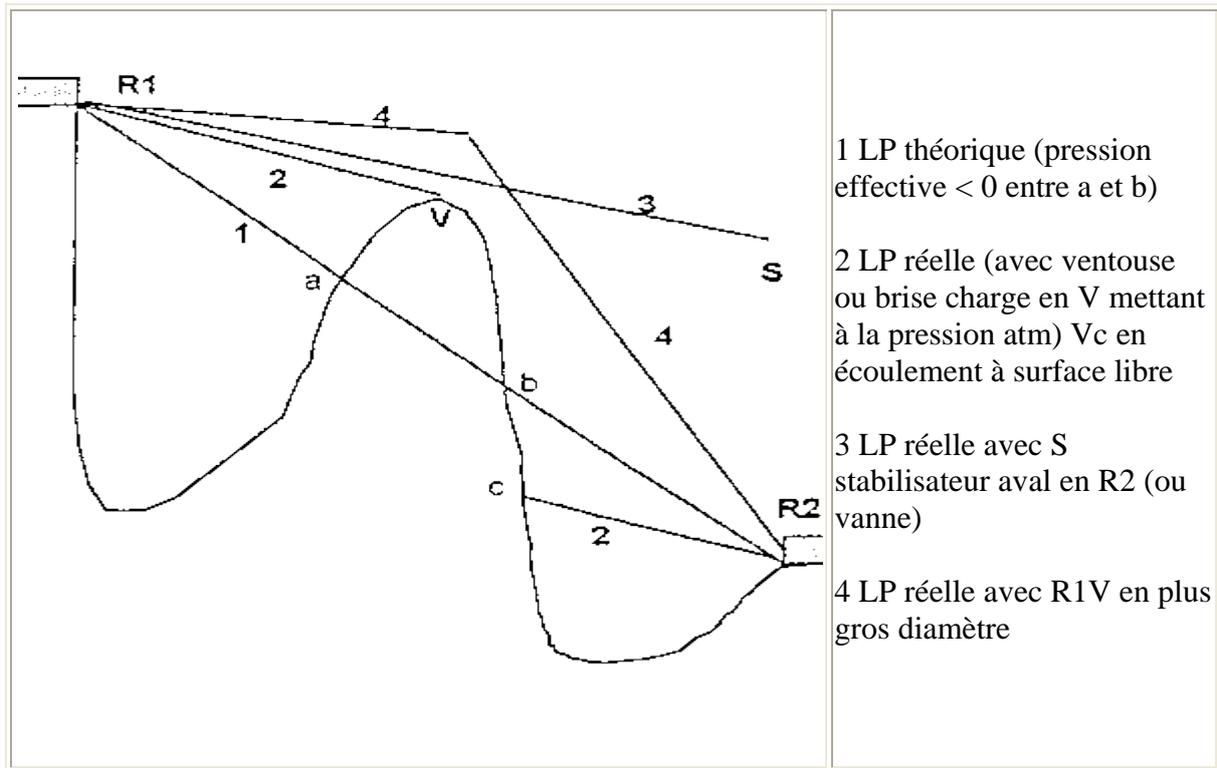


Figure I.3 : Modifications de la ligne piézométrique.

Le profil de l'adduction est matérialisé par la ligne courbe qui relie les réservoirs R1 et R2.

En 1, la ligne piézométrique théorique relie les deux réservoirs R1 et R2. L'adduction est alimentée au maximum de sa capacité, débouchant en R2 sans obstacle. Le tronçon ab fonctionne en dépression, il y a risque de rupture (par dépression) et de contamination de l'eau par aspiration de polluant (tronçon ab en dépression).

En 2, l'adduction est équipée d'une ventouse ou d'une brise charge en V. Le tronçon ab n'est plus en dépression par contre le tronçon Vc est en écoulement à surface libre.

En 3, un stabilisateur aval ou une vanne, limite l'écoulement et fait augmenter la pression en S en provoquant une perte de charge ponctuelle. La ligne piézométrique se décale vers le haut et le tronçon ab n'est plus en dépression. L'ensemble de la conduite fonctionne en charge. La ventouse reste nécessaire pour purger l'air qui pourrait s'accumuler dans le point haut.

En 4, le tronçon R1 V est en diamètre supérieur à celui des hypothèses précédentes, la ligne piézométrique passe au dessus de V. ab n'est plus en dépression et la totalité de l'adduction fonctionne en charge.

I.4 Types d'ondes

I.4.1 Ondes linéaires

Du point de vue physique les ondes linéaires sont celles qui se propagent dans le fluide sans modifier les propriétés physiques locales (compressibilité, viscosité, masse spécifique, conductivité...).

Voici quelques exemples de ce type d'ondes :

-les ondes du son.

-les ondes de lumière.

-les ondes électromagnétiques.

I.4.2 Ondes non linéaires

Les ondes non linéaires sont celles qui se propagent dans le fluide et provoquent des variations dans les propriétés de ce dernier.

La célérité de propagation de ces ondes est indépendante de l'amplitude de celle-ci .Donc elle ne serait plus définie par la seule connaissance du régime permanent initial.

Les ondes de choc positives sont un exemple d'ondes non linéaire .Les discontinuités que constituent les manœuvres rapides sont encore un exemple de ce type d'ondes.

I.5 Equations de pertes de charge

Les équations de pertes de charge en régime transitoire sont les mêmes qu'en régime permanent, cette hypothèse est due à la complexité du phénomène transitoire .Parmi les nombreuses formules existant pour l'évaluation des pertes de charge, nous proposons d'utiliser la formule classique de DARCY qui est plus simple.

I.5.1 Pertes de charges linéaires

Les pertes de charge linéaires ont lieu au cours du mouvement du fluide dans la conduite, elles dépendent de la longueur et du diamètre de la conduite. La formule est :

$$\Delta P_l = \frac{\lambda * L}{D} * \frac{U^2}{2 * g} \quad (I - 1)$$

Ou ΔP_l : pertes de charge linéaires (m).

λ : coefficient de pertes de charge linéaire ou de DARCY.

D : diamètre de la conduite (m).

L : longueur de la conduite (m).

G : la pesanteur (m/s^2).

U : vitesse d'écoulement (m/s).

On constate que les pertes de charge linéaire dépendent des éléments suivants :

- La perte de charge est logiquement directement proportionnelle à la longueur de la canalisation : elle augmente quand la longueur de canalisation augmente.
- Quand le diamètre diminue, la perte de charge augmente considérablement. Le liquide a plus de difficultés à s'écouler donc les frottements augmentent pour un débit identique.
- Plus le débit augmente (vitesse plus élevée), plus les forces de frottements augmentent pour un diamètre identique.

I.5.2 Pertes de charges singulières

Ces pertes se produisent lorsqu'on change les caractéristiques géométriques de la conduite, elle s'exprime comme suit :

$$\Delta P_s = K * \frac{U^2}{2g} \quad (I - 2)$$

K : coefficient de pertes de charges singulières.

ΔP_s : Pertes de charges singulières.

Il est bien connu que les lois de pertes de charge sont complexes et varient avec le type d'écoulement. Si la formule de DARCY est pratiquement valable pour l'écoulement nettement turbulent (car la valeur du coefficient λ pour ce type d'écoulement est presque constante), elle n'est plus rigoureuse pour l'écoulement turbulent (lisse) qui est le cas pour la plus part des aménagements, et plus du tout applicable pour l'écoulement laminaire.

Il faut savoir aussi que les pertes de charge varient en fonction du carré de la vitesse de l'écoulement de l'eau. Les formules et abaques qui permettent de connaître la relation débit/pertes de charge pour un type de tuyau, ne sont valides que pour des vitesses de l'eau inférieure à 2 m/s (on est en régime laminaire).

Les abaques ou formules ne seront donc utilisés que dans ces limites. [2]

Remarque

Les formules donnant le coefficient de pertes de charges (λ) sont données ci-après :

$$\text{Lang (1896) : } \lambda = 8 * g * \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{\mathcal{R} * v}} \right) \quad (\text{I-3})$$

$$\text{Lees (1914) : } \lambda = 0,00714 + \frac{0,61}{\mathcal{R}^{0,35}} \quad (\text{I-4})$$

$$\text{Schiller et Hermann : } \lambda = 0,0054 + \frac{0,396}{\mathcal{R}^{0,3}} \quad (\text{I-5})$$

$$\text{Nikuradse (1932) : } \lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{\mathcal{R}^{0,237}} \quad (\text{I-6})$$

$$\text{R.Lazard (1935) : } \lambda = 0,00372 + \frac{0,247}{\mathcal{R}^{0,25}} \quad (\text{I-7})$$

Plus récemment (1954-1958) Filonenko et Altschoul (U.R.S.S) ont proposé la formule suivante, explicite en λ :

$$\lambda = (1,8 * \text{Log} \mathcal{R} - 1,64)^{-2} \quad (\text{I-8})$$

Avec :

\mathcal{R} : est le nombre de Reynolds, $\mathcal{R} = \frac{U * D}{v}$.

U : est la vitesse d'écoulement.

D : diamètre de la conduite.

v: viscosité cinématique.

α et β : sont des constantes.

I.6 Pressions dans le domaine hydraulique

I.6.1 La pression dynamique

C'est la pression supportée effectivement par une canalisation bien déterminée pour un régime donné de fonctionnement. Elle est souvent quantifiée de façon relative en enlevant la pression atmosphérique de la pression absolue correspondante. Si le régime hydraulique est variable, la pression dynamique varie au cours du temps.

I.6.2 La pression de service

C'est la pression dynamique supportée par une conduite lorsque l'installation est à un seul régime de fonctionnement.

I.6.3 la pression statique

C'est la pression supportée par la conduite à débit nul. Suivant les installations, elle est supérieure ou inférieure à la pression dynamique. Elle est très difficile à déterminer dans le cas d'une injection directe dans le réseau.

I.6.4 La pression maximale de service(PMS)

C'est la pression dynamique la plus élevée en régime de fonctionnement permanent (sans coup de bélier).

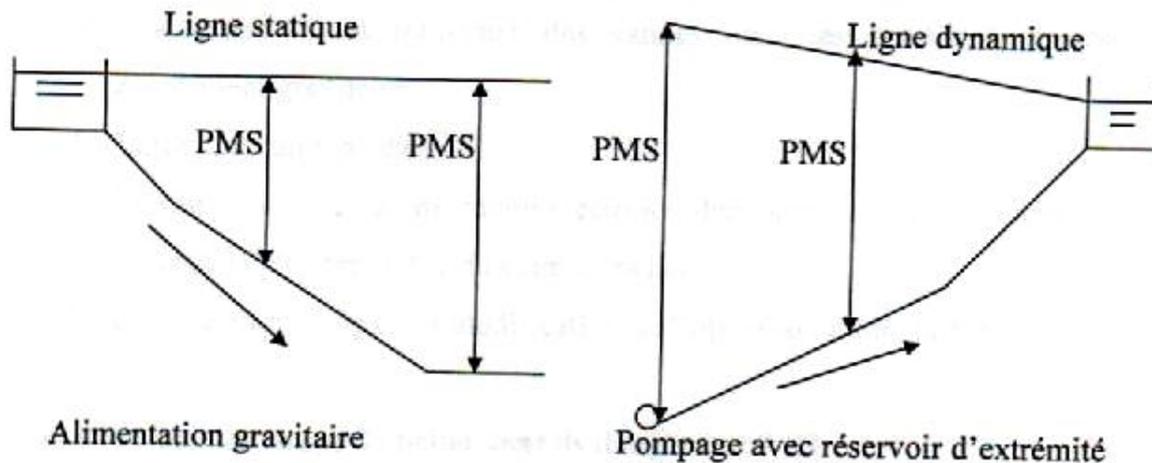


Figure I.4 : Détermination de la PMS

I.6.5 La pression maximale de fonctionnement (PMF)

C'est une pression qui correspond à la (PMS) augmentée du coup de bélier : il s'agit la plupart du temps d'une marge de pression que le concepteur se donne pour dimensionner la protection anti-bélier de l'installation.

I.7 Pression dans le domaine du matériel hydraulique

I.7.1 La pression nominale(PN)

C'est la pression qui sert de base à la détermination des dimensions d'une conduite à une température donnée (par ordre de sécurité $PN > PMF$).

I.7.2 La pression d'épreuve à l'usine (PEU)

Pour l'amiante-ciment, on l'appelle classe. Les PVC ne subissent pas en général les essais à l'usine .on parle de pression de rupture.

I.7.3 La pression maximale admissible(PMA)

Elle correspond à la pression pour laquelle la conduite est vendue. Certains praticiens l'appellent PET (pression d'essai en tranchée).

On a :

PET=1,8 PMS, pour le cas de refoulement.

PET=1,5 PMS, pour le cas gravitaire.

I.8 Comportement mécanique des conduites

I.8.1 Comportement élastique

On entend par comportement ou déformation élastique d'un corps, le retour de ce dernier à son état initial après la disparition de la contrainte qui avait provoqué sa déformation. Lorsque l'élasticité est linéaire elle est représentée par la loi de Hooke :

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

Avec : σ : Contrainte appliquée

ε : déformation produite.

E : module d'élasticité du matériau.

Rappelons qu'un milieu liquide peut avoir une élasticité volumique, qui est définie par le module d'élasticité « K », cette élasticité peut également être définie par le module de compressibilité « 1/K », qui n'est autre que l'inverse du module d'élasticité. [3]

Dans le cas d'un gaz parfait on a :

- Pour une transformation isotherme : $K=P$, où « P » est la pression absolue.
- Pour une transformation adiabatique : $K=\gamma \cdot P$, où $\gamma=C_p/C_v$, ce qui représente le rapport entre les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants du gaz.

Notons aussi que le ressort est un cas typique de comportement élastique (figure n° I-5)

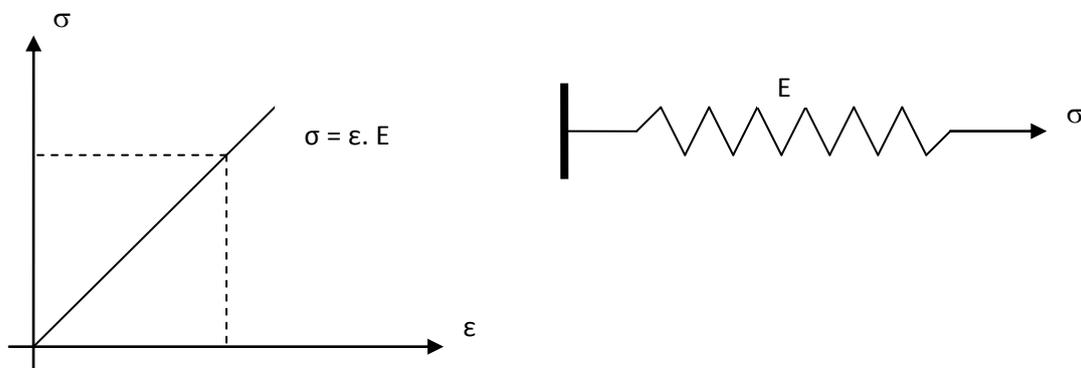


Figure I.5: Elasticité linéaire, cas du ressort

I.8.2 Comportement visqueux

Dans un comportement visqueux la contrainte appliquée dépend de la vitesse de déformation. Quand la viscosité « η » est linéaire, elle est dite « Newtonienne », et la contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

On retrouve un comportement visqueux type dans le cas de l'amortisseur à huile (figure n°I-6). La force nécessaire pour le déformer est fonction de la vitesse de déplacement du piston. [3]

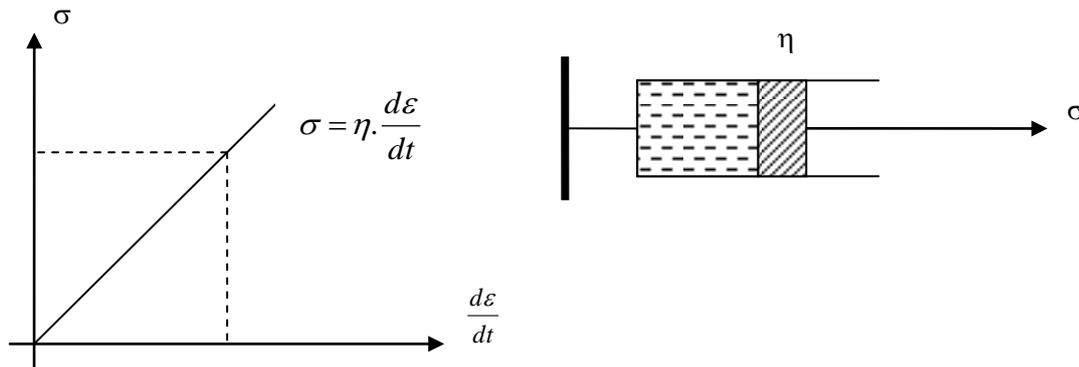


Figure I.6 : Viscosité linéaire, cas de l'amortisseur à huile.

I.8.3 Comportement plastique

Ce type de comportement est caractérisé par un seuil de contrainte à partir duquel les déformations d'un corps deviennent totalement ou partiellement permanentes. Ce genre de déformation est dit déformation plastique. Dans le cas d'un solide élastique le seuil « σ_P » correspond à la contrainte appelée limite d'élasticité. [3]

Une plasticité parfaite est représentée par un seuil de contrainte « σ_P » constant dans le plan (σ , ε) (figure I.7). On peut donner comme exemple de comportement plastique le patin à frottement sec, ce dernier résiste contre le déplacement jusqu'à une certaine valeur de la force appliquée, mais une fois qu'il commence à se déplacer sa résistance reste constante.

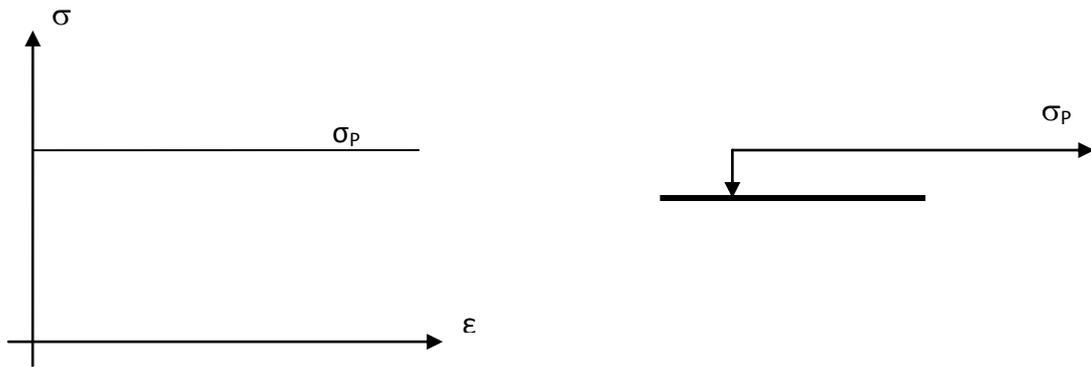


Figure I.7 : Plasticité parfaite, cas du patin à frottement sec.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques généralités sur les différents paramètres entrant en jeu au cours de notre travail.

Définition

On appelle coup de bélier dans une conduite en charge comme étant des variations de pression et de débit, non seulement dans le temps, mais tout le long de la conduite, résultant d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement.

II.1 Causes principales du coup de bélier

C'est un phénomène oscillatoire transitoire qui se manifeste dans les conduites en charge, soit gravitaire soit en refoulement, et dont les causes les plus fréquentes sont les suivantes : [2], [4], [5]

1-la mise en marche ou l'arrêt des pompes dans les conduites en charge par refoulement.

2-modification de la vitesse d'une pompe.

3-l'ouverture ou la fermeture des vannes dans les conduites en charge à écoulement gravitaire.

4-variation d'un plan d'eau.

5-la disparition de l'alimentation électrique dans une station de pompage qui est la cause la plus réponde du coup de bélier.

6-La mise en marche ou la modification de l'opération d'une turbine.

II.2-Les risques dus aux coups de bélier

Fortes pressions : si la somme de la surpression et de la pression initiale dépasse la pression maximale admissible (PMA) de la conduite, il peut y avoir fissuration de cette dernière, et dislocation des joints. [2]

Pressions négatives : apparaît soit à la suite d'une forte pression, soit à la suite d'un arrêt brusque de la pompe. Si la pression devient inférieure à -10 mce il y aura l'implosion de la conduite, l'aspiration des joints et aussi la possibilité de décollement de l'enduit interne de protection. [4], [11]

Fatigue de la conduite : comme autre conséquence des coups de bélier, on peut citer la fatigue qu'entraîne pour le matériau une alternance des surpressions et des dépressions. [11]

II.3 Description des phénomènes physiques en jeu

II.3.1 Etat d'équilibre d'un système hydraulique

Les phénomènes transitoires hydrauliques apparaissent lorsque des forces agissant sur un système est modifiée. Quand un liquide est en mouvement dans une conduite et que ce mouvement ne varie pas dans le temps, il y'a un état d'équilibre permanent. En fait, il y'a un équilibre entre l'énergie disponible (ou potentiel) et les énergies dues aux mouvements (cinétique) et perdues par le frottement, ce qui définit un mouvement permanent. Cette vision est macroscopique car à une échelle plus petite, on observe que les vitesses fluctuent constamment autour d'une valeur moyenne, c'est une manifestation de la turbulence. Pour les besoins de l'analyse que nous ferons, nous ne considérons que les effets globaux, moyens dans le temps, de la turbulence, notamment en ce qui concerne l'évaluation des forces de frottements selon le régime d'écoulement.

