

Higher National School of Hydraulic

The Library

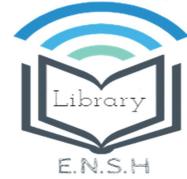
Digital Repository of ENSH



المدرسة الوطنية العليا للري

المكتبة

المستودع الرقمي للمدرسة العليا للري



The title (العنوان):

Contribution a l'étude du régime transitoire dans une conduite gravitaire en charge.

The paper document Shelf mark (الشفرة) : 6-0010-15

APA Citation (APA توثيق):

Mahfoudi, Abderrahmen (2015). Contribution a l'étude du régime transitoire dans une conduite gravitaire en charge[Thèse de master, ENSH].

The digital repository of the Higher National School for Hydraulics "Digital Repository of ENSH" is a platform for valuing the scientific production of the school's teachers and researchers.

Digital Repository of ENSH aims to limit scientific production, whether published or unpublished (theses, pedagogical publications, periodical articles, books...) and broadcasting it online.

Digital Repository of ENSH is built on the open DSpace software platform and is managed by the Library of the National Higher School for Hydraulics. <http://dspace.ensh.dz/jspui/>

المستودع الرقمي للمدرسة الوطنية العليا للري هو منصة خاصة بنمّين الإنتاج العلمي لأساتذة و باحثي المدرسة.

يهدف المستودع الرقمي للمدرسة إلى حصر الإنتاج العلمي سواء كان منشورا أو غير منشور (أطروحات، مطبوعات، مبداعات، مقالات، دوريات، كتب....) و بثه على الخط.

المستودع الرقمي للمدرسة مبني على المنصة المفتوحة DSpace و يتم إدارته من طرف مديرية المكتبة للمدرسة العليا للري.

كل الحقوق محفوظة للمدرسة الوطنية العليا للري.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'HYDRAULIQUE -ARBAOUI Abdellah-

DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE URBAINE

MEMOIRE DE MASTER

Pour l'obtention du diplôme de Master en Hydraulique

Option : ASSAINISSEMENT

THEME :

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU REGIME TRANSITOIRE
DANS UNE CONDUITE GRAVITAIRE EN CHARGE**

PRESENTE PAR :

MAHFOUDI Abderrahmen

Devant les membres du jury

Nom et Prénoms	Grade	Qualité
M ^r KHODJET-KESBA Omar	Professeur	Président
M ^r HADJSADOK Ahmed	M.C.B	Examinateur
M ^{me} AMMOUR Fadila	M.A.A	Examinatrice
M ^r HEBBOUCHE Abdelhamid	M.A.A	Examinateur
M ^{me} MEDDI Hind	M.A.A	Promotrice

Mars - 2015

∞ Dédicace ∞

Du fond du cœur, Je dédie ce modeste travail en signe de reconnaissance et de respect :

 *A mes parents qui ont toujours été les étoiles de mon ciel et ont illuminé mon chemin depuis ma naissance, je ne les remercierai jamais assez, que Dieu tout puissant les bénisse et me les garde en bonne et parfaite santé ;*

Je le dédie également à :

 *Mes frères et sœurs*

 *Toute ma famille*

 *Mes amis à Timimoun et à Blida surtout : taki et rabia 16, abdelwahab,sifou et massi 10 ,anis 35,redha,Amine et youcef 02, rachid ,mostapha 27 , Ghano ,abdelatif et hamza 09.*

 *En un mot, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.*

∞ Remerciements ∞

*Avant tout, je remercie **DIEU** qui a illuminé mon chemin et qui m'a armé de courage pour achever mes études.*

Et « quiconque ne remercie pas les gens, ne remercie pas Dieu»

*Je remercie fortement mon promotrice : **Mme Meddi Hind.**
de m'avoir orienté par ses conseils judicieux dans le but de mener a bien ce travail.*

Je tiens à remercier aussi :