II.3.2 Onde élastique et oscillation en masse

Les variations du régime dans un système sous pression peuvent adopter deux comportements différents. Si le système est fermé, c'est-à-dire qu'il ne contient pas d'endroit où il est possible d'accumuler de l'eau en grande quantité, on observe une variation locale importante de la pression, c'est le coup de bélier par onde élastique. [6]

Dans le cas où l'eau peut être accumulée dans un réservoir ou une cheminée on parle plutôt d'oscillation en masse. Dans ce qui suit, nous examinons avec plus d'attention le phénomène d'onde élastique car il entraîne des effets plus contraignants sur le matériel que le phénomène plus particulier aux cheminées d'équilibres, de l'oscillation en masse. [7]

II.3.3 Perturbation de l'équilibre, effet sur les pressions

Si on considère la conduite dans laquelle s'écoule un fluide en régime permanent, le niveau de la pression est fort raisonnable, soit inférieur à celui de la pression hydrostatique dans des conditions d'écoulement nul, qu'advient-il lorsque, pour une raison ou une autre il y a une modification temporelle de l'écoulement par accélération ou décélération ? La réponse du physicien se base sur les principes de la mécanique Newtonienne. Il y aura un transfert d'énergie entre l'énergie potentielle et cinétique pour chercher à atteindre un nouvel équilibre en tenant compte des pertes et sans transgresser le principe de conservation de l'énergie.

Cette réponse, toute rigoureuse qu'elle soit, peut nous paraître bien aride et nous pouvons nous demander comment cela peut s'impliquer au simple cas de la masse d'eau qui circule en régime permanent dans une conduite et qui voit son mouvement modifié. Partant des principes que, dans un fluide, l'énergie potentielle se traduit par une énergie de pression et que, d'autre part l'eau n'est pas absolument incompressible et que la conduite admet des déformations élastiques. [9]

II.3.4 Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une tuyauterie

a) Cas d'arrêt brusque de la pompe

Considérons donc un système de refoulement où l'eau coule d'une vitesse (u_0) pour alimenter un réservoir dont le niveau est gardé constant, le phénomène illustré à la figure II.1, peut être décrit en quatre phases.

Phase 1

Au temps $t=0$, le débit à travers la pompe est brusquement interrompu, la vanne-clapet placée immédiatement en aval se ferme, la vitesse d'écoulement s'annule, donc l'énergie cinétique fait de même et doit être compensée par un gain d'énergie potentielle sous forme d'une dépression puisque le mouvement initial de l'eau a tendance à tirer sur la partie de la

colonne d'eau qui est immobile. Cette énergie de dépression se traduit mécaniquement par une énergie de déformation qui tend à réduire le diamètre de la conduite. Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que toute la conduite soit mise en compression ce qui prend un temps égal au rapport de longueur « L » sur la célérité de l'onde de déformation(a).

Phase 2

Lorsque l'onde de dépression atteint le réservoir, celle –ci se dissipe puisqu'il règne à cet endroit une pression constante.

A ce moment précis, plus rien ne retient la mise en compression de la conduite et elle commence à reprendre sa forme à proximité du réservoir. L'augmentation de volume ainsi créée, entraîne le remplissage de la conduite à une vitesse équivalente à la vitesse initiale du fluide puisque la déformation initiale de la conduite est directement liée à cette dernière .Ce phénomène a la même durée que celle de l'étape précédente.

Phase 3

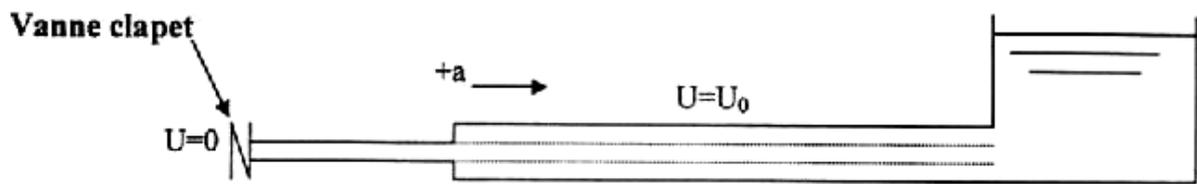
Au moment où toute la conduite a repris sa forme, la vitesse de l'eau doit s'annuler en frappant la vanne-clapet fermée .Encore une fois, on doit avoir transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle par contre, cette fois, l'énergie de pression est positive puisque l'inertie de l'eau tend à comprimer la partie immobile de la colonne d'eau. Cette surpression met en tension la conduite qui se dilate. La vitesse de l'onde de déformation « a » étant constante, la durée de cette étape est identique à celle des précédentes.

Phase 4

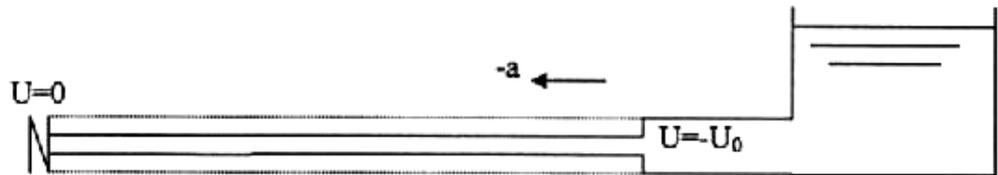
Le surplus d'eau dû à l'augmentation du volume de la conduite commence à s'évacuer près du réservoir à une vitesse (u_0) de façon à ce que la conduite reprenne son diamètre initial. A la fin de cette étape, toute la conduite aura retrouvée les conditions initiales et l'étape 1 (phase1) pourra recommencer. Ce cycle de période $t = \frac{4*L}{a}$ se répéterait indéfiniment, s'il n'y avait pas de frottement. Les effets du frottement agissent essentiellement sur l'amortissement de l'amplitude de pression.

b) Cas de l'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite

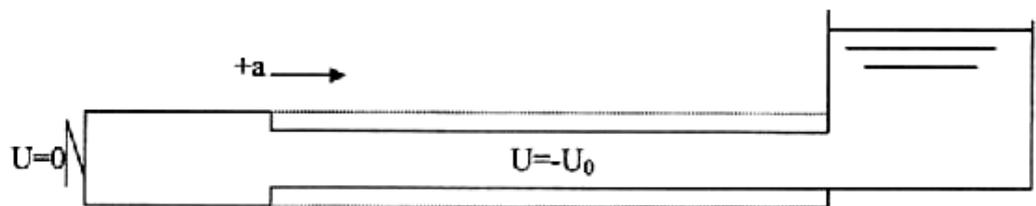
Dans le cas de l'arrêt brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite, la première onde serait une onde de surpression semblable à celle observée à l'étape 3 du cas précédent, au bout du temps $t = \frac{L}{a}$ serait engendrée dans le réservoir une onde d'équilibre qui se propagerait jusqu'à la vanne, où elle arriverait dans le temps $t = \frac{2L}{a}$ (phase4), à ce moment –la prendrait naissance une onde de dépression , qui atteindrait le réservoir dans le temps $t = \frac{3L}{a}$ (phase 1), suivie d'une onde d'équilibre ,qui atteindrait la vanne dans le temps $t = \frac{4L}{a}$ semblable à la phase 2 ,et le phénomène recommencerait s'il n'y avait pas de frottement.



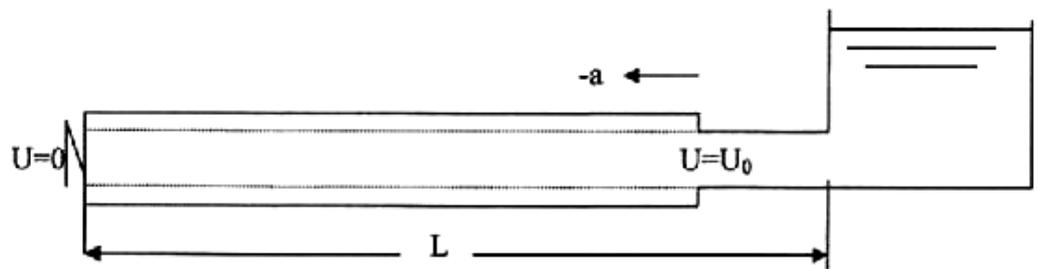
Phase 1, temps écoulé : $t=L/a$



Phase 2, temps écoulé : $t=2L/a$



Phase 3, temps écoulé : $t=3L/a$



Phase 4, temps écoulé : $t=4L/a$

Figure II.1: Quatre étapes d'un cycle de variation de pression dans une conduite de refoulement.

II.4 Valeur numérique du coup de bélier

II.4.1 Cas de manœuvre rapide, formule de JOUKOWSKY

Nous avons considéré, jusqu'à présent une manœuvre instantanée, c'est-à-dire, d'une durée $T=0$, ce qui est physiquement impossible. Dans la réalité, la variation du débit (provoquée par l'arrêt d'une pompe par exemple), se fait en un moment $T \neq 0$ et des ondes élémentaires sont engendrées, au fur et à mesure que s'opère l'arrêt.

Dans le cas d'une variation de débit rapide (temps d'annulation du débit inférieur au temps correspondant à l'allée et venue d'une onde élastique), on montre que :

$$\Delta h = \pm \frac{a \cdot \Delta u}{g} \text{ Loi de Joukowski}$$

Connue également sous le nom de formule d'Allievi.

II.4.2 Cas de la fermeture lente d'une vanne de sectionnement

Lors de la fermeture rapide de la vanne de sectionnement, la valeur maximale du coup de bélier était de $h = \frac{a \cdot \Delta U}{g}$.

Avec Δu : vitesse moyenne du coup de bélier.

a : vitesse de propagation.

g : accélération terrestre.

Considérons une conduite horizontale "AB", de diamètre intérieur "D" de longueur "L", alimentée en "A" par un réservoir à niveau constant (figure II.2).

Soit « Q_0 » le débit au temps 'T=0' et supposons qu'il passe encore après un temps « $\frac{2l}{a}$ », un débit « q ». la valeur de la surpression et de la dépression due au coup de bélier est :

$$h = \frac{a}{g \cdot s} (Q_0 - q) \quad (\text{II-1})$$

Supposons que le temps de fermeture de la vanne soit ($T = n \cdot \frac{2L}{a}$) et que pendant ce temps le débit varie linéairement.

Nous avons :

$$Q_0 - q = \frac{Q_0}{n}$$

(II-2)

$$Q_0 - q = Q_0 \frac{2L}{a \cdot T}$$

$$\text{Donc : } h = \frac{a}{g.s} Q_0 \frac{2L}{a.T} = \frac{2 L Q_0}{g.s.T}$$

Finalement : $h = \frac{2.L.U}{g.T}$ c'est la formule dite de Michaud.

La formule de Joukowsky ne s'applique que dans le cas de manœuvres rapides.

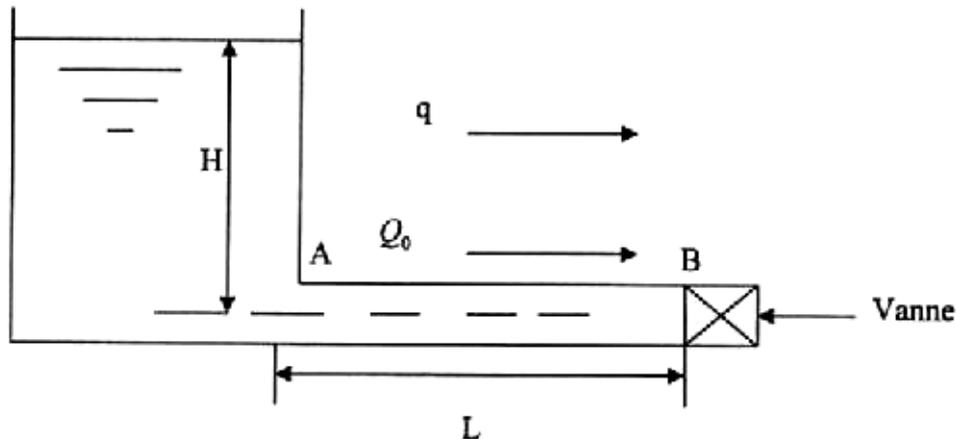


Figure II.2 : Réservoir à cote constante

Remarquons que si, dans cette formule, on remplace par $T = \frac{2L}{a}$, on retrouve la valeur de coup de bélier par fermeture brusque.

En conclusion :

-si $T < \frac{2L}{a}$, le coup de bélier a pour valeur maximale $h = \frac{aU}{g}$.

- si $T > \frac{2L}{a}$, le coup de bélier est moins important et a pour valeur $h = \frac{2LU}{gT}$.

Ceci montre un intérêt :

Pour les conduites d'adduction, d'adopter des robinets à fermeture lente, pour tomber dans le cas de la formule de Michaud.

Pour les conduites de refoulement, de connaître le temps mis par un groupe pour s'arrêter et qui devra, si possible, être supérieur à $\frac{2L}{a}$.

Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons fait une description physique du phénomène du coup de bélier, le mécanisme qui le régit, ainsi que les causes qui produisent le problème.

Introduction

Le but de ce chapitre est d'établir les équations qui régissent le phénomène, ces équations dérivent par l'application de deux lois principales à savoir :

- la loi de conservation de la masse (équation de continuité).
- la loi de conservation de la quantité de mouvement (l'équation dynamique).

III.1 Description mathématique

III.1.1 Hypothèse de base

Pour qu'on puisse appliquer les deux lois sur une tranche de fluide. Des hypothèses de base ont été émises :

- la conduite est peu déformable il en résulte que les composantes de l'accélération perpendiculaire à l'axe de la conduite sont négligeable.
- le liquide est très peu compressible.
- La répartition de la pression et la vitesse sont uniformes et constantes à travers une section, il en résulte que l'inertie liée à l'écoulement radial dans une section est négligeable et que la vitesse est une fonction de x et t .
- La paroi de la conduite n'a pas d'inertie c'est-à-dire que la variation de la pression est suivie instantanément par la déformation de la paroi.
- Le niveau du réservoir est supposé constant.

Par souci de simplicité est vue les hypothèses simplificatrices présentées ci-dessus, nous présenterons le modèle mathématique, dans le cas d'un fluide homogène.

Les grandeurs définissant les conditions d'écoulement en un point de la conduite sont :

- La pression (charge) : $P(x, t)$; $H(x, t)$
- La vitesse moyenne : $U(x, t)$

III.2 Détermination des équations de SAINT VENANT

On va établir les deux équations connues sous le nom d'équations de SAINT-VENANT à partir des équations générales que sont l'équation de continuité et l'équation dynamique.

III.2.1 Equation de continuité

Nous allons d'abord rappeler certains résultats de mécanique des matériaux et les utiliser pour déterminer les contraintes dans les tuyaux sous pression. [8], [11]

Soient σ_1 et σ_2 respectivement les contraintes longitudinale et radiale, ξ_1 et ξ_2 les déformations correspondantes, E le module d'élasticité de la conduite (module de YOUNG) et ν le module de poisson.

La loi de HOOKE permet d'écrire :

$$\xi_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$$

Exprimons les contraintes σ_1 et σ_2

Contrainte σ_2 :

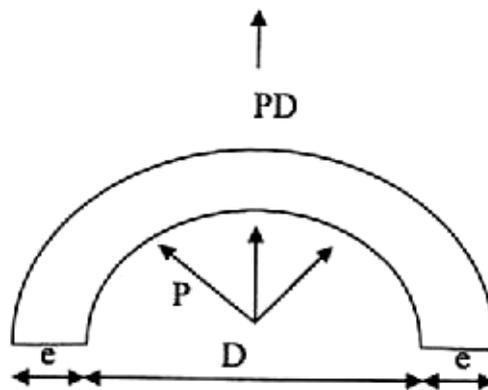


Figure III.1 : forces et contraintes radiales dans un tuyau circulaire.

Si D est le diamètre et 'e' l'épaisseur du tuyau, la pression interne P exerce une force P.D sur une demi circonférence.

La contrainte est donc : $\sigma_2 = \frac{P.D}{2.e}$

Contrainte σ_1 : on distingue deux cas :

- **Premier cas** : si la conduite à suffisamment de joints, on peut considérer qu'il n'y a ni contraintes, ni déformation longitudinales et que les éléments cylindriques successifs sont indépendants entre eux (donc $\nu=0$). dans ce cas, on a : $\nu_1 = \nu = 0$. (ν n'est pas alors le module de poisson du matériau proprement dit mais son équivalent pour la canalisation globale).
- **Deuxième cas** : la contrainte longitudinale doit être prise en compte. Elle dépend dans ce cas de la façon dont le tuyau est ancré aux extrémités :
 - Tuyau ancré aux deux extrémités : on a donc $\xi_1 = 0$ et par conséquent $\sigma_1 = \nu\sigma_2$.
 - Tuyau libre à une extrémité : la force qui s'exerce à l'extrémité du tuyau est égale à $\frac{P\pi D^2}{4}$, cette pression peut être nulle dans le cas où la vanne d'extrémité serait grande ouverte. Cette force s'exerce sur le périmètre entier du tuyau « $\pi.D$ », donc sur la surface $\pi.D.e$, la contrainte est donc $\sigma_1 = \frac{PD}{4e}$ qu'on peut écrire $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2}$.

Récapitulation

L'expression de la contrainte radiale est : $\sigma_2 = \frac{PD}{2e}$

L'expression de la contrainte longitudinale est : $\sigma_1 = K_C \sigma_2$

Avec K_C coefficient d'ancrage, on peut avoir trois cas :

Cas A : conduite sans joints, libre à une extrémité $K_C = \frac{1}{2}$

Cas B : conduite sans joints, ancrées aux deux extrémités $K_C = \nu$

Cas C : conduites avec de nombreux joints $K_C = 0$

Nous allons exprimer l'expression de continuité en analysant les déformations à masse constante d'un volume de liquide entre les instants 't et t+dt'. Pour cela, nous allons exprimer que cette masse ($\rho v = \rho.S.\Delta L$) reste constante.

Soit :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = 0 \quad (\text{III} - 1)$$

Avec :

ρ : La masse volumique du liquide.

S : La section radiale.

ΔL : La variation de longueur de l'élément liquide.

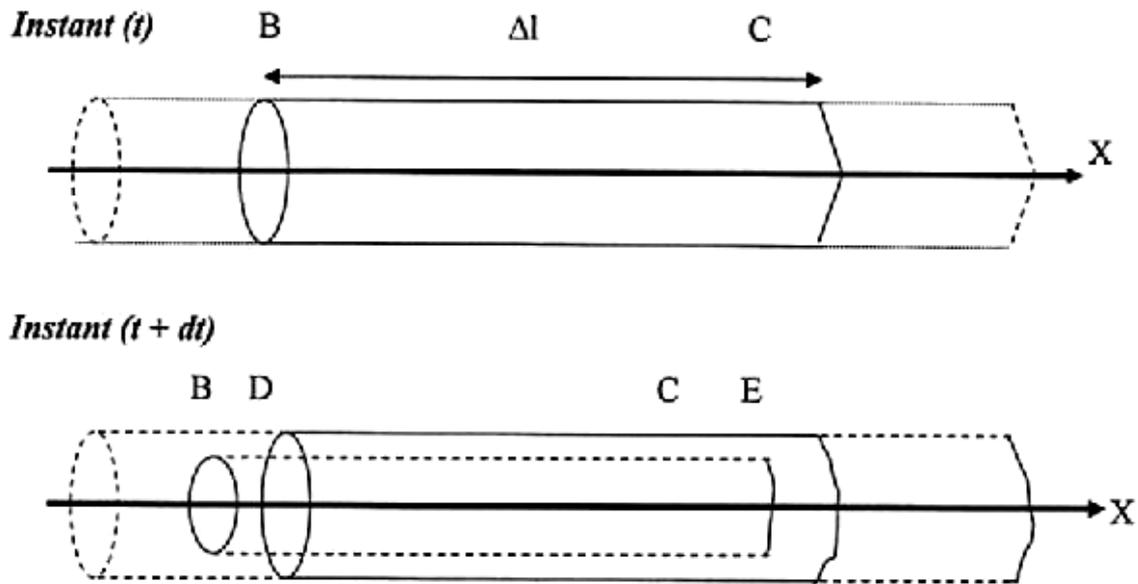


Figure II.2 : Déplacement d'un élément liquide

Figure III.2 : déplacement d'un élément liquide.

Variation de longueur de l'élément liquide :

Exprimons la variation ΔL :

$$\Delta L(t) = X_C - X_B$$

$$\Delta L(t + dt) = X_E - X_D$$

$$d(\Delta L) = (X_E - X_C) - (X_D - X_B)$$

$$d(\Delta L) = U_C dt - U_B dt = (U_C - U_B) dt$$

D'où :

$$d(\Delta L) = \frac{\partial U}{\partial X} \cdot \Delta L \cdot dt$$

et

$$\frac{d(\Delta L)}{\Delta L} = \frac{\partial U}{\partial X} dt \tag{III - 2}$$

Variation de la masse volumique de l'élément liquide :

Par définition, le module d'élasticité du fluide ' ξ ' est égale à : $dp / (d\rho/\rho)$.

On en déduit l'égalité suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{\xi} \quad (\text{III} - 3)$$

Variation de section de l'élément liquide :

La section de l'écoulement liquide reste en permanence égale à celle de l'élément de tuyau qui l'entoure. On a donc :

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dr}{r} = 2d\xi_2 = \frac{2}{E} (d\sigma_2 - \nu d\sigma_1)$$

On a vu précédemment que : $\sigma_1 = K_C \sigma_2$

Si on pose $C = 1 - K_C \nu$, on obtient :

$$\frac{dS}{S} = \frac{2C}{E} d\sigma_2 = \frac{D}{E \cdot e} \cdot C dP \quad (\text{III} - 4)$$

On remplace chaque terme de l'équation (III-1) par les expressions données dans les équations (III-2 ; III-3 ; III-4), on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{D}{E \cdot e} C \right) \frac{dP}{dt} = 0 \quad (\text{III} - 5)$$

On voit que le terme $\left(\frac{1}{\xi} + \frac{D}{E \cdot e} C \right)$ dépend d'une part de la compressibilité de l'eau (ξ), d'autre part des caractéristiques du tuyau $\left(\frac{D}{E \cdot e} \right)$ et de la façon dont ce dernier est assemblé et ancré (C).

Ce terme est donc en général une caractéristique de l'installation sur laquelle on étudie le coup de bélier, on pose donc :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{1}{\xi} + \frac{D}{E \cdot e} \cdot C \right) \quad (\text{III} - 6)$$

Ce qui donne comme nouvelle expression de l'équation de continuité :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) = 0 \quad (\text{III} - 7)$$

La relation (III-7) représente la première équation de SAINT-VANANT.

III.2.2 Equation dynamique

On va suivre un petit élément de volume dans son mouvement et lui appliquer le théorème de quantités de mouvement : [8], [11]

$$\frac{d(mU)}{dt} = \sum F_{ex} \quad (III - 8)$$

Qui indique que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide.

$$\frac{d(mU)}{dt} = \frac{dm}{dt}U + m \frac{dU}{dt}$$

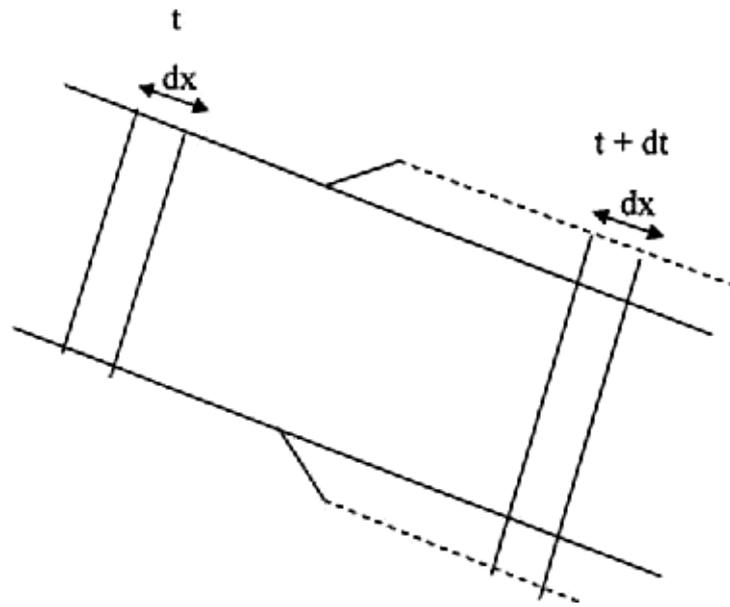


Figure III.3 : Théorème des quantités de mouvement

La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement.

On a donc : $\frac{dm}{dt} = 0$

Donc :

$$\frac{d(mU)}{dt} = m \frac{dU}{dt} = \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{dU}{dt} \quad (III - 9)$$

Les forces extérieures appliquées et projetées sur l'axe de la conduite pour une couche d'eau d'épaisseur dX , (figure III.4) sont :

-la pression sur une face de la tranche dX est: PS

-la pression sur l'autre face est: $-\left(P + \frac{\partial P}{\partial X} dX\right) \cdot S$

N.B : la section S est supposée constante sur toute la longueur de la conduite donc nous négligeons le terme $\frac{\partial S}{\partial X}$.

-la composante du poids est : $-\rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin\alpha$

- les frottements du liquide avec les parois de la conduite sont : $\tau \cdot \pi \cdot D \cdot d$

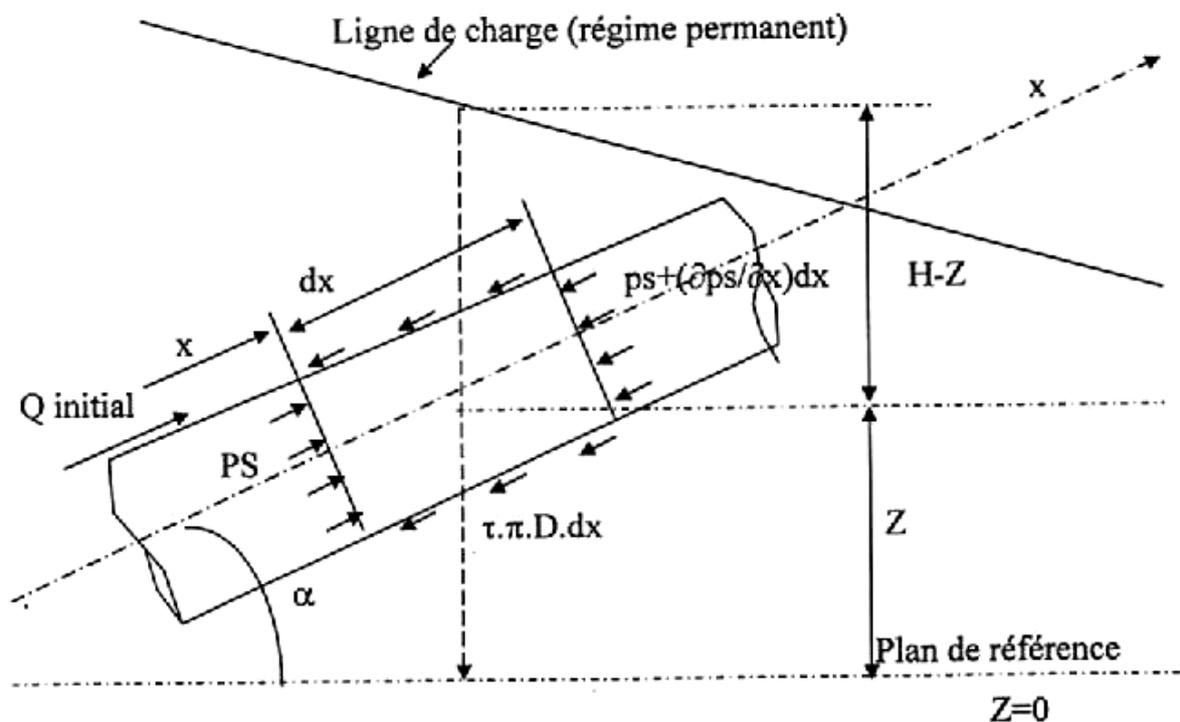


Figure III.4 : forces exercées sur une tranche liquide.

On signale que : $\frac{dz}{dx} = \sin\alpha$

Et $P = \rho g (H - Z)$

A partir de la figure (III-4) on aura :

$$\sum F_{ex} = PS - \left(PS - SdX \frac{\partial P}{\partial X}\right) - \rho g S dX \sin\alpha - \tau \pi D \cdot dX \quad (III - 10)$$

On détermine d'abord le terme « $\tau\pi.D$ ».

Les pertes de charge étant représentées par ΔP donnée par la formule :

$$\Delta P = \rho g \lambda \frac{LU^2}{D2g}$$

On peut écrire alors que la force de frottement Fr se calcule par l'une des deux formules suivantes :

$$Fr = \tau\pi DL \quad \text{Ou} \quad Fr = \Delta P * \pi * \frac{D^2}{4}$$

D'où l'on déduit :

$$\tau\pi D = \frac{\pi D^2}{4} \rho g \frac{\lambda.U^2}{D2g} = j\rho g S \quad (III - 11)$$

$$\text{Avec } j = \frac{\lambda U^2}{D2g} \text{ (gradient hydraulique)}$$

On injecte l'expression $\tau.\pi.D$ dans l'équation (III-10), on aura :

$$\sum F_{ex} = -\frac{\partial P}{\partial X} S dX - \rho g S \sin\alpha dX - j\rho g S dx \quad (III - 12)$$

En portant l'équation (III-12) dans l'équation (III-9) on obtient après simplification par $\rho.S.dX$:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} - g(\sin\alpha + j)$$

Ou bien :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin\alpha + j) \quad (III - 13)$$

L'expression (III-13) est la seconde équation de SAINT-VENANT.

On sait que :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial X}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X}$$

D'où on aura :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin\alpha + j) \quad (III - 14)$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right)$$

(III-15)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin\alpha + j)$$

Par conséquent les équations (III-7) et (III-14) représentent le système (III-15) des équations de SAINT-VENANT.

III.2.3 Les équations aux caractéristiques

A partir du système (III-15) on a : [8], [11]

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) = 0 \quad (a)$$

(III-16)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin\alpha + j) \quad (b)$$

En multipliant (a) par « $\frac{a}{\rho}$ » on obtient :

$$a \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) = 0$$

(III-17)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g(\sin\alpha + j)$$

Ajoutons-les d'abord puis retranchons la première de la deuxième .on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (a + U) \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + (a + U) \frac{\partial P}{\partial X} \right) = -g(\sin\alpha + j)$$

(III-18)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial P}{\partial X} \right) = g(i - j)$$

La première équation du système (III-18) montre que si on se place sur un trajet tel que $\frac{dX}{dt} = U + a$, la quantité $\frac{\partial U}{\partial t} + (a + U) \frac{\partial U}{\partial X}$ exprime sur ce trajet la dérivée totale par rapport

au temps de la vitesse $\frac{dU}{dt}$ de même pour la pression, on aura donc :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} = -g(\sin\alpha + j)$$

(III-19)

$$\frac{dU}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} = -g(\sin\alpha + j)$$

En utilisant les expressions suivantes :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{dX}{dt} = \frac{dX}{dt} \sin\alpha \quad (\text{car } \frac{\partial Z}{\partial t} = 0)$$

$P = \rho g(H - Z)$ il vient donc:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d[\rho g(H - Z)]}{dt} = \rho g \left[\frac{dH}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right]$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho g \left[\frac{dH}{dt} - \frac{dX}{dt} \sin\alpha \right]$$

D'où les équations du système (III-16) et leurs conditions respectives s'écrivent :

$$\frac{dX}{dt} = U + a$$

(III-20)

$$\frac{dU}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -\frac{g}{a}(U + a)\sin\alpha - g(\sin\alpha + j)$$

$$\frac{dX}{dt} = U - a$$

(III-21)

$$\frac{dU}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -\frac{g}{a}(U - a)\sin\alpha - g(\sin\alpha + j)$$

Les équations aux caractéristiques sont représentées par les deux premières équations des systèmes (III-20) et (III-21) quant aux deux dernières équations des mêmes systèmes, elles sont dites de compatibilité.

En général, on a toujours $a \gg U$ d'où il vient :

$$1^\circ/\text{Pour} : \frac{dX}{dt} = U + a \approx +a$$

$$\text{On a} : \frac{dU}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -gj$$

$$2^\circ/\text{Pour} : \frac{dX}{dt} = \pm a$$

$$\text{On a} : \frac{dU}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -gj$$

Ou autrement écrites :

$$\frac{dX}{dt} = \pm a$$

$$\frac{g}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{g} U \pm H \right) + gj = 0$$

On introduit le débit $Q = U.S$ dans cette dernière expression tout en la multipliant par $\frac{a}{g}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{gS} Q \pm H \right) + aj = 0$$

Comme $dX = \pm a dt$, on aura donc le système suivant :

$$\frac{dX}{dt} = \pm a$$

(III-22)

$$d \left(\frac{a}{gS} Q \pm H \right) + j dX = 0$$

Rappelons que le signe (+) doit être pris si $dX = +a dt$ et le signe (-) n'est valable que dans le cas où $dX = -a dt$.

III.2.4 Les équations d'ALLIEVI

Les équations (III-16a) et (III-16b) de SAINT-VENANT sont générales et traduisent tous les mouvements transitoires. On peut donc les simplifier en rétrécissant le champ de leur validité. négligeons par exemple les pertes de charge et admettons qu'on ne s'intéresse qu'aux variations telles que $U \frac{\partial U}{\partial X}$ soit négligeable devant $\frac{\partial U}{\partial t}$. Ceci est souvent vrai en hydraulique sous pression puisqu'en front d'onde $\frac{\partial U}{\partial t}$ est égale à $(-a \frac{\partial U}{\partial X})$ et que 'U' est faible devant 'a', on peut également négliger $U \frac{\partial P}{\partial X}$ devant $\frac{\partial P}{\partial t}$. [1], [11], [12]

Le système des équations (III-16) devient alors :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

(III-24)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = -g \sin \alpha$$

Comme : $\sin \alpha = \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$ et $P^* = P + \rho g Z$

On peut écrire :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial P^*}{\partial t} = 0$$

(III-25)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial X} = 0$$

Ces équations s'intègre pour donner le système de solutions :

$$P^* = P_0^* + F' \left(t - \frac{X}{a} \right) + f' \left(t + \frac{X}{a} \right)$$

(III-26)

$$U = U_0 + \frac{1}{a} \left[F' \left(t - \frac{X}{a} \right) - f' \left(t + \frac{X}{a} \right) \right]$$

Où F' et f' représentent des fonctions quelconques des variables $\left(t - \frac{X}{a} \right)$ et $\left(t + \frac{X}{a} \right)$. c'est à partir de ces équations que sont établies les solutions analytiques pour les cas simples, en faisant intervenir les conditions aux limites.

On peut écrire le système (III-26) sous forme :

$$P^* - P_0^* = F' + f'$$

$$U - U_0 = \frac{1}{Pa} [F' - f']$$

Effectuons les opérations suivantes :

1°/Divisons la première équation par ρg .

2°/Multiplions le terme de droite de la deuxième équation par (ρg) , puis divisons $(F' - f')$ de ce même terme par (ρg) .

3°/faisons sortir le signe moins (-) du terme $(F' - f')$.

Le système devient alors :

$$\frac{P^*}{\rho g} - \frac{P_0^*}{\rho g} = \frac{F'}{\rho g} + \frac{f'}{\rho g}$$

$$U - U_0 = -\frac{g}{a} \left(\frac{f'}{\rho g} - \frac{F'}{\rho g} \right)$$

En développant les termes : $\frac{P^*}{\rho g}$ et $\frac{P_0^*}{\rho g}$

Nous retrouvons : $H = \frac{P^*}{\rho g}$ et $H_0 = \frac{P_0^*}{\rho g}$

Posons ensuite : $F = \frac{f'}{\rho g}$ et $f = \frac{F'}{\rho g}$

Il vient alors :

$$H - H_0 = F + f$$

(III-27)

$$U - U_0 = -\frac{g}{a} (F - f)$$

Enfin nous aurons :

$$b = H - H_0 = F \left(t - \frac{X}{a} \right) + f \left(t + \frac{X}{a} \right)$$

(III-28)

$$U - U_0 = -\frac{a}{g} \left[F \left(t - \frac{X}{a} \right) - f \left(t + \frac{X}{a} \right) \right]$$

Le système (III-28) représente les équations d'ALLIEVI.

Avec : $b = |H - H_0|$ valeur du coup de bélier.

F et f : Sont des signes fonctionnels qui dépendent des conditions aux limites.

III.2.5 Interprétation

Supposons un observateur se déplaçant le long de la conduite de telle façon que la loi de son mouvement soit :

$$t - \frac{X}{a} = \text{cte}$$

C'est-à-dire :

$$X = at + b \quad (b = \text{cte})$$

Autrement dit l'observateur se déplace d'un mouvement uniforme de vitesse « a » en sens inverse de la vitesse d'écoulement U . Pour cet observateur la fonction $F\left(t - \frac{X}{a}\right)$ reste constante en chaque point, cette fonction représente donc une onde se propageant dans la conduite avec la vitesse « a » en sens inverse de U .

De manière analogue un second observateur se déplaçant le long de la conduite et en sens inverse, c'est-à-dire avec une loi de mouvement tel que $\left(t + \frac{X}{a} = \text{cte}\right)$, observerait que la fonction $f\left(t + \frac{X}{a}\right)$ reste constante en chaque point, cette fonction $f\left(t + \frac{X}{a}\right)$ représente donc une onde se propageant le long de la conduite avec une vitesse « $-a$ », c'est-à-dire dans le même sens que U .

Donc la surpression(ou dépression) en chaque point de la conduite résulte de la superposition en ce point des deux ondes F et f se propageant dans la conduite en sens inverse avec la même vitesse absolue « a ».

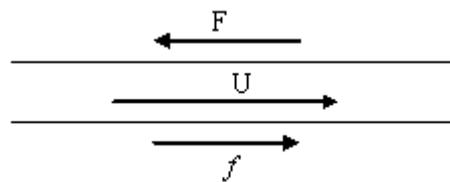


Figure (III-5) : Circulation des ondes dans une conduite

Remarquons au passage que F , f et la surpression $= F + f$ indépendantes de la pression statique H_0 au point considéré et sont fonction uniquement de X et t .

✓ Valeur de a (formule d'ALLIEVI). Nous avons défini « a » par la relation :

$$a^2 = \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee}}$$

Qu'on peut écrire :

$$a = \frac{A}{\sqrt{B + K \cdot \frac{D}{e}}}$$

ALLIEVI à calculé les valeurs de A, B et K en remplaçant \bar{W}, g, K et E par les valeurs exactes ou moyennes et a obtenu pour de l'eau aux températures ordinaires :

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + K \cdot \frac{D}{e}}}$$

Dans laquelle :

- a : est La célérité de propagation est en (m/s), pour des valeurs de « D » et « e » en mètres.
- K : coefficient dépendant de la nature du matériau constituant la conduite, en effet « $k=10000/E$ », avec « E » en (kg/m²). On donne sa valeur pour différents matériaux dans le tableau suivant :

Tableau (III-1) : Valeurs du coefficient « k » dans la formule d'Allievi, pour différents matériaux: [2]

Matériaux	Coefficient « k »
Acier	0,5
Fonte	1
Amiante – ciment	4
Béton	5
Plomb	7
P.V.C (chlorure de polyvinyle)	35
P.E.H.D. (Polyéthylène haute densité)	70
P.E.B.D. (Polyéthylène basse densité)	300

Les valeurs du coefficient « k » pour le P.V.C., P.E.H.D. et P.E.B.D. doivent être prises avec réserve, car la formule donnée par Allievi a été établie dans une zone de déformation élastique de la conduite, or cette zone est mal définie pour les matériaux plastiques.

-Le nombre « 48,3 » est spécifique de l'eau.

A. Schlag a tracé un diagramme (figure III.6) donnant la célérité de l'onde, par la formule d'Allievi, en fonction du rapport « D/e », pour divers matériaux : acier, fonte, cuivre, amiante –

ciment, plomb, P.V.C. et P.E.H.D., on y remarque que la célérité de l'onde est faible pour les matériaux plastiques.

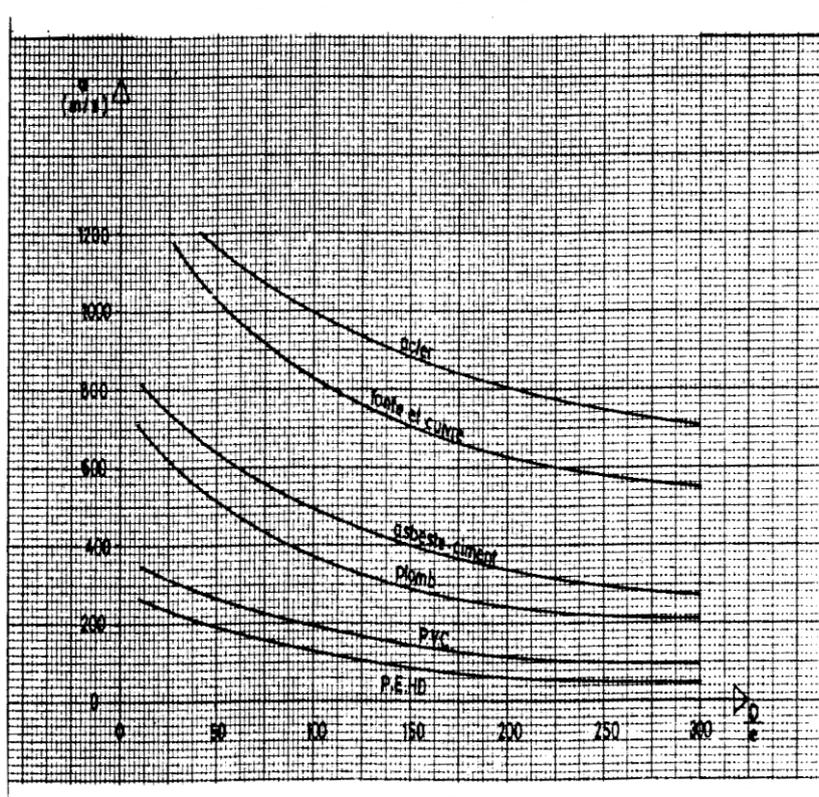


Figure III.6 : Célérité de l'onde « a » en fonction de « D/e », pour différents matériaux [2]

III.3 La célérité d'onde « a »

III.3.1 conduite libre (non enterrée)

La célérité d'onde « a » donnant le coup de bélier est déterminé par la formule habituelle suivante : [3], [11]

$$a = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{KD}{Ee}}} \quad \text{m/s}$$

Avec :

K : coefficient d'élasticité de l'eau.

E : module d'Young de la conduite.

e : épaisseur de la conduite.

ρ : masse volumique de l'eau.

D : diamètre intérieure de la conduite.

III.3.2 Conduite enterrée

Pour tenir compte de l'effet du sol sur la conduite. B.SALAH à trouvé et à publié la formule ci-après, donnant la célérité d'onde du coup de bélier quand la conduite est enterrée. La formule donnée par l'auteur pour cette hypothèse est d'ordre général, elle tient compte des caractéristiques mécaniques de la conduite (considération du coefficient de Poisson de tous les matériaux dans le cas de conduite composite) et du sol l'entourant, ainsi que du type d'ancrage de la conduite. Cette formule est autant valable pour les conduites simples (minces et épaisses) que pour les conduites composites (blindées ou à simple revêtement). [13]

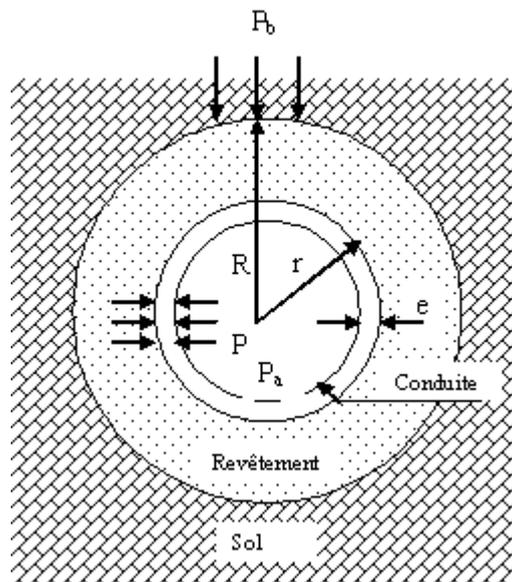


Figure III.7 : forces appliquées sur une conduite enterrée.

$$a = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K \cdot 2 \cdot r(1 - v_m^2) \cdot (1 - v_s)}{(1 - v_m^2) \cdot r \cdot E_s + E_m \cdot e_m(1 - v_s)}}} \quad \text{m/s}$$

Avec :

r : Rayon intérieur de la conduite.