- ✚ Les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail*
- ✚ Le corps d'enseignants et les étudiants de l'ENSH*
- ✚ Tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans l'élaboration de mon mémoire.*

ملخص :

ضمن المنشآت الهيدروليكية، التدفقات غير المستمرة تحت الضغط الناتجة عن التغييرات في نظام الجريان غالبا ما تؤدي إلى صعوبات عديدة، وبالتالي الحاجة إلى تحليل مفصل للسلوك الديناميكي للأنظمة في هذه الظروف الاستثنائية. يهدف العمل الحالي الى دراسة حول الطرق المستعملة في حل المشاكل المتعلقة بالقطع والمحاكاة العددية واستخدام أسلوب الأحجام المتناهية من خلال التطبيق لبرنامج MATLAB.

Résumé:

Dans les installations hydrauliques, les écoulements non permanents a surface libre provoqués par les variations du régime conduisent souvent à des conséquences néfastes, d'où la nécessité d'une analyse fine du comportement dynamique des systèmes en ces conditions de marche exceptionnelles. Le présent travail s'est alors porté sur l'étude des régimes transitoires par voie de simulation numérique et ceci par usage de la Méthode des Volumes Finis (M.V.F.) avec application sur logiciel MATLAB, très réputée dans la résolution des problèmes hyperboliques.

Abstract:

In the hydraulic installations, the unsteady pressurized flows caused by the variations of the flow conditions often lead to fatal consequences, for this we need a fine analysis of the dynamic behaviour of the systems in these exceptional conditions. This work then concerns the study of the hydraulic transients meaning numerical simulation and this by the use of the Finite Volume Method (F.V.M) with application in software MATLAB, largely applied in the resolution of the hyperbolic problems.

Sommaire :

Introduction générale	1
Chapitre I. Revue bibliographique sur les écoulements.	
I.1 Introduction.....	2
I.2. Catégories d'écoulements.....	2
I.2.1. Ecoulement permanent et non permanent.....	2
I.2.2. Ecoulement uniforme et non uniforme.....	3
I.2.3. Régime transitoire.....	3
I.2.4. Notions de turbulence.....	3
I.3 Synthèse bibliographique	5
I.4 Notions de base sur la modélisation mathématique	8
I.4.1. Équation de conservation de la masse ou équation de continuité.....	9
I.4.1.1. Équation de continuité	9
I.4.2. Analyse des paramètres.....	10
I.4.3. types de conduites	12
I.4.3.1. Relation entre la célérité et les propriétés de la conduite	12
Conclusion.....	14
Chapitre II. Les méthodes de Modélisation mathématique.	
Introduction.....	15
II.1 Modèles de bases	15
II.1.2. Considérations préliminaires.....	15
II.1.3 Equations différentielles de base	16
II.2. Méthodes d'analyse.....	19
II.3 Les méthodes les plus utilisées de modélisation	19
Conclusion.....	20
Chapitre III. Comparaison entre les différentes méthodes numériques.	
III.1. Introduction.....	21
III.2. Méthode des caractéristiques(MOC).....	23
III.2.1. Formulation mathématique du modèle aux caractéristiques	23
III.2.2. Interprétation physique de la méthode des caractéristiques.....	23
III.2.3. Solution numérique du système différentiel.....	23
III.3. Méthode des éléments finis	24
III.3.1 Formulation du problème fluide	24
III.4. Méthode des différences finies	26
III.4.1. Approximation en différences finies	26
III.4.2. Schémas explicites et implicites.....	27
III.4.3. Limites de l'approche aux différences finies et apparition de discontinuités.....	28
III.5. Méthode des volumes finis.....	29
III.5.1. Facultés et puissance de l'approche aux volumes finis.....	30
III.5.2. Limites de l'approche aux volumes finies et apparition de discontinuités.....	30
III.5.3. Formulation intégrale et propriétés des solutions faibles.....	31
III.5.4 Formulation générale pour les lois de conservation.....	33
Conclusion.....	35
Chapitre IV. Simulation du model mathématique des volumes finis par le logiciel MATLAB	
Introduction	36
IV.1. Discrétisation du modèle mathématique par volumes finis.....	36
IV.1.1. Application du schéma de Richtmyer Lax-Wendroff.....	36
IV.2. La simulation sur matlab.....	38
IV.2.1. L'application sur logiciel Matlab.....	39
IV.3. Les résultats de simulation.....	42
IV.4 Interprétation des résultats	43
Conclusion.....	45
CONCLUSION GENERALE.....	46