ν_m : Coefficient de poisson du matériau de la conduite.

ν_s : Coefficient de poisson de sol entourant la conduite.

E_m : Module de Young de la conduite (matériau).

E_s : Module de Young du sol considéré.

e_m : Epaisseur de conduite.

Conclusion

Les deux équations de SAINT-VENANT sont obtenues en appliquant le théorème de quantité de mouvement et de continuité. ces équations permettent de traduire tous les mouvements transitoires en hydraulique sous pression.

La transformation de ces équations à des équations de caractéristiques donne un sens physique plus évident aux problèmes.

Enfin on est arrivé aux équations d'ALLIEVI après simplification et qui représentent un cas simple des équations de SAINT-VENANT.

Introduction

Les différentes méthodes d'analyse du phénomène du coup de bélier sont basées sur les équations de SAINT-VENANT.

Compte tenu de la complexité du phénomène, il n'existe pas de solutions analytiques complètes permettant de résoudre le problème. Des méthodes approximatives, graphiques ou numériques ont donc pris le relais pour permettre aux ingénieurs de quantifier ce type de phénomènes, parmi ces méthodes :

- Méthode analytique.
- Méthode graphique.
- Méthode des différences finies.
- Méthode des caractéristiques.

IV.1 Méthodes analytique

Cette solution sera élaborée sauf sous les hypothèses suivantes [5]:

- ❖ Pertes de charge négligeables.
- ❖ La conduite est supposée horizontale.

Les équations du coup de bélier deviennent :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g \cdot S} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g \cdot S \frac{\partial H}{\partial X} = 0$$

Ces équations sont de type hyperbolique, donc elles admettent des solutions de la forme :

$$H = H_0 + f\left(t + \frac{X}{a}\right) + f\left(t - \frac{X}{a}\right)$$

$$Q = Q_0 - \frac{g \cdot S}{a} \left[F\left(t + \frac{X}{a}\right) - F\left(t - \frac{X}{a}\right) \right]$$

Il reste de déterminer f et F suivant les conditions initiales et aux limites. Cette méthode a été abandonnée, quand les moyens de calcul numérique étaient apparus et ont été développées, en plus elle ne présente pas la réalité grâce à la négligence de pertes de charge.

IV.2 Méthodes graphique

La méthode graphique permet d'aboutir d'une manière très élégante et relativement simple à une solution générale des problèmes plus compliqués, en plus elle nous permet de comprendre le phénomène de façon très simple. La méthode a été créée indépendamment l'une de l'autre par Schneider (1929) et Bergeron (1931) en France et qui porte son nom « méthode de BERGERON » pour bien comprendre cette méthode, les auteurs sont partis de l'équation :

$$dH + \frac{1}{g} \frac{dX}{dt} dU = 0$$

Après l'intégration de cette équation le long de la conduite L entre A et B on obtient :

$$H_A + \frac{1}{g} \cdot a \cdot U_A = H_B + \frac{1}{g} \cdot a \cdot U_B \quad \text{Ecoulement de A vers B}$$

$$H_A - \frac{a}{g} \cdot U_A = H_B - \frac{a}{g} \cdot U_B \quad \text{Ecoulement de B vers A}$$

Cette méthode consiste à tracer l'épure de BERGERON définie par la courbe H(Q) pour tous les points de discrétisation.

Cette méthode a pour avantage d'être la base de la méthode des caractéristiques, mais elle a été abandonnée, lors de l'apparition des méthodes numériques plus performantes, aussi la méthode devient très délicate lorsque le nombre de conduites dans le réseau devient très important. [1], [11]

IV.3 Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques consiste à écrire les deux équations aux dérivées partielles du mouvement dans les axes liés aux trajectoires des perturbations. Ces équations sont exprimées en forme de différences finies en utilisant un intervalle de temps dt bien spécifique, les solutions sont obtenues à l'aide d'un ordinateur. La méthode présente certains avantages dont on citera :

- ❖ Les conditions aux limites sont facilement programmables.
- ❖ La stabilité de la solution est assurée.
- ❖ Les systèmes les plus complexes peuvent être manipulés facilement.
- ❖ La programmation des équations est très aisée.

En effet lorsqu'un réseau multi-branches est composé de plusieurs conduites avec des propriétés différentes, de terme non linéaire des équations principales sont importants, ou encore dans le cas des écoulements diphasiques, ce qui nécessite d'utiliser d'autres méthodes qui peuvent résoudre ce genre de problème (schémas explicites ou implicites). [5], [11]

Considérons l'équation de continuité et l'équation de mouvement sous frottement que nous multiplions par $\frac{L}{g.S}$:

Avec : S est la section de la conduite.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g.S} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0 \quad (IV - 1)$$

$$\frac{a}{g.S} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + g.S \frac{\partial H}{\partial X} \right] = 0 \quad (IV - 2)$$

En combinant ces deux équations par addition et soustraction, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[H \pm \frac{aQ}{gS} \right] \pm a \frac{\partial}{\partial X} \left[H \pm \frac{aQ}{gS} \right] = 0 \quad (IV - 3)$$

Cette forme est égale à la dérivée totale par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \left[H \pm \frac{aQ}{gS} \right] = 0 \quad (IV - 4)$$

$$\text{si } \frac{dX}{dt} = C \quad (IV - 5)$$

Dans un plan (x, t) l'équation (IV-5) représente des courbes (ici des droites) sur lesquelles le système (IV-4) est vérifié l'intersection de deux droites définit donc une solution de ce système d'équation .figure (IV-1).

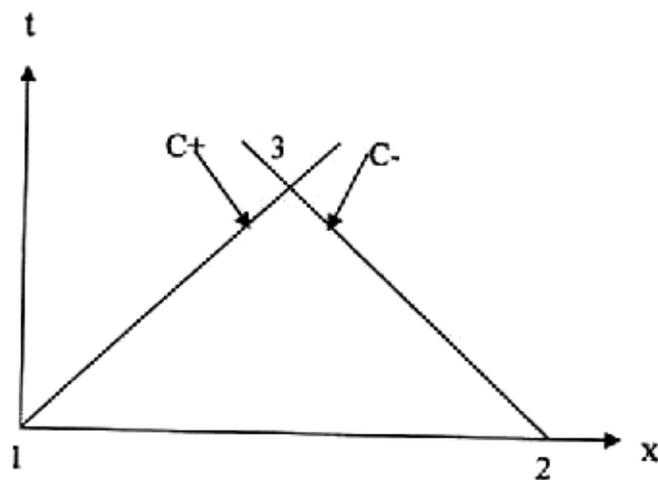


Figure (IV-1) : schéma utilisé pour la méthode des caractéristiques.

Avec :

C^+ : Caractéristique positive, $C^+ = +a$

C^- : Caractéristique négative, $C^- = -a$

Ainsi, si les points 1,2 situés au temps initial, représentent des positions où les valeurs des pressions et débits sont connues, alors il sera possible de calculer les valeurs aux points 3, situé en $\frac{\Delta X}{2}$ et $\frac{\Delta t}{2}$ en considérant une forme différentielle du système (IV-4).

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \left[H \pm \frac{aQ}{g \cdot S} \right] = 0$$

Ce qui donne :

$$\text{Entre 1 et 3 : } H_3 + \frac{aQ_3}{gS} = H_1 + \frac{aQ_1}{gS}$$

$$\text{Entre 2 et 3 : } H_3 - \frac{aQ_3}{gS} = H_2 - \frac{aQ_2}{gS}$$

$$\text{D'où : } H_3 = \frac{1}{2} \left[H_1 + H_2 + \frac{a}{gS} (Q_1 - Q_2) \right]$$

$$\text{Et } Q_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{gS}{a} (H_1 - H_2) + (Q_1 + Q_2) \right]$$

IV.4 Méthode des différences finies

Cette méthode consiste à remplacer les opérateurs différentiels par les opérateurs basés sur des intervalles de temps et d'espace fini Δt et Δx , puis à résoudre le système d'équations algébrique ainsi obtenu en tenant compte des conditions initiales et aux limites. [15]

IV.4.1 Discrétisation des opérateurs différentiels

Soit une fonction $U(x, t)$, continue et continument différentielle, le développement en série de Taylor autour du point (x, t) s'écrit :

$$U(x + \Delta x, y + \Delta y) = U(x, y) + \frac{1}{1!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) U + \frac{1}{2!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 U + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} U + R_n$$

Où le reste R_n est de l'ordre de $[|\Delta x| + |\Delta y|]^n$, ce que l'on écrit habituellement :
 $R_n = O\{[|\Delta x| + |\Delta y|]^n\}$

Ainsi, le développement en série de Taylor de $U(x + \Delta x, y)$ autour de (x, y) s'écrit,

Si $n=3$:

$$U(x + \Delta x, y) = U(x, y) + \Delta x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + o(\Delta x^3)$$

En développement à l'ordre 2 on a :

$$U(x + \Delta x, y) = U(x, y) + \Delta x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + o(\Delta x^2) \quad (\text{IV} - 6)$$

Et

$$U(x - \Delta x, y) = U(x, y) - \Delta x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + o(\Delta x^2) \quad (\text{IV} - 7)$$

Où les dérivées sont évaluées au point (x, y) , ce que l'on note

$$\text{Communément :} \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x, y} \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x, y}$$

En divisant (IV-1) avec $n=2$ par Δx , on obtient :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x, y} = \frac{U(x + \Delta x) - U(x, y)}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (\text{IV} - 8)$$

Si l'on néglige le reste $o(\Delta x)$ dans cette équation, on obtient une approximation de l'opérateur différentiel $\frac{\partial U}{\partial x}$ au point (x, y) par un opérateur aux différences finies avant (car Δx est devant x dans $x+\Delta x$).

En divisant (IV-2) avec $n=2$ par Δx , on obtient :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x, y} = \frac{U(x, y) - U(x - \Delta x, y)}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (\text{IV} - 9)$$

Qui correspond à l'approximation de $\frac{\partial U}{\partial x}$ par un opérateur aux différences finies arrière.

Finalement, on soustrayant (IV-7) de (IV-6) et en divisant par $2\Delta x$, on obtient l'approximation de $\frac{\partial U}{\partial x}$ par un opérateur aux différences finies centrales :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x, y} = \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) + 0 \quad (\text{IV} - 10)$$

Donc l'ordre d'approximation d'une méthode aux différences finies se détermine à l'aide de la formule de Taylor.

IV.4.2 Schémas implicites

Ces schémas calculent les caractéristiques de l'écoulement à un instant donné en fonction des caractéristiques de l'écoulement à ce même instant. Ces schémas ont été appliqués dans plusieurs domaines (l'aérodynamique, coup de bélier dans les réseaux simples). Leurs résultats démontrent l'intérêt de cette méthode. En plus, elles nous permettent de prendre les termes non linéaires, qui apparaissent dans les équations principales

Pratiquement ce modèle a été mis en œuvre pour étudier l'écoulement non permanent du liquide dans des réseaux multi-branches avec différents appareils de protection. [15]

IV.4.3 Schémas explicites

Les schémas explicites permettent de calculer les caractéristiques de l'écoulement à instant donné, en fonction des caractéristiques de l'écoulement à un instant précédent c'est-à-dire déjà connues.

Plusieurs schémas du second ordre ont été développés dans le calcul de dynamique de fluide pour la résolution des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique.

Parmi ces schémas, on trouve le schéma de Maccormack, de LAMBDA, et de GABUTTI, que nous les utiliserons pour la résolution de ces équations. [15]

a) Schéma de Maccormack

Le schéma de Maccormack est un schéma de second ordre dans l'espace et dans le temps. Il contient deux pas : prédicteur-correcteur dans chaque pas de temps et un type de différences finies utilisé. Deux alternances sont utilisées, dans la première alternance on utilise la différence finie avant dans l'étape de prédiction, par contre dans l'étape de correction la différence finie arrière qui est utilisée. Quand à la seconde alternance, on utilise la différence finie arrière dans l'étape de prédiction et la différence finie avant dans l'étape de correction. [14]

Maccormack recommande d'utiliser les deux alternances successivement c'est-à-dire la deuxième alternance pour le prochain pas et ainsi de suite.

La conduite a pour longueur L divisé en n pas de distance Δx , le premier nœud est de numéro 1 et le dernier est de numéro $n+1$.

Les valeurs de H et Q sont connues au temps $j \, dt$ (à partir des conditions initiales) et sont déterminées au temps $t+dt$ (en $(j+1) \, dt$) comme le montre la figure (IV-2).

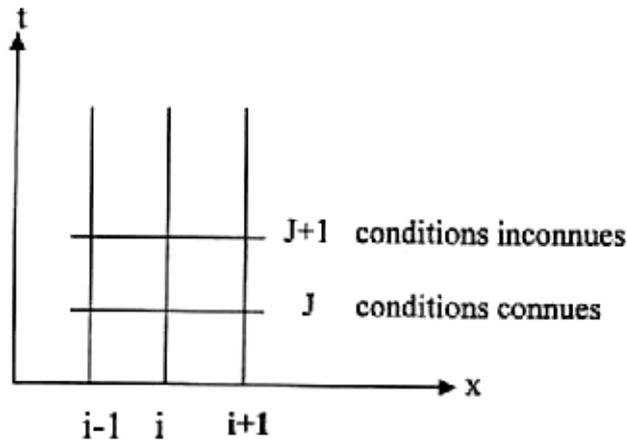


Figure (IV-2) : schéma de discrétisation du domaine.

➤ **Première alternance**

➡ **Partie prédicteur**

$$H_i^* = H_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{a^2}{gS} (Q_{i+1}^j - Q_i^j) \quad (\text{IV-11})$$

$$Q_i^* = Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_{i+1}^j - H_i^j) - R|Q_i^j| \cdot Q_i^j \quad (\text{IV-12})$$

(i=1,2,....., n)

➡ **Partie correcteur**

$$H_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left\{ H_i^j + H_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_i^* - Q_{i-1}^*) \right\} \quad (\text{IV-13})$$

$$Q_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left\{ Q_i^j + Q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_i^* - H_{i-1}^*) - RQ_i^* |Q_i^*| \right\} \quad (\text{IV-14})$$

(i=2,3,..... n+1)

➤ **Deuxième alternance (prochain pas de temps)**

➡ **Partie prédicteur**

$$H_i^* = H_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{a^2}{gS} (Q_i^j - Q_{i-1}^j) \quad (\text{IV-15})$$

$$Q_i^* = Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_i^j - H_{i-1}^j) - R|Q_i^j| \cdot Q_i^j \quad (\text{IV-16})$$

(i=2,....., n+1)

➔ Partie correcteur

$$H_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left\{ H_i^j + H_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_{i+1}^* - Q_i^*) \right\} \quad (\text{IV-17})$$

$$Q_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left\{ Q_i^j + Q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_{i+1}^* - H_i^*) - R Q_i^* |Q_i^*| \right\} \quad (\text{IV-18})$$

(i=1,2,..... n)

Nomenclature

a : Célérité.

S : aire.

Cn : Nombre de courant.

D : Diamètre de la conduite.

F : Facteur de frottement.

g : Accélération gravitationnelle.

H : niveau piézométrique.

Q : Débit.

L : Longueur de la conduite.

R : résistance de la conduite.

t : temps.

Δt : le pas de temps, avec $\Delta t = \Delta x / a$.

Δx : le pas d'espace, avec $\Delta x = L / (n-1)$.

n : nombre de points de discrétisation.

Indice

i : indice qui varie en fonction du pas d'espace (axe d'abscisse).

j : indice qui varie en fonction du pas de temps (axe de coordonnée).

* : Prédiction valeur.

0 : se rapporte à la condition initiale.

b) **Schéma de LAMBDA**

Le schéma de LAMBDA transforme les axes de perturbations afin d'utiliser les différences finies durant les parties prédiction et de correction.

On a les équations qui régissent le phénomène du coup de bélier :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g \cdot S} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV} - 19)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g \cdot S \frac{\partial H}{\partial x} + R|Q| \cdot Q = 0 \quad (\text{IV} - 20)$$

Multipliant l'équation (IV-20) par un nombre η et en l'additionnant avec l'équation (IV-19), on obtient :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \eta \cdot g \cdot S \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \eta \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{a^2}{\eta \cdot S \cdot g} \frac{\partial Q}{\partial x} + R \cdot |Q| \cdot Q \right) \quad (\text{IV} - 21)$$

Posons :

$$\eta \cdot g \cdot S = \frac{dx}{dt} = \frac{a^2}{\eta \cdot g \cdot S} \quad (\text{IV-22})$$

Donc :

$$\eta = \pm \frac{a}{g \cdot S}$$

Se sont les directions des caractéristiques

$$\text{Posons : } \lambda = \frac{dx}{dt}$$

$$\lambda^+ = \frac{dx}{dt} = a \quad \text{caractéristique positive}$$

$$\lambda^- = \frac{dx}{dt} = -a \quad \text{caractéristique positive}$$

Donc l'équation (IV-21) devient :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial H^+}{\partial x} \right) + \frac{a}{g \cdot S} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial Q^+}{\partial x} \right) + \frac{aR}{g \cdot S} \cdot Q \cdot |Q| = 0 \quad (\text{IV} - 23)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial H^-}{\partial x} \right) - \frac{a}{g \cdot S} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial Q^-}{\partial x} \right) - \frac{aR}{g \cdot S} \cdot Q \cdot |Q| = 0 \quad (\text{IV} - 24)$$

Soustrait l'équation (IV-24) de l'équation (IV-23) et en multipliant par $\frac{g.S}{a}$ nous obtenons :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{g.S}{a} \left(\lambda^+ \frac{\partial H^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial H^-}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\lambda^+ \frac{\partial Q^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial Q^-}{\partial x} \right) + R.Q. |Q| = 0 \quad (IV-25)$$

En additionnant l'équation (IV-23) et (IV-24) nous trouvons :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\lambda^+ \frac{\partial H^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial H^-}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{a}{g.S} \left(\lambda^+ \frac{\partial Q^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial Q^-}{\partial x} \right) = 0 \quad (IV-26)$$

Dans ce schéma les dérivées partielles sont remplacées par les approximations de différences finies.

■ Algorithme du schéma de LAMBDA

➔ Partie prédicteur

$$f_x^+ = \frac{2.f_i^j - 3.f_{i-1}^j + f_{i-2}^j}{\Delta x} \quad (IV-27)$$

$$f_x^- = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \quad (IV-28)$$

Avec $f=H, Q$

$$H_i^* = H_i^j - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{a}{g.S} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right\} \quad (IV-29)$$

$$Q_i^* = Q_i^j - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \frac{g.S}{a} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R|Q_i^j|. Q_i^j \right\} \quad (IV-30)$$

➔ Partie correcteur

$$f_x^+ = \frac{f_i^* - f_{i-1}^*}{\Delta x} \quad (IV-31)$$

$$f_x^- = \frac{-2.f_i^* + 3.f_{i+1}^* - f_{i+2}^*}{\Delta x} \quad (IV-32)$$

$$H_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[H_i^j + H_i^* - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{a}{g.S} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right\} \right] \quad (IV-33)$$

$$Q_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[Q_i^j + Q_i^* - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \frac{g.S}{a} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R|Q_i^*|. Q_i^* \right\} \right] \quad (IV-34)$$

c) Schéma de GABUTTI

Ce schéma est similaire au schéma de LAMBDA.

■ Algorithme du schéma de GABUTTI

➔ Partie prédicteur

-Première étape

$$f_x^+ = \frac{f_i^j - f_{i-1}^j}{\Delta x} \quad (IV-35)$$

$$f_x^- = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \quad (IV-36)$$

Avec f=H, Q

$$\overline{H}_i = H_i^j - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{a}{g.S} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right\} \quad (IV-37)$$

$$\overline{Q}_i = Q_i^j - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \frac{g.S}{a} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R |Q_i^j| \cdot Q_i^j \right\} \quad (IV-38)$$

-Deuxième étape

$$f_x^+ = \frac{2.f_i^j - 3.f_{i+1}^j + f_{i+2}^j}{\Delta x} \quad (IV-39)$$

$$f_x^- = \frac{-2.f_i^j + 3.f_{i+1}^j - f_{i+2}^j}{\Delta x} \quad (IV-40)$$

Avec f=H, Q

Et on détermine Q_i^* et H_i^* qui sont les mêmes que dans les schémas de LAMBDA.

➔ Partie correcteur

$$\overline{f}_x^+ = \frac{\overline{f}_i - \overline{f}_{i-1}}{\Delta x} \quad (IV-41)$$

$$\overline{f}_x^- = \frac{\overline{f}_{i+1} - \overline{f}_i}{\Delta x} \quad (IV-42)$$

Après on détermine d'après les équations (IV-25) et (IV-26), $\overline{\overline{H}}_i$ et $\overline{\overline{Q}}_i$

Enfin, H_i^{j+1} et Q_i^{j+1} sont données par :

$$\overline{H}(i, j + 1) = -(0.5 * a * (\overline{h}^+(i, j) - \overline{h}^-(i, j))) + 0.5 * \frac{a^2}{g*s} (\overline{Q}^+(i, j) + \overline{Q}^-(i, j)) \quad (IV-43)$$

$$\overline{Q}(i, j + 1) = -(0.5gs (\overline{h}^+(i, j) + \overline{h}^-(i, j))) + 0.5 \frac{a^2}{gs} (\overline{Q}^+(i, j) - \overline{Q}^-(i, j)) + RQ(i, j) |Q(i, j)| \quad (IV-44)$$

IV.4.4 Stabilité

Ces schémas qui appartiennent aux schémas du type prédicteur-correcteur sont stables sous les conditions du nombre de courant-Friedricks Levy (C.F.L).

Pour les schémas explicites, les conditions de stabilité s'énoncent de la façon suivante :

Le pas de temps doit être tel qu'une onde se propage à la vitesse ' a ', ne parcourt pas plus d'un pas d'espace en un pas de temps.