Liste de figure :

<i>Figure .I.1 Force et contrainte radiales dans un tuyau</i>	<i>9</i>
<i>Figure. I.2 présenter le diagramme de Moody.....</i>	<i>11</i>
<i>Figure .I.3. Vitesse de propagation dans l'eau de l'onde de pression pour différents types de tuyauterie.....</i>	<i>13</i>
<i>Figure .III.1: Intégration numérique des équations sur le plan x,t</i>	<i>24</i>
<i>Figure .III.2 Maillage du domaine de calcul et notations.....</i>	<i>27</i>
<i>Figure .III.3: Molécules de calcul d'un schéma aux différences finies.....</i>	<i>28</i>
<i>Figure .III.4 Les mailles peuvent être triangulaires, quadrangulaires ou autre</i>	<i>31</i>
<i>Figure .III.5 : Discrétisation en volumes finis et transfert de flux dans le plan x,t.....</i>	<i>31</i>
<i>Figure .IV.1 : les cellules de la méthode volumes finis.....</i>	<i>37</i>
<i>Figure .IV.2 : représente la première fenêtre de paramètre.....</i>	<i>40</i>
<i>Figure .IV.3 : la répartition de champ de vitesse 2D.....</i>	<i>43</i>
<i>Figure .IV.4: le graphe de répartition des vitesses u (m/s)=f (chaque nœud).....</i>	<i>43</i>
<i>Figure .IV.5 : la répartition des vitesses en 3D.....</i>	<i>44</i>

Liste des Tableaux :

- **Tableau II.1:** Relation entre la célérité et les propriétés de la conduite.....13
- **Tableau IV.1:** Principe et particularités des principales méthodes de discrétisation numérique32
- **Tableau IV.2 :** Avantages et des inconvénients des différentes méthodes numériques.....34
- **Tableau V.1 :** caractéristiques d'une conduite (PVC)39

Introduction générale

L'étude mathématique des écoulements à surface libre en régime transitoire n'est pas une discipline scientifique récente. Elle a débuté il y a déjà plus de 200 ans. Lors de l'essor de l'ensemble des théories mécaniques, avec les travaux de Laplace en 1776 et de Lagrange vers 1781 sur la propagation des ondes à la surface des canaux. Dès 1871, Barré de Saint-Venant a formulé mathématiquement, par un système d'équations différentielles, le mouvement des eaux à surface libre pouvant faire l'objet d'une description filaire. Depuis lors, ces équations servent de base aux modèles mathématiques d'écoulement à surface libre » en rivière, en canaux et en réseau d'assainissement.

Dans notre travail nous allons essayer d'étudier le régime transitoire dans l'écoulement à surface libre en raison de son importance capitale dans le domaine de l'hydraulique, aussi bien pour les scientifiques que pour les ingénieurs

L'objectif de ce mémoire est de présenter et d'expliquer les principes et les outils ainsi que les algorithmes mathématiques, hydrauliques et structurels utilisés pour construire un modèle simple de simulation des écoulements dans un premier temps. Dans un deuxième temps, nous tenterons de justifier théoriquement sa validité. Ce modèle devrait être en mesure de simuler les écoulements à surface libre transitoire dans les conduites du réseau d'égouts. Il devrait aussi gérer les situations de mise en charge en utilisant la capacité maximale des conduites.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter les différents écoulements et les équations de base utilisables pour comprendre le comportement des écoulements dans les réseaux d'égouts. Ensuite, ça va être suivi d'une présentation des modèles et leur fonctionnement selon le régime d'écoulement. Enfin nous allons terminer par une comparaison entre les différents modèles considérés et une application de méthode volume finis par logiciel MATLAB.