Cette condition se traduit par :

$$\Delta t \leq \frac{c_n \cdot \Delta x}{\max(|u| + a)}$$

Et comme $u \ll a$ la condition devient :

$$\Delta t \leq \frac{c_n \cdot \Delta x}{a}$$

- ✓ Si $c_n \leq 1$ les schémas de Maccormack, GABUTTI et celui des caractéristiques sont stables.
- ✓ Si $c_n < 1$ le schéma de LAMBDA est stable.

IV.4.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont des équations complémentaires et nécessaires. Chaque fois que les caractéristiques de l'écoulement se varient brusquement en un point donné de la conduite. Ce phénomène se produit au niveau d'un réservoir, d'une vanne, d'un clapet, d'un point de connexion de deux conduites, et encore au niveau des pompes et des turbines hydrauliques.

a) Avantages

Un des avantages des conditions aux limites : est de simplifier les équations du mouvement généralement difficiles à résoudre. Donc elles sont nécessaires aux problèmes numériques, surtout pour les équations différentielles et aux dérivées partielles. Les conditions aux limites généralement rencontrées en hydraulique, et qui permettront de résoudre des problèmes liés contenant ensemble, on citera entre autre :

Les conditions aux limites au niveau :

-d'un réservoir.

-d'une vanne.

b) Conditions aux limites au niveau d'un réservoir

On supposera tout d'abord que le réservoir est de grande dimension afin de négliger la variation du niveau du plan d'eau dans celui-ci pendant le temps c'est adire :

$$\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{x=0} = 0$$

C'est-à-dire la charge est constante au premier point de la conduite, dans le temps

$$H(1, t) = h_0 \text{ quelque soit } t \geq 0$$

c) Conditions aux limites au niveau d'une vanne

Fermeture brusque : La fermeture est dite brusque lorsqu'au temps ($t=2.L/a$) la vanne est complètement fermée. Cela signifie que le débit est nul pendant le temps :

$$q(n+1, t)=0 \text{ quelque soit } t \geq 0$$

Pour $t=0$, la fermeture est instantanée.

Fermeture lente Une fermeture est dite lente, si la fermeture totale de la vanne a lieu au delà du temps caractéristique ($2.L/a$).

Le débit ne serait plus brusquement interrompu, mais variera suivant une loi de fermeture bien précise que l'on pourra exprimer par :

$$Q(n+1, t) = f(t) \cdot Q_0 \quad \text{si } t \leq t_f \quad \text{(IV-45)}$$

$$Q(n+1, t) = 0 \quad \text{si } t \geq t_f \quad \text{(IV-46)}$$

d) Conditions aux limites pour les Schémas explicites

Pour les schémas explicites dans notre étude, les équations sont appliquées à l'intérieur du domaine de discrétisation, figure (IV-3).

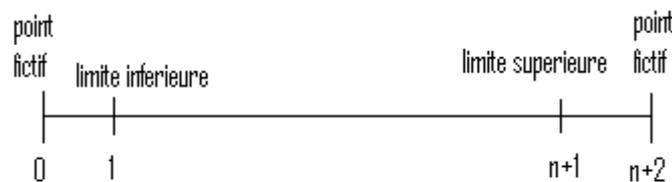


Figure (IV-3) : discrétisation du domaine pour les schémas explicites

Les conditions aux limites sont déterminées, soit en utilisant la méthode des caractéristiques, soit en utilisant l'extrapolation.

✓ Conditions aux limites en utilisant la méthode des caractéristiques

Au niveau du réservoir H (1, t)=h₀ la charge est constante, on détermine le débit en point i=1 à l'instant t :

$$q(1, t) = (h(1, t) - h(2, t - dt)) * g \cdot \frac{S}{a} + q(2, t - dt) \cdot (1 - |q(2, t - dt)| \cdot r \cdot g \cdot S/a) \quad (IV-47)$$

Pour le point i=n+1 on sait la valeur de q (n+1, t) et on détermine la charge en ce point, à l'instant t :

$$H(n + 1, t) = h(n, t) + q(n, t - dt) \left(\frac{a}{gS} - |q(n, t - dt)| \cdot t \right) - q(n + 1, t) \cdot \frac{a}{gS} \quad (IV-48)$$

Avec : $t=r \cdot dx/g/S$.

Où : r : est la résistance de la conduite.

dx : est le pas de longueur de la conduite.

✓ En utilisant l'extrapolation

La procédure d'extrapolation est donnée par la formule :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Dans la première alternance du schéma de Maccormack, nous ne pouvons pas calculer H et q en i=n+1 dans l'étape de prédiction, et en point i=1 dans l'étape de correction, donc nous avons besoin aux points fictifs i=0 et i=n+2.

Les conditions aux limites dans ces points sont déterminées en appliquant la procédure précédente qui nous donne :

$$\left. \begin{array}{l} f_{n+2}^j = 2 \cdot f_{n+1}^j - f_n^j \\ f_0^j = 2 \cdot f_1^j - f_2^j \end{array} \right| f = h, q \quad (IV-49)$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu les différentes méthodes de résolution des équations de SAINT-VENANT, parmi ces méthodes la méthode des caractéristiques et la méthode des différences finies qui font l'objet de notre étude.

Introduction

Les équipements de protection ont pour fonction générale d'atténuer les variations de la pression et de réduire les effets néfastes de celle-ci. En d'autres termes, il ne suffit pas de penser uniquement à réduire l'amplitude des surpressions et dépressions mais aussi dans certains cas empêcher la cavitation de se produire. Compte tenu de la grande variété des installations hydrauliques et de leurs modes d'opération, il n'est pas possible de considérer un équipement de protection universel et polyvalent. On décrira donc ce qui suit, une panoplie d'équipement avec leurs caractéristiques propre et leurs contextes d'utilisation.

V.1 Volant d'inertie

Le volant d'inertie est une roue de masse assez importante, fixée à l'arbre du groupe moteur pompe. Il permet, lors d'une coupure d'alimentation d'allonger le temps de fermeture en dissipant l'énergie cinétique de rotation accumulée. Par contre, son utilisation demande un volume d'encombrement suffisant et les départs de pompes ne pourront être rapides.

En outre, plus le volant est lourd plus le moteur doit être puissant pour vaincre son inertie de démarrage. Il est souvent utilisé que pour des canalisations dont la longueur n'excède pas quelques centaines de mètres.

Encore, comme le volant n'intervient que dans la protection contre les dépressions, ce dispositif doit éventuellement être complété par une installation contre les surpressions. Par exemple une soupape de décharge.

Le principe de calcul est basé sur la quantité d'énergie cinétique de rotation accumulée par le volant :

$$E_C = \frac{1}{2} I w^2 \quad (V-1)$$

Avec :

I : Le moment d'inertie.

w : La vitesse angulaire.

Ces variables sont calculés par :

$$I = mK^2 \quad \text{et} \quad w = \frac{2\pi n}{60}$$

K : Le rayon de giration.

n : Le nombre de tours par minute.

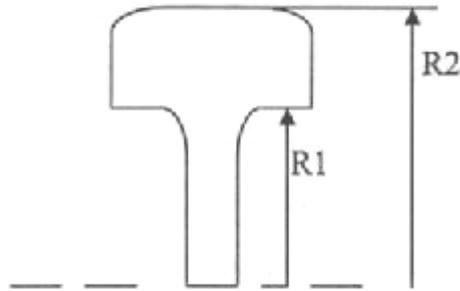


Figure V.1 : Coup type du volant d'inertie

Le rayon de giration est donné par :

$$K^2 = \frac{R^2_1 + R^2_2}{2}$$

Sachant que le taux de variation de l'énergie cinétique est égal au travail des forces appliquées :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = T \omega \quad (V-2)$$

Où le couple T est défini par :

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{100 \cdot g \cdot Q_0 \cdot H_0}{\omega \eta} \quad (V-3)$$

Avec P la puissance hydraulique fonction de Q_0 et H_0 le débit et la charge en régime permanent, et η le rendement.

En discrétisant, par différence finie, on peut écrire qu'une variation de vitesse angulaire est proportionnelle à un pas de temps.

$$\Delta \omega = \frac{T}{I} \Delta t \quad (V-4)$$

Cette relation permettra au modèle de déterminer le pas de temps après l'évolution de la vitesse de rotation en fonction de la variation des paramètres hydrauliques.

Dans la pratique, les points suivants doivent être considérés :

a) plus la conduite est longue plus l'inertie du système est grande et plus la masse du volant devra être importante.

On limite les longueurs à quelques centaines de mètres.

b) le démarrage des moteurs électriques couplés à des volants de masse importante peut demander des intensités de courant inadmissible.

c) le volant ne limite que la dépression, une protection contre les surpressions peut aussi être nécessaire.

V.2 Soupape de décharge

Les soupapes de décharges sont des équipements mécaniques qui s'ouvrent pour réduire la surpression à une valeur acceptable.

Ces dispositifs sont généralement constitués d'une soupape maintenue par un ressort dont la pression est ajustée à une valeur légèrement supérieure de (5%) à la pression maximale d'opération.

L'ouverture de la soupape laisse passer un débit qui doit être évacué vers l'extérieur.

Ce type de soupape peut être activé par des capteurs de pression situés dans un endroit différent de celui de la soupape. De cette façon, le déclenchement de l'ouverture peut se faire par anticipation. Ce dispositif est utilisé généralement dans les petites installations. Dans une station de pompage, cette décharge est montée sur une conduite placée en dérivation sur la conduite de refoulement des pompes, en aval de ces dernières.

V.3 By-pass

Un by-pass est une conduite équipée d'un clapet dans le sens amont-aval qui court-circuite une pompe.

Quand la dépression résultante du coup de bélier conduit à des pressions inférieures au niveau du bassin d'aspiration c'est-à-dire, quand la hauteur d'élévation est inférieure à $\frac{aU_0}{g}$, on peut réduire la dépression en établissant un « by-pass » entre l'aspiration et le refoulement.

Le by-pass, fonctionnant après l'arrêt de la pompe, entraîne une perte de charge localisée Δh .

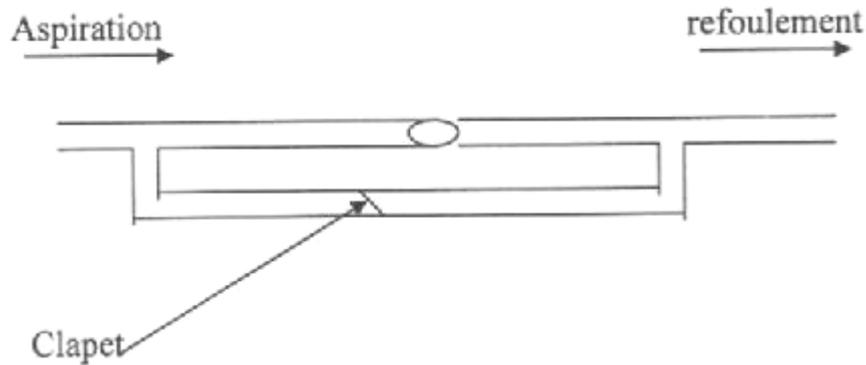


Figure V.2 : Schéma d'une dérivation.

V.4 Cheminée d'équilibre

Lorsque les conditions topographiques et les hauteurs géométriques le permettent, il peut être envisagé d'introduire une cheminée d'équilibre, constituée par un réservoir en contact avec la surface libre. Ce dispositif permet de réduire les effets du coup de bélier. Cependant un autre phénomène d'oscillation en masse d'une nature complètement différente apparaît entre la cheminée et le réservoir. Il est toutefois à noter que ce dispositif anti-bélier est plutôt réservé pour les transferts d'eau brute et les forts débits.

V.4.1 Types de cheminée

De point de vue construction, on a plusieurs types de cheminée :

a) Cheminée à l'étranglement

Un étranglement à la base de la cheminée produit des pertes de charge importantes qui contribuent à :

- la réduction de l'amplitude des oscillations et par conséquent la hauteur atteinte par l'eau dans la cheminée.
- l'amortissement des oscillations qui s'ajoute à celui créé par les pertes de charge dans la galerie d'amenée.

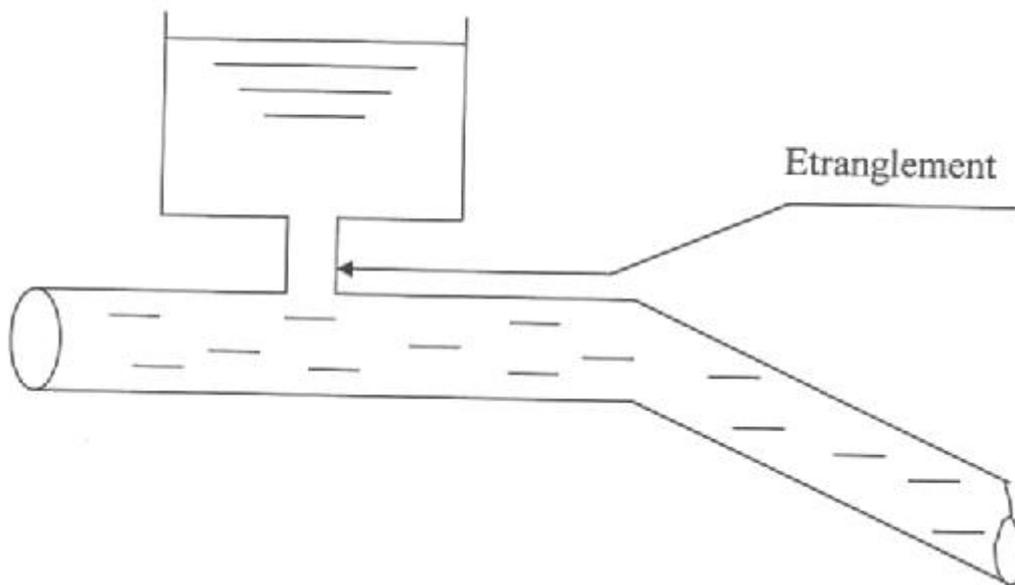


Figure V.3 : cheminée à étranglement

b) Cheminée à épanouissement

Il est possible de réduire le volume total de l'excavation en donnant à la cheminée une forme évasée vers le haut.

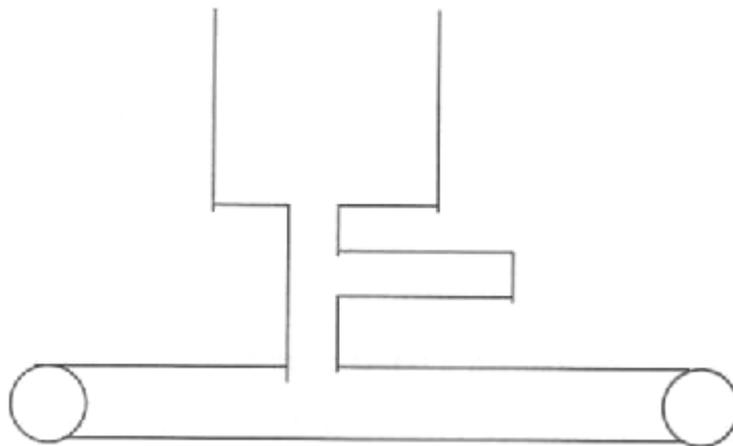


Figure V.4 : cheminée à épanouissement.

c) Cheminée différentielle

Elle comporte deux chambres C_1 et C_2 de sections différentielles S_1 et S_2 alimentées en dérivation sur la galerie d'amenée.

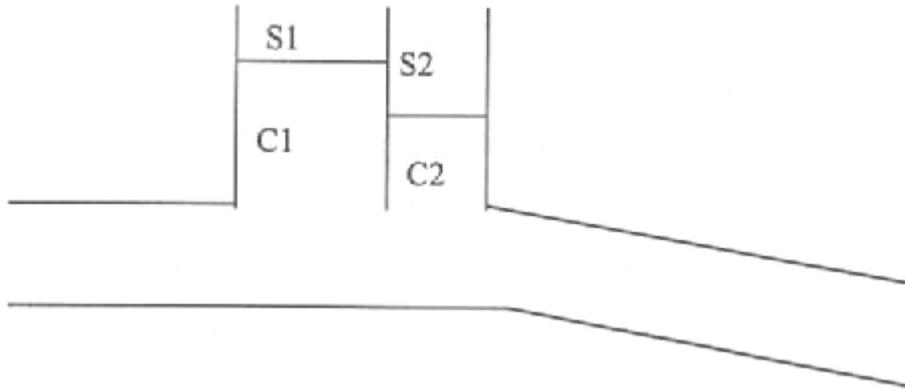


Figure V.5 : cheminée différentielle.

V.5 Réservoir d'air

Le réservoir d'air est un réservoir dans lequel le volume d'eau est équilibré par la pression de fonctionnement en régime permanent. Cette réserve d'eau permet de réduire les dépressions en fournissant une quantité d'eau demandée par la dépression sous forme d'un débit contrôlé par un orifice, une tuyère ou un clapet percé.

Ce dispositif est généralement utilisé pour les conditions de refoulement de plus de 1000 m de longueur.

Le principe de fonctionnement est le même que pour les cheminées d'équilibre.

La différence provient de ce que cette réserve n'a pas une surface libre à la pression atmosphérique mais se trouve à la pression absolue du fluide à l'endroit où est piqué le ballon. C'est le volume d'air enfermé dans le ballon qui régularise les variations de pression du liquide en se comprimant ou en se détendant au gré des besoins.

V.5.1 Description technologique

Au point de vue technologique, on peut distinguer deux grands types de ballons

a) Les ballons à membrane ou à vessie

L'air et l'eau n'y sont pas en contact ce qui évite la dissolution de l'air de façon dans l'eau on n'a donc pas le problème de rétablir de façon périodique le volume d'air nécessaire au bon fonctionnement du ballon. Ces ballons doivent être pré gonflés à la pression de pré gonflage désirée.

De point de vue sécuritaire, le liquide n'est pas en contact avec la paroi métallique du vase. Le risque de corrosion est donc supprimé. Le tube de niveau permet de contrôler à tout moment le volume de liquide contenu dans la vessie.

b) Les ballons sans membrane

Les inconvénients proviennent du contact air eau : L'air se dissolvant dans l'eau, il est nécessaire d'avoir en permanence un compresseur qui rétablit périodiquement et automatiquement le volume d'air dans le ballon cette complication pose alors le problème de fuites, soit fuite d'air lorsque l'alimentation d'air arrive par le dessus du ballon soit fuite d'eau dans le compresseur lorsque cette alimentation se fait par le cas du ballon.

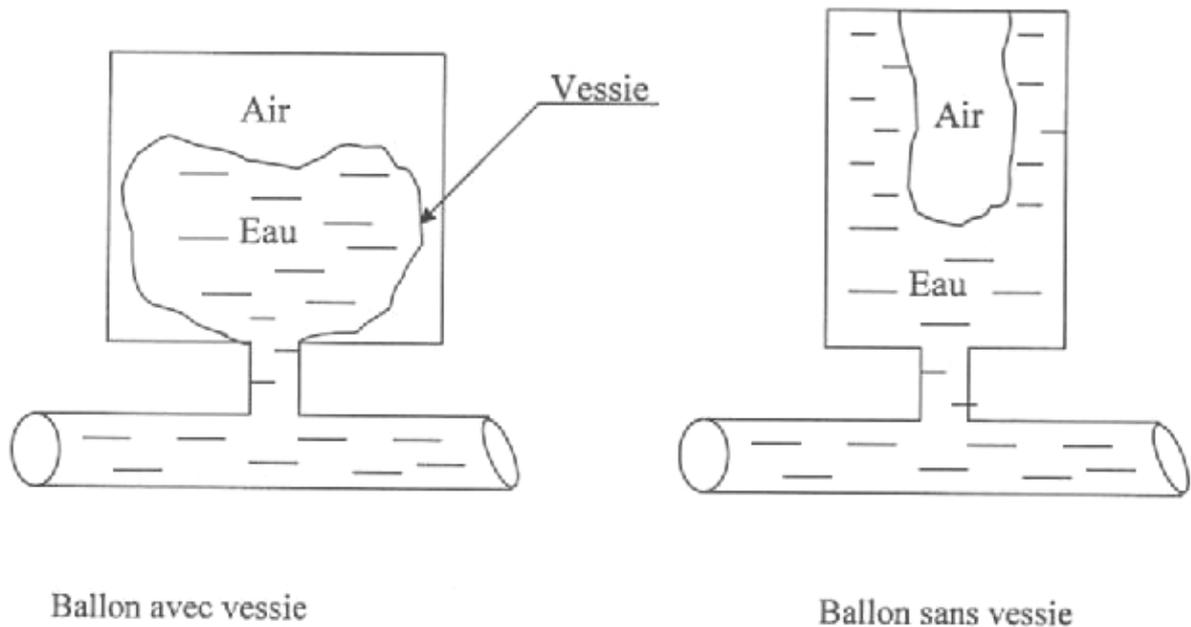


Figure V.6 : schémas de principe des ballons anti-bélier

Pour amortir la suite des oscillations, plusieurs possibilités existent pour créer cette perte de charge, en effet on doit avoir pour la vidange une perte de charge aussi faible que possible et, par contre, on désire que cette perte de charge ne soit pas négligeable lors du remplissage.

Donc pour créer cette perte de charge on peut disposer une tuyère, ou bien un clapet percé qui se ferme au remplissage, ou bien un clapet plein avec un petit tuyau de dérivation.

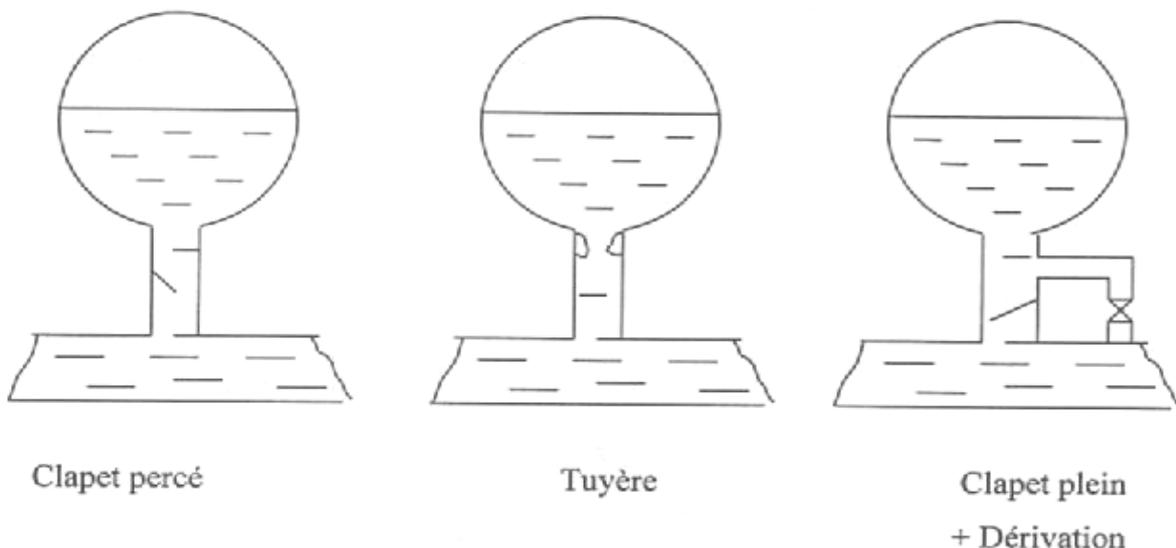


Figure V.7 : organes dissymétriques à la base des ballons anti-bélier

V.5.2 dimensionnement

Pour le dimensionnement il existe de nombreuses méthodes qui permettent de calculer le volume d'un ballon anti-bélier.

Meunier et PUECH ont recensé les méthodes de SLIOSBERG, de VIBERT, de GAULHET de COMBES et BOROT, de DUBIN et GUENEAU et enfin de PARAMAKIAN.

V.5.3 Oscillation en masse dans le tronçon cheminée-réservoir

Equations fondamentales

Bien que les effets du coup du bélier (onde élastique) soient éliminés, ou tout au moins réduits, par la cheminée, un autre phénomène d'oscillation en masse, d'une nature complètement différent, apparaît entre la cheminée et le réservoir

Ce phénomène d'oscillation en masse est un phénomène distinct de la propagation des ondes élastiques : tandis que celles-ci résultent de la compressibilité de l'eau, l'oscillation en masse, résulte de gravité.

Considérons donc le cas simple illustré à la (figure V.8) : une conduite horizontale qui achemine un liquide vers un réservoir. En négligeant l'inertie de pompe on peut examiner l'effet d'une panne du courant en considérant que le débit de la pompe passe instantanément de Q_0 à 0 au temps $t=0$. Un clapet a été prévu pour empêcher la renverse de débit dans la pompe.

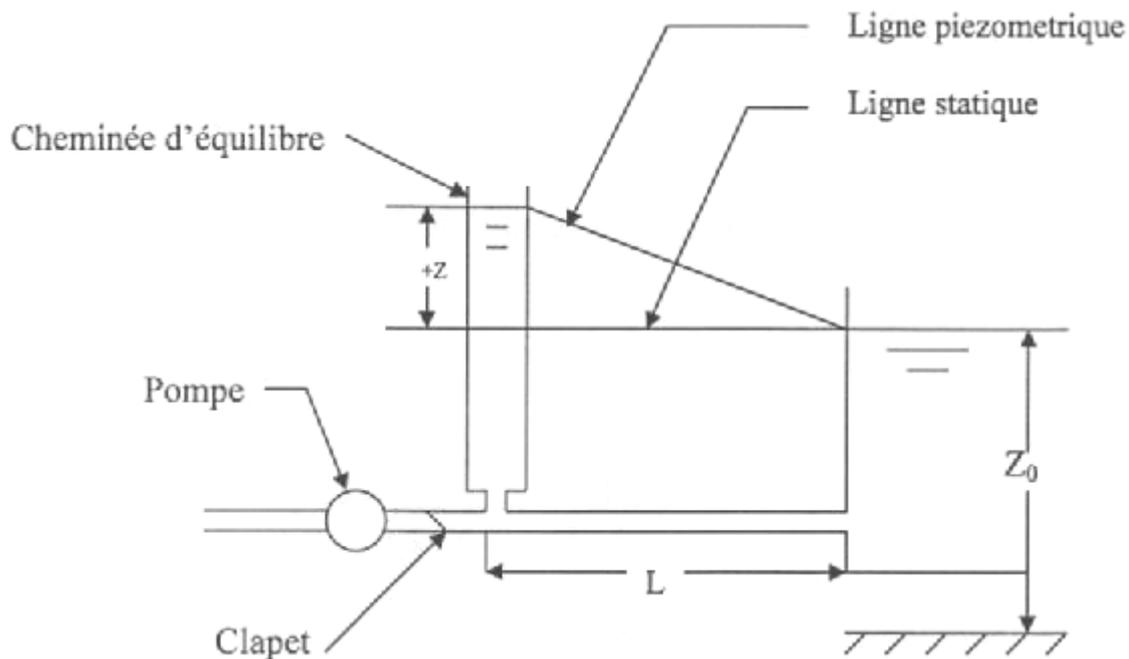


Figure V.8 : schéma d'un système simple avec une cheminée d'équilibre.

Par rapport à l'échelle du temps des oscillations du niveau d'eau du réservoir, l'aller-retour d'une onde de pression dans le réseau est quasi instantanée. On peut donc considérer qu'une perturbation des conditions d'écoulement n'importe où dans le réseau est ressentie instantanément dans l'ensemble de l'installation et que tout le liquide se déplace monolithiquement. De plus, si on accepte que l'inertie de liquide dans le réservoir soit

négligeable vis-à-vis de celle du liquide dans la conduite, alors on peut écrire les équations suivantes :

Equation de continuité

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_C}{S_{CE}} \quad (V-5)$$

Equation de conservation de la masse

$$\frac{dQ_C}{dt} = \frac{gS_C}{L} (-z - k|Q_C|Q_C) \quad (V-6)$$

Où K est un coefficient qui regroupe les pertes de charges dues au frottement et à l'orifice. Si on néglige ces deux effets, alors on peut intégrer les équations (V-5) et (V-6) analytiquement.

En posant comme conditions initiales à $t=0$ que $z=0$ et $\frac{dz}{dt} = \frac{Q_0}{A_{Ce}}$, on trouve alors que :

$$z = Q_0 \sqrt{\frac{L}{gS_{Ce}S_C}} \sin \sqrt{\frac{gS_C}{LS_{Ce}}} t \quad (V-7)$$

On voit que l'amplitude des oscillations de masse, le premier terme du membre de droite de l'équation (V-7) est fonction du débit initial, de la longueur et de l'aire de la cheminée d'équilibre. La fréquence angulaire de ces oscillations (le terme qui multiplie t dans (V-7)), est fonction de l'aire et de la longueur de la conduite de la cheminée.

Evidemment, on pourrait être porté à douter de ces résultats dans la mesure où plusieurs hypothèses ont été posées pour les obtenir.

V.6 Vanne à fermeture lente

Cette solution ne permet de protéger que les adductions gravitaires, car elle ne remédie en aucun cas à l'arrêt intempestif d'une pompe. Il s'agit en fait davantage de limiter l'intensité du coup de bélier qui se produira, que d'y apporter remède. [17]

Dans l'estimation du temps de fermeture de la vanne, il faut prendre garde que la formule de Michaud suppose que le débit varie linéairement en fonction du temps.

La formule de Michaud est donnée ci après :

$$\Delta H = \frac{2.L.U_0}{g.T} \quad (V-8)$$

Avec :

ΔH : Surpression en hauteur d'eau.

L : longueur de la conduite.

T : temps de fermeture de la vanne.

U_0 : est la vitesse dans la conduite avant la fermeture.

Si la fermeture de la vanne ne réalise pas cette loi linéaire de débit, on observera à certains instants de la manœuvre une surpression supérieure à celle donnée par la formule. En particulier, il faut tenir compte du fait qu'une variation de section linéaire en fonction du temps ne produit pas une variation linéaire du débit, et que pour des vannes de section circulaire elle n'est elle même engendrée que par une loi de mouvement de l'opercule (ou du papillon) très particulière. Dans la pratique, l'impossibilité de réaliser une fermeture linéaire en fonction du temps conduit à adapter un temps total de fermeture sensiblement supérieur à celui que donne la formule de Michaud.

Symboles

T : Le temps.

Q : Le débit.

Z : Elévation.

S : Aire.

g : La gravité.

L : La longueur de la conduite à protéger.

Indice

C: Se rapporte à une conduite.

Ce: Se rapporte à une cheminée d'équilibre.

0:Se rapporte aux conditions initiales.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu des systèmes de protection et leurs méthodes de calcul, qui va permettre à l'ingénieur concepteur le choix d'appareil anti-bélier nécessaire pour limiter la dépression et la surpression qui apparaissent suite au coup de bélier.

Introduction

Le but de ce chapitre est de mettre en application numérique la méthode des caractéristiques et la méthode des différences finies explicites (schéma de McCormack, de LAMBDA et de GABUTTI), dont un programme sera élaboré pour suivre l'évolution du coup de bélier dans le temps et dans l'espace, dans une conduite en adduction gravitaire.

VI.1 Traitement d'un problème à l'aide de l'ordinateur

Pour faire le traitement de n'importe quel type de problème à l'aide de l'ordinateur, il faut suivre les étapes suivantes : [17]

- Identification des lois fondamentales impliquées dans la définition du problème.
- Modélisation : celle-ci peut consister en l'utilisation (synthèse) des lois identifiées pour décrire le problème par un ensemble d'équations mathématiques.
- Méthode numérique : la plupart des problèmes sont exprimés en termes qu'un ordinateur ne peut accepter directement (intégrales, équations différentielles partielles, opérateurs mathématiques, etc...). Il faut trouver donc une méthode traduisant ces fonctions en fonctions arithmétiques.
- Organigramme : on fait apparaître sur un schéma synoptique l'enchaînement des différentes phases de travail arithmétique à effectuer, correspondant à la méthode choisie.
- Programmation : c'est la traduction de l'organigramme en une suite d'instructions détaillées dans un langage acceptable par l'ordinateur (généralement évolué).
- Mise au point du programme : c'est l'étape d'édition (correction syntaxique et d'essai-erreur correction logique permettant de détecter les erreurs de codage (programmation) ou de logique (organigramme)).
- Exécution et interprétation des résultats : lorsque le programme est correct, on le fait exécuter avec les données de notre problème puis se pose les questions suivantes :
 - Le résultat fourni par l'ordinateur contient-il des erreurs significatives ? (si oui, reprendre l'étape 3).
 - Le modèle mathématique est-il une représentation adéquate du processus réel ? (si non, reprendre l'étape 2).

VI.2 Structure d'un programme

La résolution de n'importe quel problème se ramène à l'écriture d'un certain programme informatique dans un langage spécifique.

La préparation de ce programme se fait toujours en deux étapes complémentaires. On s'appuie dans notre étude sur des représentations graphiques : les organigrammes.

Dans la seconde étape on réalise le codage de l'organigramme dans un langage de programmation (pour nous, ce sera le Fortran).

Une fois le codage réalisé, le programme sera chargé dans la mémoire de l'ordinateur, il sera compilé puis exécuté.

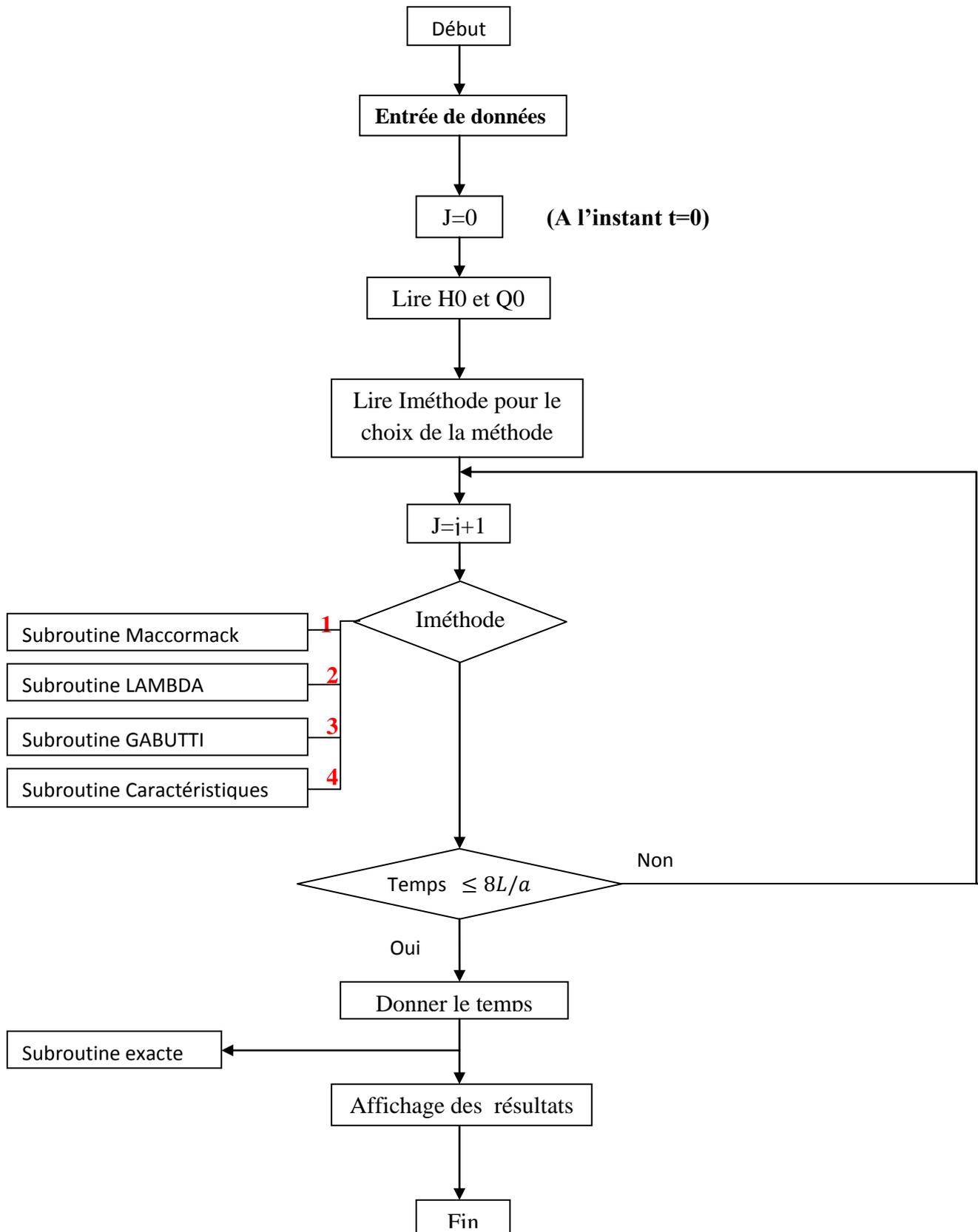
Le langage Fortran a des avantages à savoir :

- Indication d'erreurs.
- Possibilité d'utiliser des modèles graphiques.
- La compilation et le linkage sont très rapides.

Le but recherché par ce programme est de calculer les conditions du régime transitoire après la transformation des modèles mathématiques à des modèles numériques, la solution sera traduite en graphes pour obtenir l'enveloppe de pression.

VI.3 Organigramme

La figure (VI-1) expose l'organigramme du programme:



La figure (VI-1) : l'organigramme du programme.

VI.4 Validation du programme

On propose d'étudier la surpression dans une conduite gravitaire résultant de la fermeture instantanée d'une vanne qui se trouve à l'extrémité avale de la conduite, alimentée par un réservoir à cote constante, en comparant en même temps les résultats trouvés avec ceux de la solution analytique.

Exemple d'application

Les caractéristiques de la conduite et d'écoulement sont :

La section : $s=1\text{m}^2$

La célérité : $a=1000\text{m/s}$

La longueur : $L=5000\text{m}$

La charge : $H=400\text{m}$

Débit initial : $Q=0.981\text{m}^3/\text{s}$

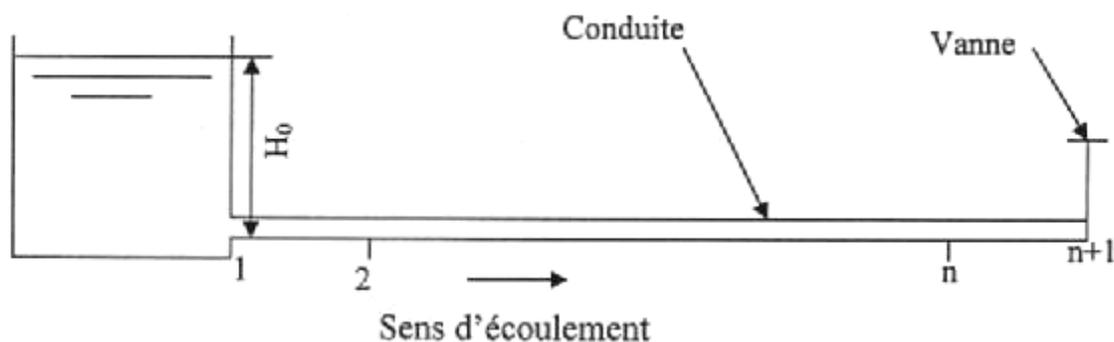


Figure (VI.2) : réservoir à niveau constant.

- La perte de charge est négligeable pour pouvoir comparer la solution numérique avec la solution exacte.
- On va étudier la variation de la pression à l'instant $t=1.25\text{s}$, 2.5s , 5s et pour différentes valeurs du nombre de courant (cn), pour voir son influence sur la stabilité des schémas.

Les résultats donnés par le programme sont représentés dans les figures suivantes :

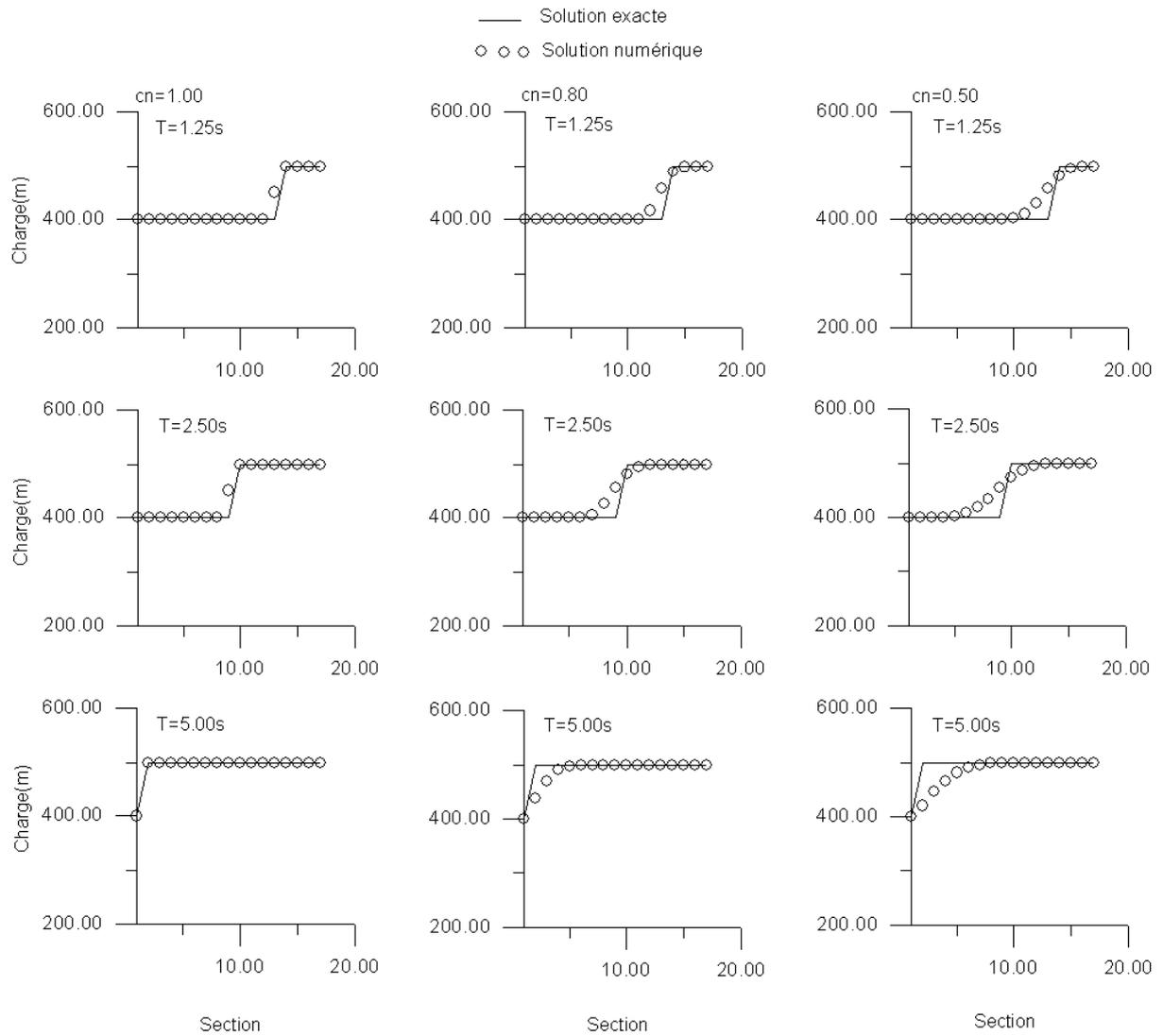


Figure (VI.3) : Méthode des caractéristiques, comparaison entre solution exacte et numérique.