Chapitre I :

*Revue bibliographique sur les
écoulements.*

Chapitre I. Revue bibliographique sur les écoulements

I.1 Introduction :

Dans le présent chapitre, des rappels théoriques succincts sur les régimes d'écoulements et phénomènes liés aux régimes transitoires et propagation dans les installations seront donnés en un premier temps. Il sera ensuite enchaîné par un aperçu bibliographique des principaux résultats de recherche théoriques et numériques dans le domaine du calcul des écoulements.

Ce chapitre concerne les concepts de la mécanique des fluides qui régissent les écoulements en canaux à surface libre. Les notions classiques sur les écoulements turbulents sont présentées, tel que le facteur viscosité est faible par rapport aux vitesses d'écoulement. Dans la littérature plusieurs lois empiriques fondées sur l'analyse dimensionnelle sont discutées, telles que la loi logarithmique et la loi de déficit de vitesse pour prévoir la distribution des vitesses dans une section perpendiculaire à l'écoulement, cette dernière a attiré l'intérêt de nombreux chercheurs, depuis plusieurs années.

I.2. Catégories d'écoulements

Nous donnons à présent la définition de certains types d'écoulements en charge fréquemment abordés dans la littérature spécialisée dont nous ferons usage dans notre travail.

I.2.1. Ecoulement permanent et non permanent

Si les conditions d'écoulement, telle que la pression, la vitesse ou le débit en un point donné de la conduite restent invariables dans le temps, alors l'écoulement est dit permanent.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Si par contre ces conditions changent en fonction du temps, le régime d'écoulement subsistant dans le système est dit non permanent ou non-stationnaire. Ainsi, l'écoulement sera fonction de quatre variables indépendantes, à savoir (x , y et z) du point examiné et le temps (t).

$$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \quad (\text{I.2})$$

En réalité, un écoulement turbulent est toujours non permanent suite aux variations enregistrées dans la vitesse du fluide en un point donné. Cependant, en considérant la valeur moyenne de cette dernière sur une courte période, le régime sera considéré comme permanent si cette valeur moyenne est constante dans le temps.

I.2.2. Ecoulement uniforme et non uniforme

Si la vitesse du fluide est constante le long de la coordonnée privilégiée (x) de l'écoulement à différents instants, on dira que cet écoulement est uniforme.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.3})$$

Contrairement au cas précédent, lorsque la vitesse d'écoulement varie d'une section à l'autre, l'écoulement est dit non uniforme.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0 \quad (\text{I.4})$$

I.2.3. Régime transitoire

On appelle régime transitoire, un état d'écoulement qui se manifeste entre deux régimes stationnaires, autrement dit c'est un écoulement varié, où les variables d'état (H, V) changent. Il peut se produire soit dans un canal à ciel ouvert, soit dans une conduite à écoulement en charge par accroissement ou décroissement du débit.

I.2.4. Notions de turbulence

La turbulence est la propriété d'un écoulement et non du fluide lui-même.

L'écoulement turbulent est caractérisé par :

- ✓ Une forte variabilité dans l'espace et dans le temps : les grandeurs physiques comme la vitesse et la pression varient aléatoirement.
- ✓ La présence de tourbillons : le mouvement turbulent présente des fluctuations du rotationnel de vitesse.
- ✓ Un aspect tridimensionnel : les mouvements turbulents fluctuants sont toujours tridimensionnels.
- ✓ Des nombres de Reynolds élevés : au-dessus d'une valeur seuil du nombre de Reynolds l'écoulement est toujours turbulent.
- ✓ Un effet diffusif : il y a un mélange important entre les couches de l'écoulement de sorte que l'écoulement turbulent diffuse fortement la quantité de mouvement et les autres grandeurs physiques.
- ✓ Un aspect très dissipatif : une grande quantité de l'énergie cinétique est convertie en chaleur sous l'effet de la viscosité à cause des forts gradients de vitesse accompagnant les fluctuations de la vitesse instantanée.