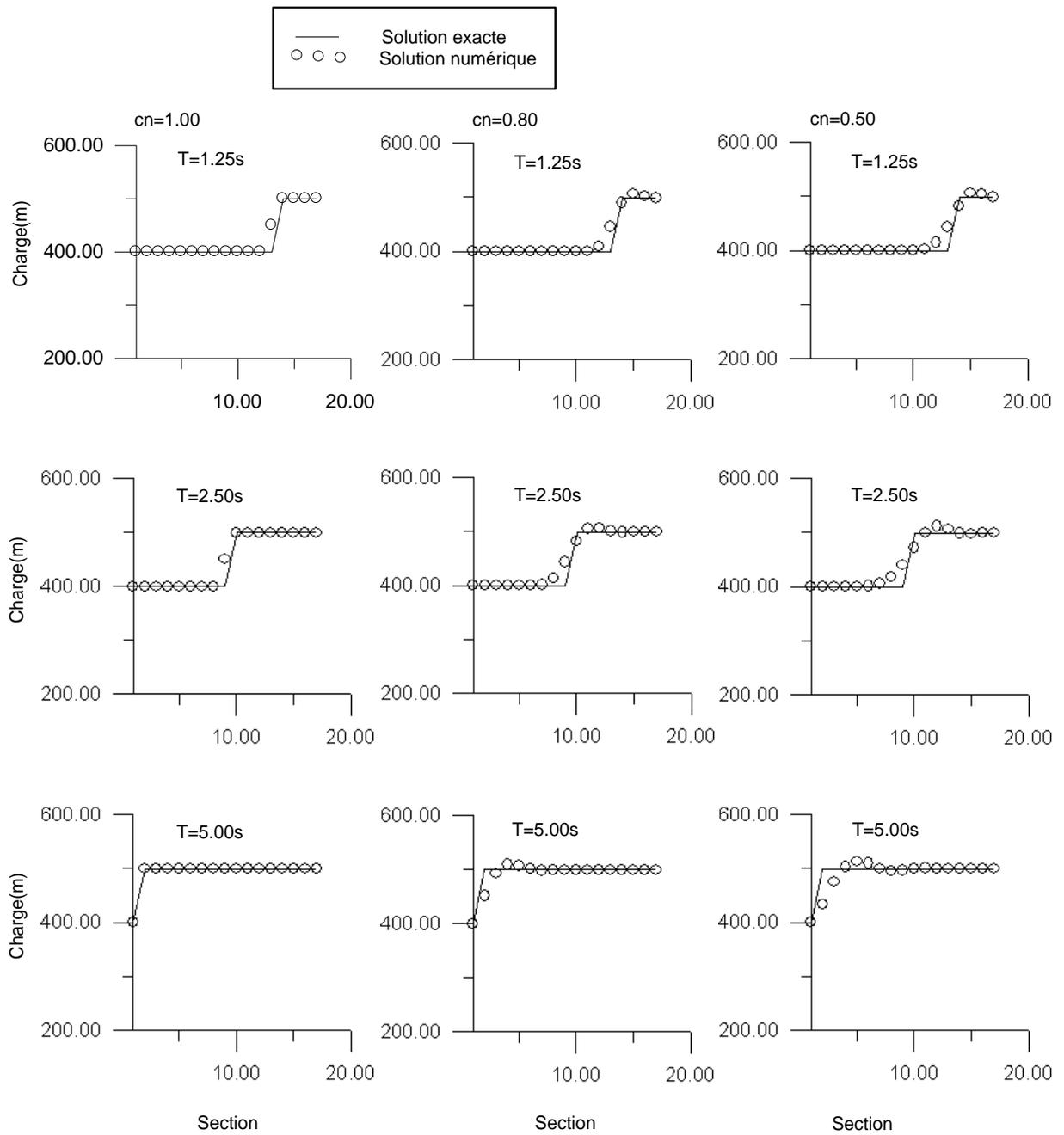


Figure (VI.4) : Méthode de Maccormack, comparaison entre solution exacte et numérique.

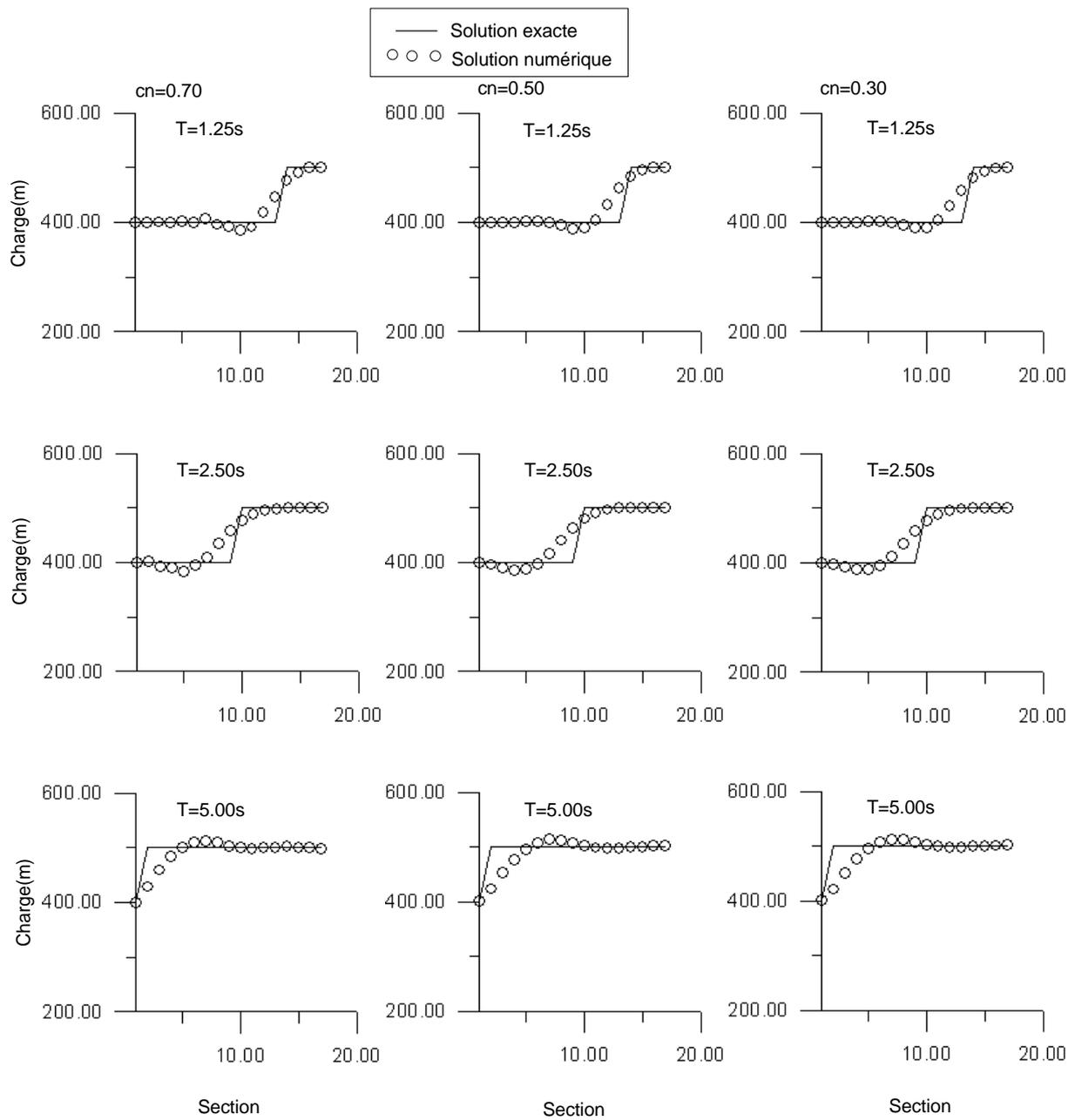


Figure (VI.5) : Méthode de LAMBDA, comparaison entre solution exacte et numérique.

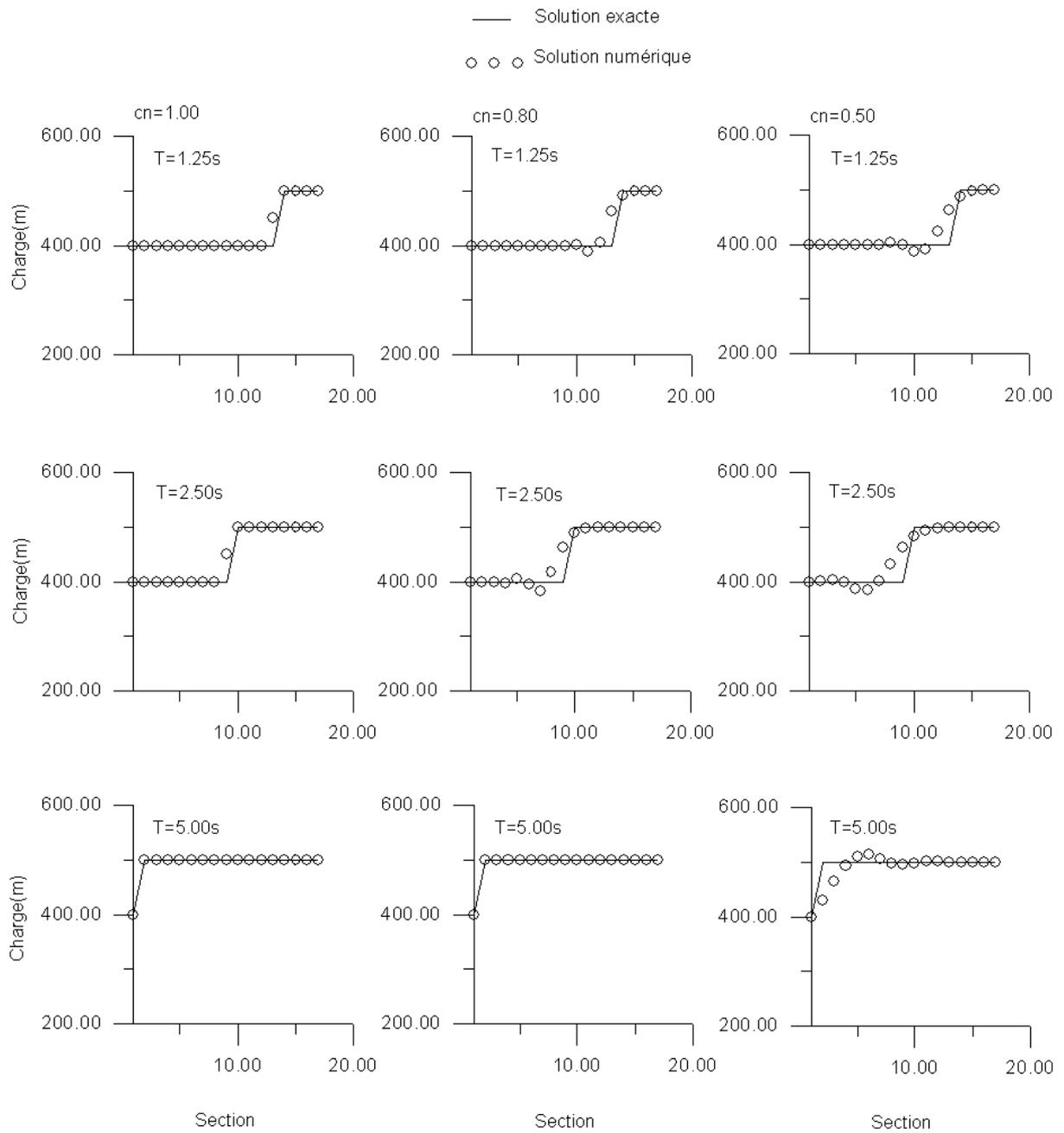


Figure (VI.6) : Méthode de GABUTTI, comparaison entre solution exacte et numérique.

VI.5 Interprétation des résultats

A l'instant $t=0$, la vanne est complètement fermée, il y a naissance d'une onde de surpression qui se propage de la vanne vers le réservoir avec une célérité d'onde 'a' qui est égale à 1000m/s et une amplitude qui égal à $(\frac{au_0}{g} = 100m)$.

VI.5.1 Influence du nombre de courant (cn)

Comme on a dit dans les chapitres précédents que cn influe sur la stabilité des schémas. Pour cela nous donnant des valeurs à cn, et on registre les surpressions produites.

Pour $cn=1$, les schémas de MACCORMACK, GABUTTI et celui de la méthode des caractéristique donnent des résultats plus ou moins exactes par rapport à la solution analytique, tandis que le schéma de LAMBDA n'est pas stable, si on diminue cn, c'est-à-dire que cn inférieur à 1, le schéma de LAMBDA tend à se stabiliser et donnera des valeurs plus ou moins acceptables comme dans le cas de $cn=0.5$, mais reste oscille autour de la solution exacte.

Le schéma de MACCORMACK, de GABUTTI et celui obtenue par la méthode des caractéristiques restent plus fiables, mais moins précis que pour $cn=1$, c'est-à-dire que l'erreur augmente en diminuant cn.

Les résultats obtenus sont récapitulé dans le tableau suivant.

Tableau (VI-1) : récapitulatif des résultats

Méthodes	Valeur du nombre de courant (cn)	
	Cn inférieur à 1	Cn inférieur ou égale à 1
Méthode des caractéristiques	Stable avec moins de précision	Stable avec une bonne précision
Méthode de Maccormack	Stable avec moins de précision	Stable avec une bonne précision
Méthode de GABUTTI	Stable avec moins de précision	Stable avec une bonne précision
Méthode de LAMBDA	Stable avec moins de précision	N'est pas stable pour $Cn=0,9$ et $Cn=1$

Dans ce qui suit, on va appliquer le schéma de Maccormack pour l'étude d'influence de quelques facteurs sur le coup de bélier.

VI.5.2 Influence des pertes de charges sur le coup de bélier

Les caractéristiques de la conduite et d'écoulement sont :

La section : $s=0,196\text{m}^2$

La célérité : $a=1118,03\text{m/s}$

La longueur : $L=5000\text{m}$

La charge : $H=400\text{m}$

Débit initial : $Q=0.081\text{m}^3$

La résistance de la conduite : $R=0,31$

Module d'élasticité : $E=2.10^{11}\text{Pa}$

Les résultats sont représentés dans la figure (VI.7).

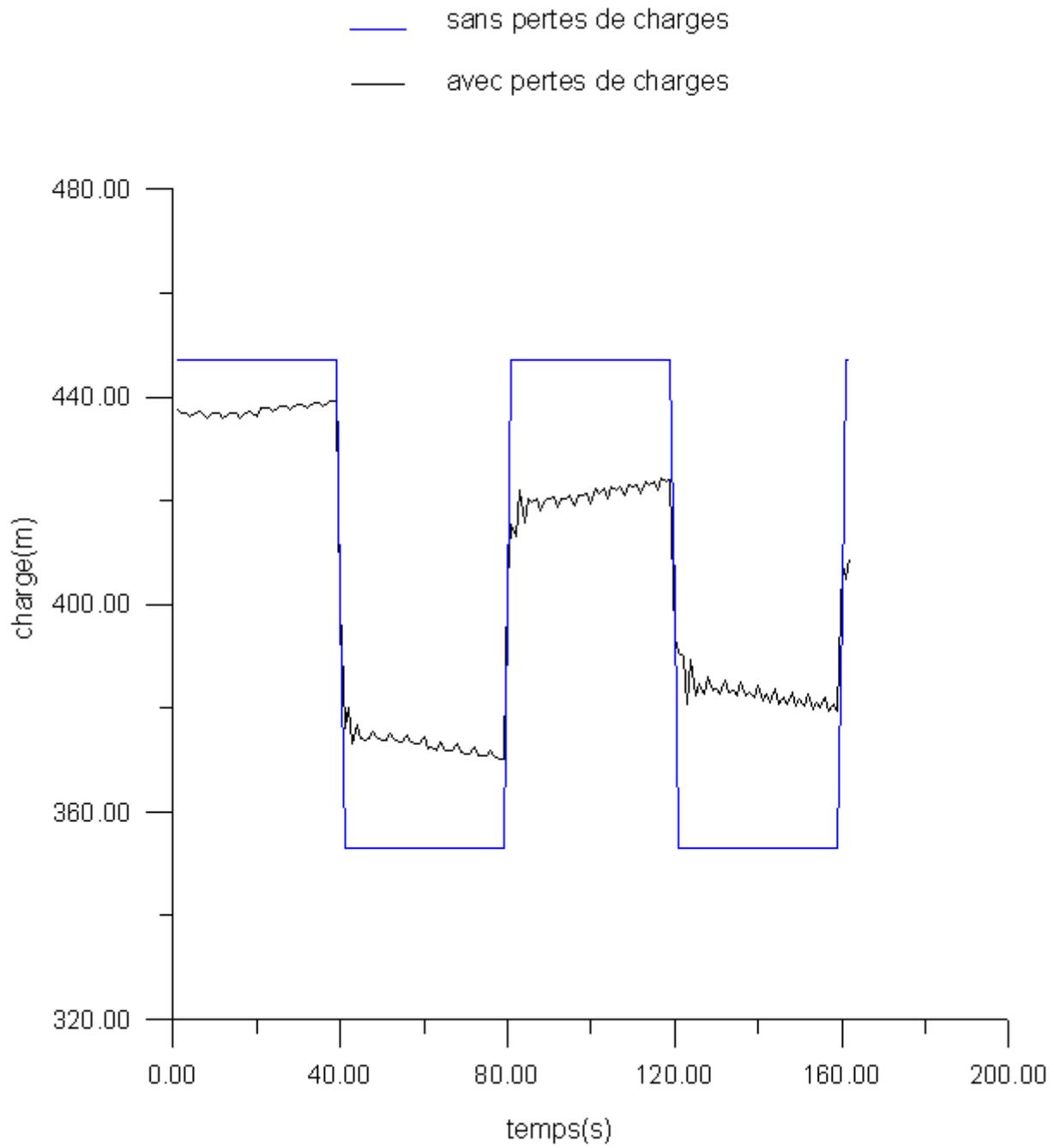
Cette figure (VI.7) montre la variation de la charge au niveau de la vanne en fonction de temps pour deux cas :

- Sans pertes de charge.
- Avec pertes de charge.

On constate à travers ces résultats que :

-La surpression et la dépression oscillent périodiquement autour de la charge statique, cette période égale à $8L/a$.

-Dans l'écoulement avec pertes de charges, les valeurs des surpressions et dépressions diminuant au cours de temps pour se stabiliser autour de la charge statique, se qui s'explique par l'amortissement due aux frottements, par conséquent on peut dire que les pertes de charges agissent dans le sens de la sécurité (protection de la conduite).



Figure(VI.7) : Influence de pertes de charge sur le coup de bélier

VI.5.3 Influence des matériaux sur le coup de bélier

Pour montrer l'influence du type de matériau sur le coup de bélier, on examine la variation de la charge pour trois types de matériaux (pvc, fonte, et l'acier) dont les caractéristiques géométriques sont identiques. On prend les mêmes données que l'exemple précédent.

Les valeurs du module d'élasticité et la célérité d'onde de chaque matériau sont représentées dans le tableau suivant :

Tableau (VI.2) : Valeurs du module d'élasticité et la célérité d'onde de chaque matériau

Type de matériau	Module d'élasticité (Pa)	Célérité (m/s)
Acier	2.10^{11}	1118,03
Fonte	$1,2.10^{11}$	1000
PVC	3.10^9	220,86

Les résultats de calcul sont représentés dans la figure (VI.8) :(acier-fonte) et dans la figure (VI.9) : (fonte-pvc).

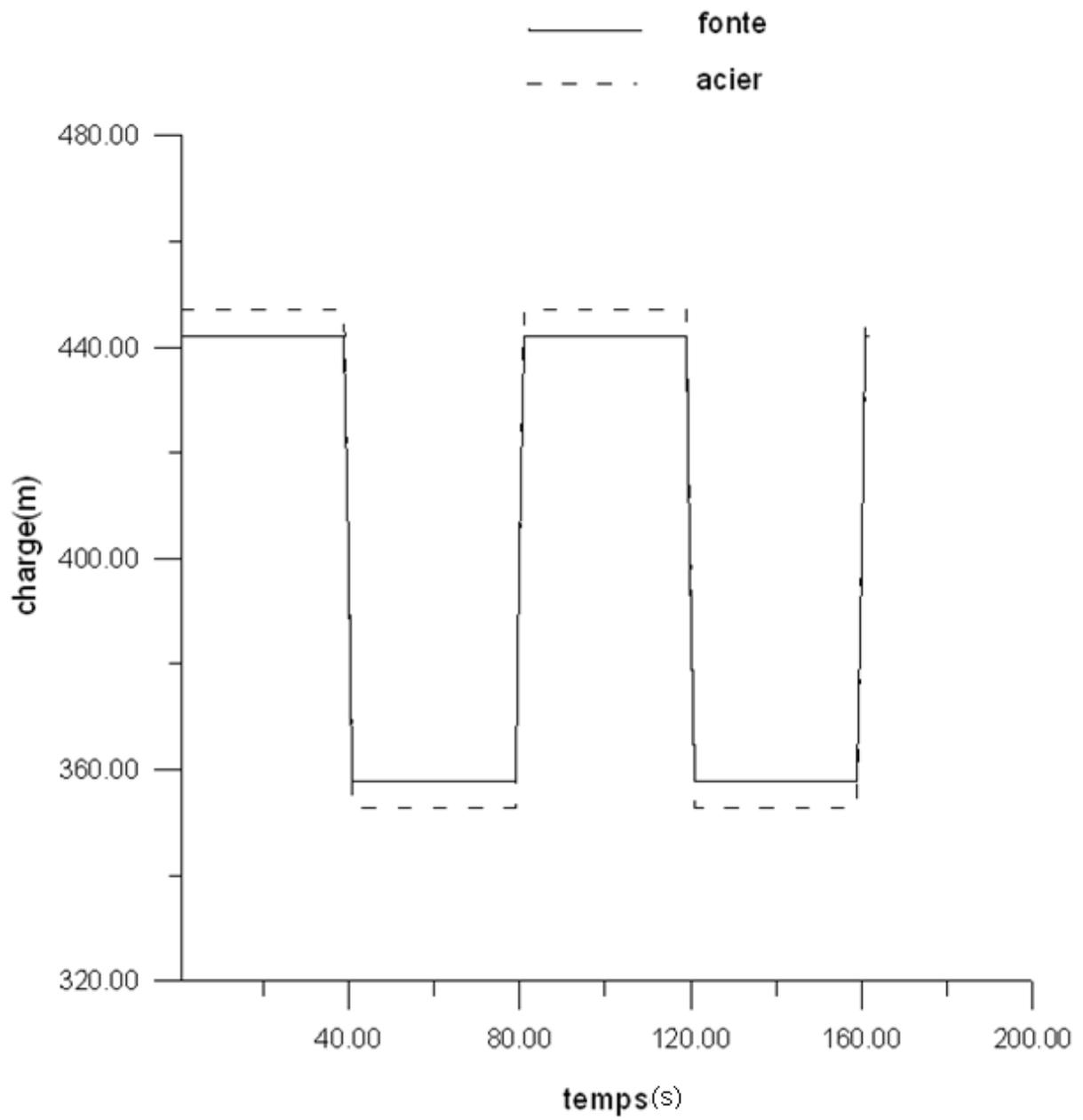


Figure (VI.8) : Influence des matériaux sur le coup de bélier

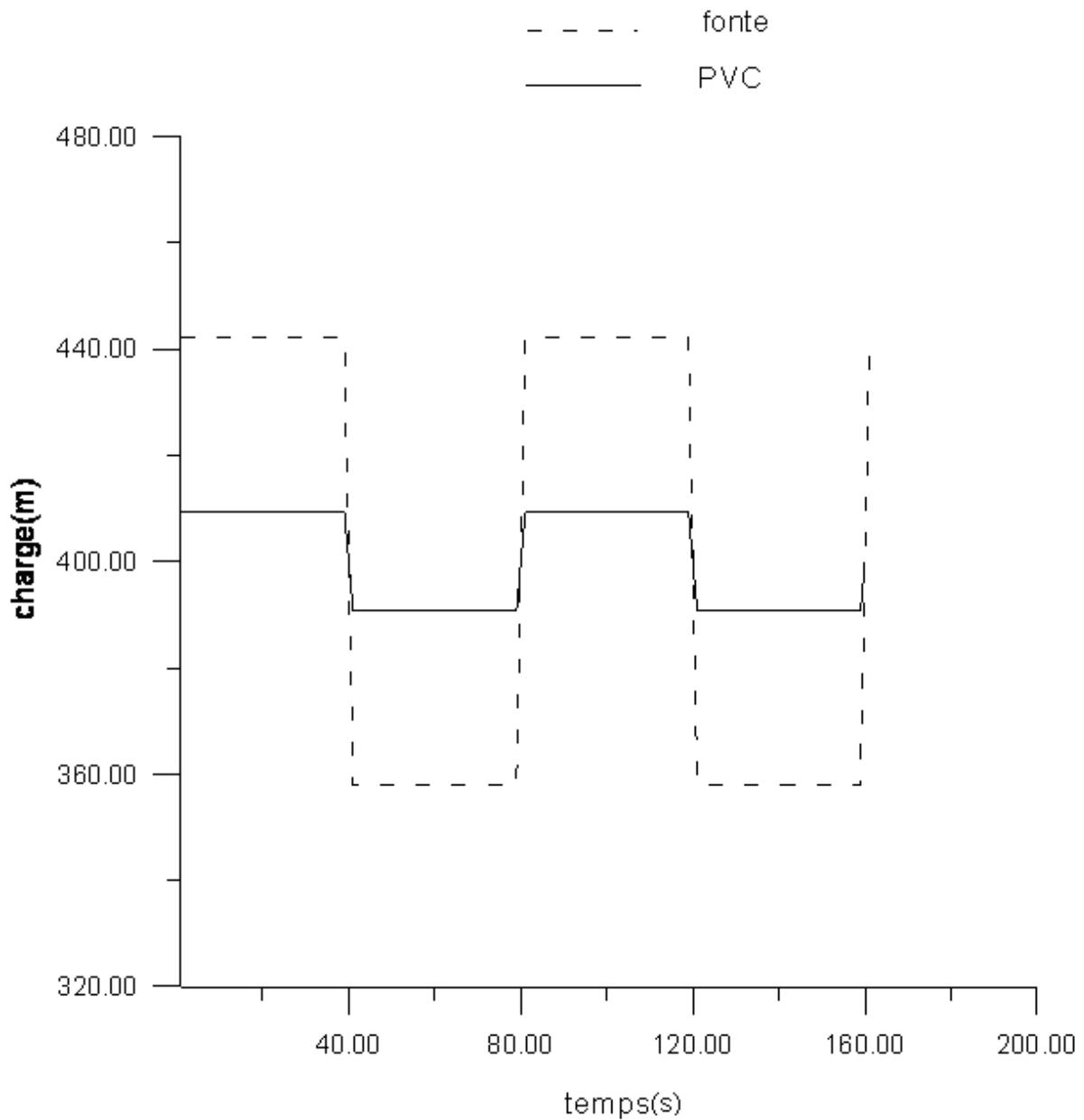


Figure (VI.9) : Influence du matériau sur le coup de bélier

On remarque que la surpression et la dépression dans le cas d'une conduite en acier sont plus importantes que celles d'autres matériaux (fonte et pvc). Ces deux résultats montrent que la célérité d'onde est proportionnelle au module d'élasticité, c'est-à-dire quand E augmente la surpression et la dépression augmente aussi.

VI.5.4 Influence de l'épaisseur de la conduite sur le coup de bélier

Pour montrer l'influence de l'épaisseur de la conduite sur le coup de bélier, on examine la variation de la charge au cours du temps pour trois épaisseurs différentes.

Les caractéristiques de la conduite sont identiques que l'exemple précédent.

Les valeurs de l'épaisseur et de la célérité d'onde sont représentées dans le tableau suivant :

Tableau(VI.3) : Valeurs de l'épaisseur et de la célérité d'onde

Type de matériau	Epaisseur (m)	Célérité (m/s)
Acier	0,002	894,03
Acier	0,005	1118,03
Acier	0,01	1240

Les résultats de calcul sont représentés dans la figure (VI.10) et la figure (VI.11).

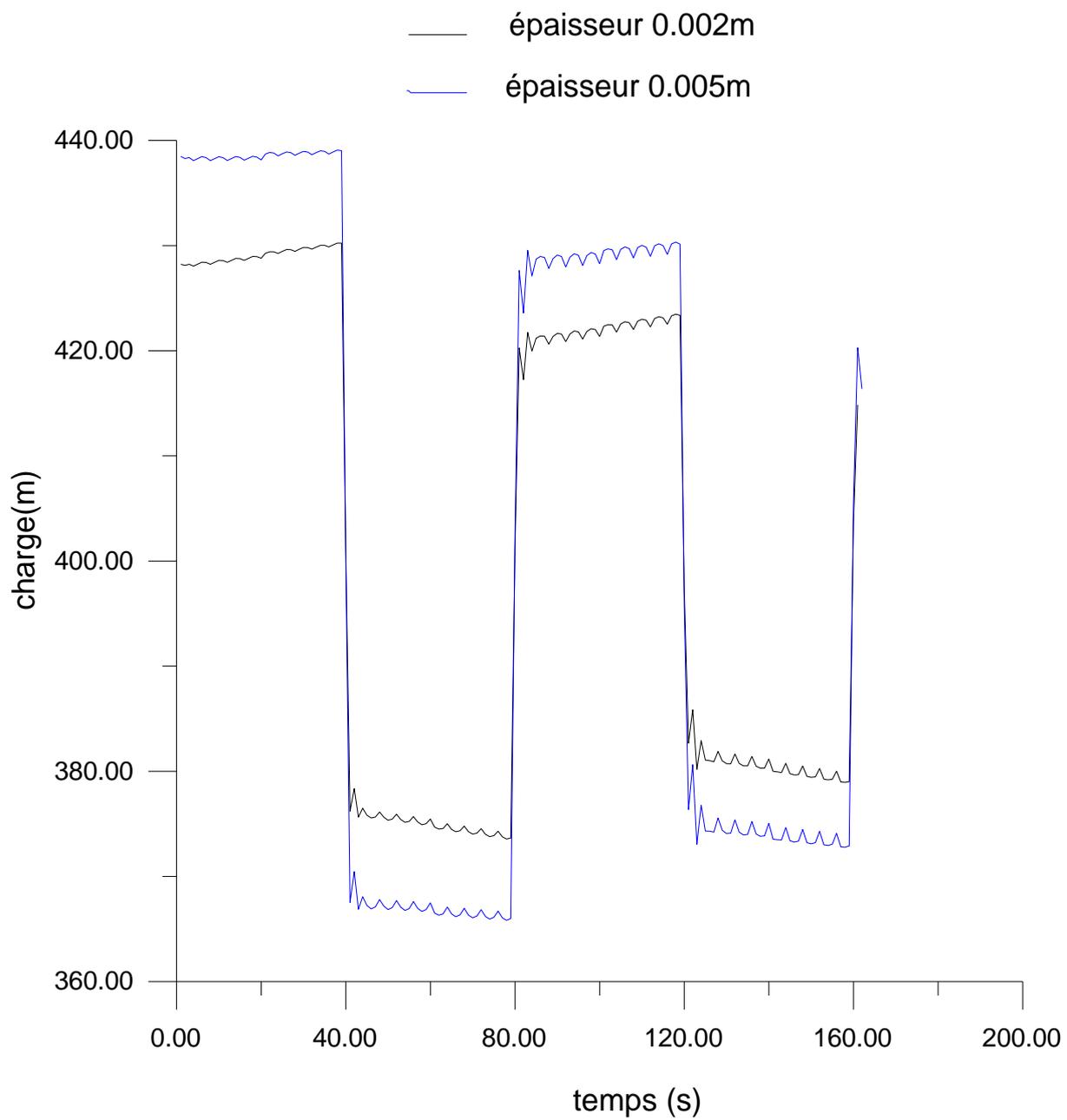
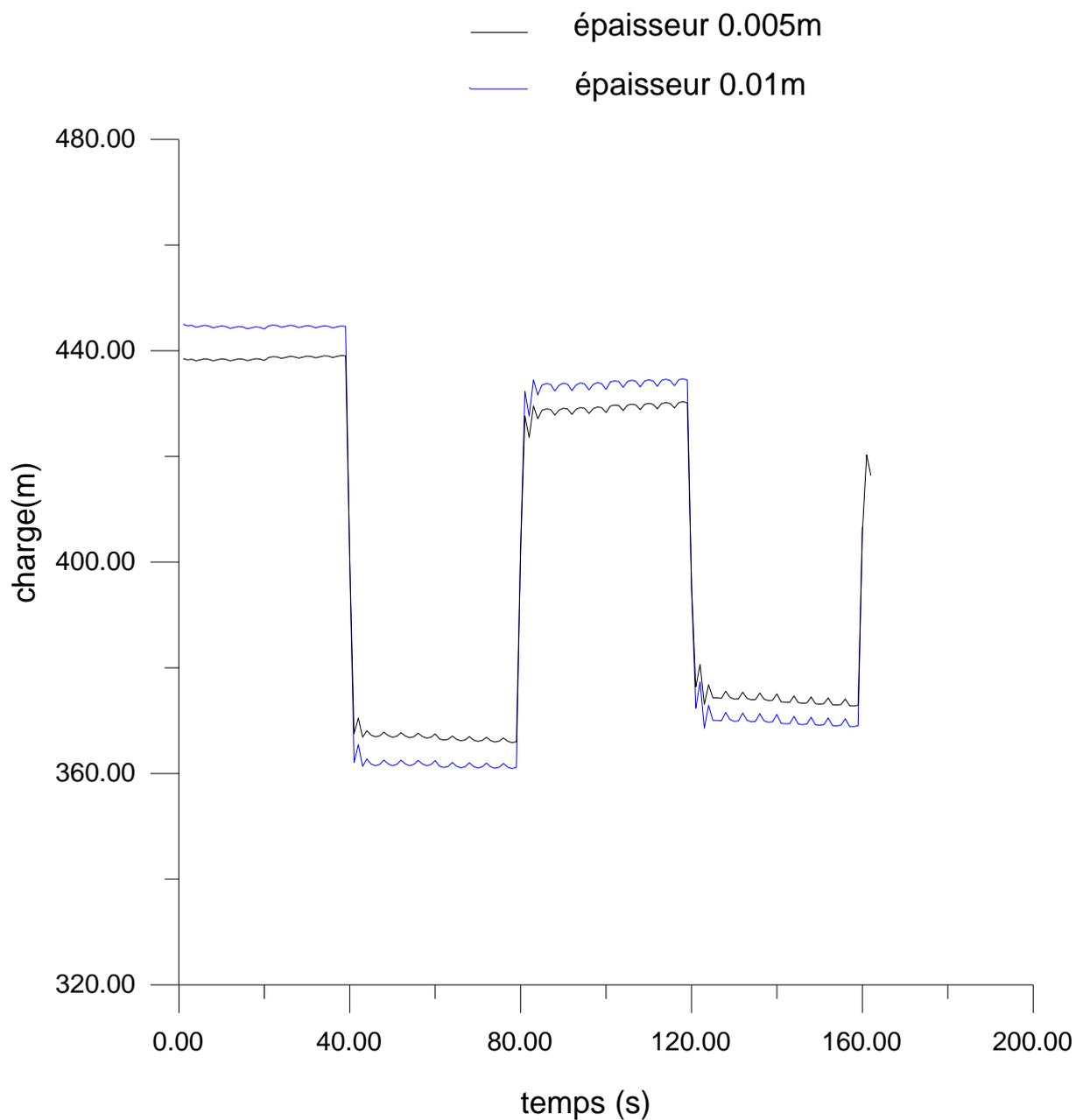


Figure (VI.10) : Influence de l'épaisseur de la conduite sur le coup de bélier



Figure(VI.11) : Influence de l'épaisseur de la conduite sur le coup de bélier

On constate pour les deux figures, que lorsque l'épaisseur de la conduite augmente, la célérité d'onde augmente et par conséquent la surpression et la dépression augmentent aussi, par contre la période d'oscillation (T) diminue.

VI.5.5 Influence du sol sur le coup de bélier

Pour voir l'influence du sol sur le coup de bélier, nous allons comparer entre deux conduites en PVC ; l'une enterrée et l'autre est libre.

Les caractéristiques de la conduite sont identiques que l'exemple précédent.

Tableau (VI.4) : célérité d'onde

Conduite enterrée	$a=459\text{m/s}$
Conduite non enterrée	$a=308,6\text{m/s}$

Les résultats de calcul sont représentés dans la figure(VI.12)

A partir de la figure, on constate que la valeur de la suppression (dépression) dans la conduite enterrée est plus élevée que celle d'une conduite non enterrée, étant donnée que cette dernière est liée proportionnelle à la célérité d'onde, contrairement à la période des oscillations qui est liée inversement proportionnelle.

Il en résulte dans le cas où la conduite est enterrée, une économie sur le dimensionnement de l'anti-bélier, c'est-à-dire que le volume du réservoir anti-bélier est inférieur à celui correspondant au cas où la conduite est libre.

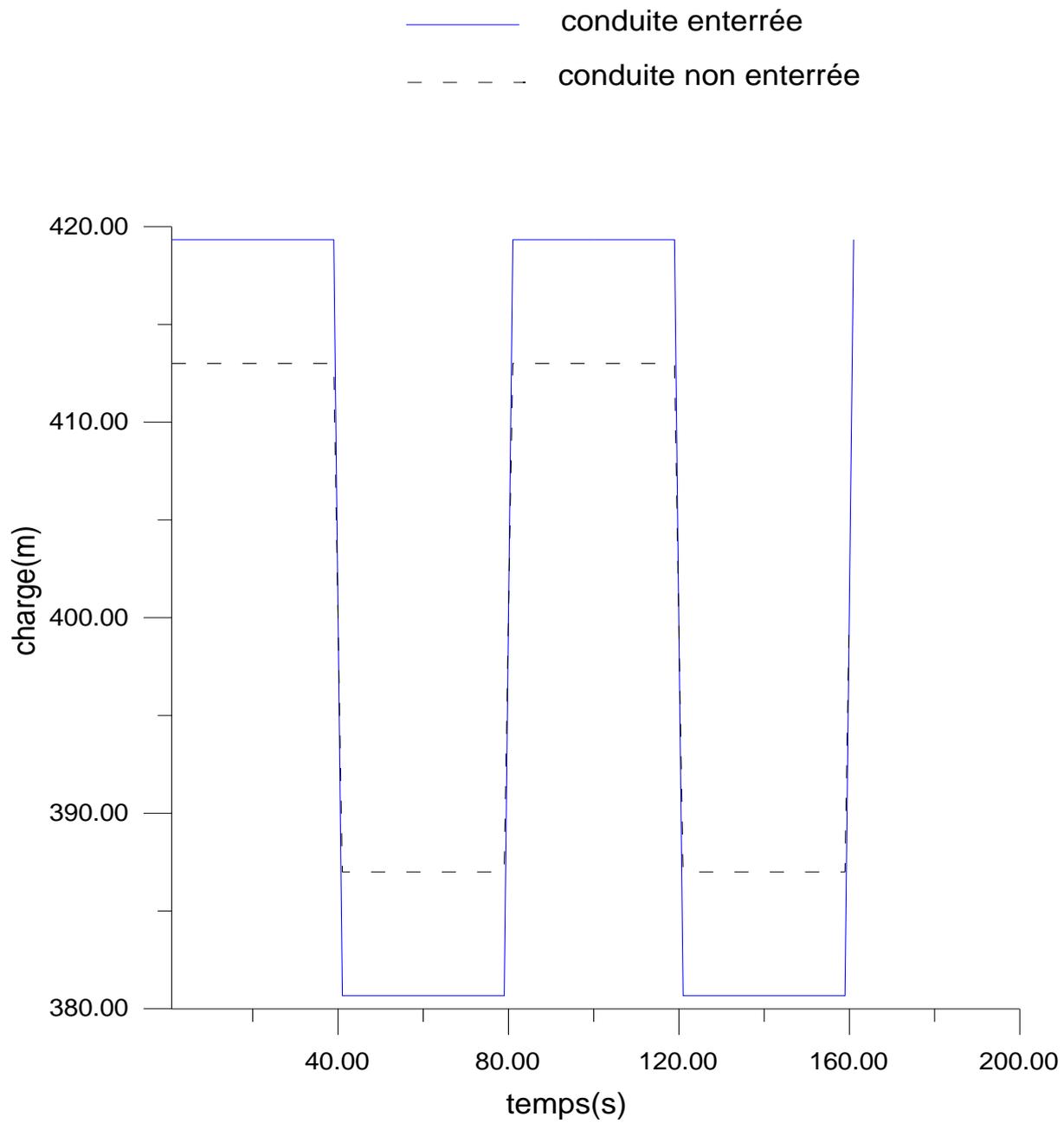


Figure (VI.12) : Influence du sol sur le coup de bélier

Conclusion

Nous avons élaboré dans ce chapitre un programme qui nous à permet de faire une comparaison entre la méthode des caractéristique et la méthode des différences finies.

Les résultats obtenus par le traitement des exemples d'applications laissent tirer les conclusions suivantes :

- ✓ La fermeture brusque de la vanne provoque des surpressions et de dépressions susceptibles d'entraîner des ruptures de tuyaux.
- ✓ Pour le calcul du coup de bélier, on choisit l'une des trois méthodes (Maccormack, Gabutti ou celle des caractéristiques) avec une valeur de cn égale à 1.
- ✓ Le coup de bélier est en fonction des caractéristiques de la conduite et l'effet du sol (à savoir qu'elle est enterrée ou non)
- ✓ Les pertes de charges agissent dans le sens de la sécurité de la conduite (amortissement du coup de bélier).

Bibliographie

- [1] **CARLIER M.** "Hydraulique générale et appliquée", ed. Eyrolles, St Germain Paris 5^e 1972, pp.292-321.
- [2] **NONCLERCQ P.** "Hydraulique urbaine appliquée, 1^{ère} partie, Principes fondamentaux et compléments d'hydraulique", ed. Cebedoc, Liège 1982, pp.192-215.
- [3] **MASSOUH F.** "Célérité des ondes de coup de bélier dans les conduites élastiques et viscoélastiques", Thèse de Docteur ingénieur, Université de Paris VI et CTGREF 1979.
- [4] **Didier Gallard.** "Pratiques-eau assainissement-1.Techniques-fiches E&A-1.4.1", Avril1998.
- [5] **WYLIE E.B., STREETER V.L.** "Fluid transient", ed. Feb Press, Ann Arbor Michigan 1983.
- [6] **ROBERT J-L.** "Hydraulique urbaine", Polycopie d', département de génie civil, faculté des sciences et du génie, Laval, Qc., Ca., 2004.
- [7] **NEKRASSOV B.** " Cours d'hydraulique ", ed. Mir, Moscou 1968, pp.158-163.
- [8] **OURAGH Y.** "Ecoulements forcés en hydraulique, 2^{ème} partie", ed. O.P.U., Ben Aknoun (Alger) 1990, pp.56-66.
- [9] **COMOLET R.** "Mécanique expérimentale des fluides, Tome 1, Statique et dynamique des fluides non visqueux", ed. Masson, Paris 1990, pp.202-207.
- [10] **Anonyme** "Le coup de bélier, Protection des conduites, Epure de Bergeron", ENITRTS, Strasbourg Janvier 1977.
- [11] **MEUNIER M.** "Le coup de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression", ed. Dunod, Paris 1980.
- [12] **LENCASTRE A.** "Hydraulique générale", ed. Eyrolles, Paris 1996, pp.369-407.
- [13] **CHERFAOUI S.** "Effet du remblai sur les volumes des réservoirs d'air anti-bélier, pour les hypothèses de la raideur du sol et de la précontrainte de la conduite ", M.F.E., ENSH Promotion 2005.
- [14] **Chaudhry M.H.** "Second-order accurate explicit finite-difference schemes for waterhammer analysis", Department of Civil and Environmental Engineering, Washington State University, Pullman, Wash, 99164.
- [15] **Hadj Ali M.** "Analyse numérique du coup de bélier par la méthode des différences finies" M.F.E, ENSH Promotion 2004.
- [16] **Bonnin J.** "Hydraulique urbain appliquée aux agglomérations de petite et moyenne importance", ed. EYROLLES. 61, Bd saint-germain, partie 5^e 1986.

[17] **BOUMAHRA.T.M** "Méthodes numériques appliquées", l'office des publications universitaires, Ben-Aknoun-ALGER.