Dans un écoulement turbulent, les lignes de courant peuvent se briser et des tourbillons peuvent apparaître. On note que dans le cas d'un écoulement à surface

libre, la couche limite (couche au sein de laquelle la vitesse varie en fonction de l'éloignement à la paroi) est importante et les gradients de vitesse sont élevés.

A. Notion de couche limite turbulente :

A l'entrée d'un canal, un gradient élevé de vitesse se développe au voisinage du fond du canal. Il est associé à des contraintes de frottement. Il s'ensuit la formation d'une couche limite où les effets visqueux sont importants. L'épaisseur de la couche limite augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'entrée jusqu'à atteindre le niveau de la surface libre au bout d'une distance L_e , en supposant le canal suffisamment long. Cette distance s'appelle la longueur d'établissement.

La longueur d'établissement correspond à la longueur au-delà de laquelle le profil de vitesse ne varie plus longitudinalement. Cette longueur est une information fondamentale pour l'étude expérimentale et la modélisation numérique des écoulements à surface libre. Au-delà de cette distance, l'écoulement est développé. La longueur d'établissement est un paramètre important pour les études expérimentale et numérique. En effet, toutes les études d'écoulement uniforme doivent s'effectuer dans la zone développée.

La mesure du débit en hydraulique urbaine est nécessaire pour le contrôle du bon fonctionnement des ouvrages (collecteurs, déversoirs d'orage, différents ouvrages d'une station d'épuration) et pour la compréhension des phénomènes hydrauliques en vue d'améliorer la conception et la gestion des réseaux. Une méthode courante pour l'évaluation du débit volumique dans les réseaux d'assainissement consiste à multiplier la vitesse moyenne dans une section par la surface de la section mouillée occupée par le fluide ($Q = U_{\text{moy}} \cdot S$).

Cette méthode nécessite une mesure de la hauteur d'eau et une mesure de la vitesse moyenne dans la section mouillée. Cette méthode est couramment employée, bien qu'elle soit relativement peu fiable. En effet, elle peut poser problème étant donnée la difficulté d'obtenir une estimation précise de la vitesse moyenne dans la section, surtout en cas d'écoulements hétérogènes dans une grande section. (*Chaudhry, 1979*).

I. 3 Synthèse bibliographique

Nous allons à présent illustrer, en passant en revue, l'essentiel de l'état de connaissances sur les régimes transitoires à surface libre ainsi que les méthodes de calcul numériques développées en vue de la résolution des équations différentielles de base régissant le phénomène. Ayant à l'esprit que le problème des écoulements non permanents reçoit de larges applications dans différents domaines, tels que la biologie, stations hydroélectriques, thermiques et nucléaires, système d'injection de carburant et autres problèmes invoquant la transmission de substance ou de fluides divers, nous nous attacherons ici aux problèmes d'hydrodynamique.

Allievi (1913) est le premier à pouvoir interpréter avec une rigueur mathématique le phénomène physique du coup de bélier et en donner la théorie générale. Il démontre ainsi la légitimité de négliger les termes convectifs dans l'équation dynamique du mouvement, et a introduit deux importants paramètres adimensionnels caractérisant la conduite et la manœuvre de la vanne ainsi que des abaques pour le calcul des suppressions suites à des fermetures linéaires d'un obturateur.

Ultérieurement, des extensions et raffinement des équations de base des écoulements transitoires par différents chercheurs ont vu jour, à l'image de *Jaeger* (1933 et 1977), *Parmakian* (1955) et *Wylie et Streeter* (1967). Les efforts combinés de ses chercheurs ont eu comme résultats l'aboutissement aux équations de continuité et de mouvement pour les écoulements en charge non stationnaires unidimensionnels (1D) suivantes :

✓ Equation de continuité :

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (I.7)$$

✓ Equation dynamique :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{4}{\rho D} \tau_w = 0 \quad (I.8)$$

Dans lesquelles τ_w est la contrainte tangentielle au voisinage de la paroi de la conduite de diamètre D .

Le système d'équations (I.7) et (I.8) constitue les équations fondamentales des problèmes d'écoulement non permanent 1D sous pression et représente le modèle mathématique de propagation d'ondes élastiques dans les systèmes de conduites à

surface libre.

Dans ces équations, les termes convectifs $V(\partial H / \partial x)$ et $V(\partial V / \partial x)$ ont été négligés en raison de leur très faible contribution dans le modèle mathématique complet. Les recherches de *Mitre et Rouleau* en 1985 (*Ghidaoui et al. 2005*) sur le coup de bélier en régime laminaire ainsi que ceux de *Vardy et Hwang* (1991) pour le cas du régime turbulent affirment la validité de l'approche unidimensionnelle dans le cas des conduites.

Dans un cas complexe où l'écoulement dans la conduite devient mixte (liquide-gaz ou passage sous pression-surface libre), un autre modèle mathématique plus général déduit des lois classiques de la mécanique des fluides prend part pour décrire le comportement physique du phénomène dans l'enceinte de la conduite. Ce modèle, appelé « équations de base unifiées » et sous certaines hypothèses simplificatrices, s'écrit :

✓ Equation de continuité

$$\frac{g\rho}{\alpha^2} \left[\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\rho'}{\rho} V \sin \theta \right] + \rho' \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (I.9)$$

✓ Equation dynamique

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x} + gJ = 0 \quad (I.10)$$

Ou :

ρ : masse volumique du fluide (constante dans l'espace et le temps) ;

ρ' : masse volumique (variable ou quasi-stationnaire) ;

θ : angle formé par la conduite et l'horizontale ;

J : perte de charge totale par unité de longueur de la conduite.

Ces équations s'appliquent donc pour les fluides compressibles et quasi incompressibles tel que l'eau. Dans ce cas, en considérant $\rho \cong \rho'$ et en négligeant les termes convectifs dans ce modèle ainsi que l'inclinaison de l'axe de la conduite.

Notons que le passage "écoulement en charge-à surface libre" reste dans le domaine de la recherche à cause de son comportement hybride, puisque son mouvement est gouverné principalement par la gravité dans sa portion à surface libre et par la pression dans sa portion en charge. Les deux modèles diffèrent essentiellement dans la forme du gradient de pression et dans l'ordre de grandeur de la célérité de l'onde de pression du modèle. Pour surmonter cette difficulté, plusieurs techniques et modèles performants ont été mis sur pied, à l'image des travaux.

Quant à la célérité de l'onde élastique du coup de bélier, elle est donnée par (*Meunier,*

1980 ; De Almeida et Koelle, 1992) :

$$\frac{1}{c^2} = \frac{d\rho}{dP} + \frac{\rho}{s} \frac{ds}{dP} \quad (\text{I.11})$$

Le premier terme du second membre de l'équation (I.11) représente l'effet de la compressibilité du fluide sur la célérité et le second terme traduit l'effet de l'élasticité de la conduite sur cette célérité, qui selon Korteweg en 1878, est lié au matériau de la conduite ainsi qu'à sa géométrie. Ainsi, en appliquant les lois de la mécanique des milieux continus au fluide et à la conduite et en négligeant la contrainte longitudinale et l'effet d'inertie radiale de l'enveloppe, Korteweg (1878) obtient la formule suivante (Dinh Tam, 2009) :

$$C = \sqrt{\frac{K_e/\rho}{1 + \left(\frac{K_e D}{E.e}\right)}} \quad (\text{I.12})$$

Pour la calcul de la perte de charge j au cours du régime transitoire, plusieurs modèles ont été proposés pour l'évaluation de la contrainte tangentielle τ_w , sachant que cette résistance à l'écoulement est essentielle pour garantir une simulation correcte sur de longues périodes. Dans le modèle dit « quasi-stationnaire », on accepte l'hypothèse que l'expression reliant τ_w à la vitesse moyenne sur la section de la conduite en régime permanent demeure valide en régime non stationnaire (De Almeida et Koelle, 1992). Ce modèle englobe les formules de type *Darcy-Weisbach* ou *Hazen-Williams*.

Les équations aux dérivées partielles (I.7) et (I.8) régissant le phénomène de propagation d'ondes du coup de bélier dans une conduite en charge sont de type hyperbolique. Sous cette forme, aucune solution analytique ne se présente pour résoudre les problèmes réels, exception faite de certains cas simples (généralement hypothétiques) sans terme dissipatif et des conditions aux limites simplifiées, lesquels n'intéressent pas les applications d'ingénierie. Cependant, et pour contourner cette difficulté, plusieurs méthodes numériques ont été appliquées avec succès pour approcher la solution désirée.

Distinction est faite dans la littérature entre plusieurs modèles, parmi lesquels certaines méthodes n'ont pas réussie à séduire, telles que la méthode spectrale et la méthode d'intégration aux frontières, bien adaptées à d'autres types de problèmes, néanmoins les méthodes les plus répandues et explorées dans les problèmes de propagation d'ondes (Ghidaoui et al. 2005 ; Yong Il Kim, 2008).

I.4 Notions de base sur la modélisation mathématique :

Le deuxième aborde l'aspect théorique des problèmes posés par les mouvements non permanant.

Les équations qui permettent d'étudier tous les phénomènes que l'on rencontre en écoulement monophasique sous pression ont été établis par Saint Venant et par conséquent portent son nom. Ces équations dérivent par l'application de deux lois principales à savoir :

- La loi de la conservation de la masse (équation de continuité).
- La loi de la conservation de la quantité de mouvement (l'équation dynamique).

Précisons que, bien que l'eau soit souvent modélisée comme étant un fluide incompressible, les modèles mis en œuvres pour des calculs hydrauliques non stationnaire, devront tenir compte de la faible compressibilité de l'eau, ainsi que de la souplesse des conduites ; en effet, ce sont ces deux propriétés qui sont à l'origine des ondes de chocs dans les conduites, (*B.Greiveldinger 2004*).

I.4.1. Équation de conservation de la masse ou équation de continuité

La conduite étudiée est considérée monodimensionnelle, ce qui est justifiée si les grandeurs qui caractérisent l'écoulement sont constantes dans une section donnée.

On considère également que l'écoulement est parallèle à l'axe de la conduite.

On suppose que la pression p du fluide ainsi que le diamètre D de la conduite augment selon l'axe x . (*Y. Vaillant 2005*).

I.4.1.1. Équation de continuité :

Nous allons d'abord rappeler certains résultats de mécanique des matériaux et les utiliser pour déterminer les contraintes dans les tuyaux sous pression (dans notre cas c'est l'écoulement transitoire).

Appelons σ_1 et σ_2 les contraintes longitudinale et radiale, ζ_1 et ζ_2 les déformations correspondantes, E le module d'élasticité de la conduite (module de YOUNG) et ν le module de poisson.

La loi de HOOKE permet d'écrire :

$$\zeta_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu\sigma_2) \tag{I.13}$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu\sigma_1) \tag{I.14}$$

Essayons d'exprimer les contraintes σ_2 et σ_1 :

- **Contrainte σ_2**

Si " D " est le diamètre et " e " l'épaisseur du tuyau. La pression interne exerce une force " $P.D$ " sur une demi-circonférence.

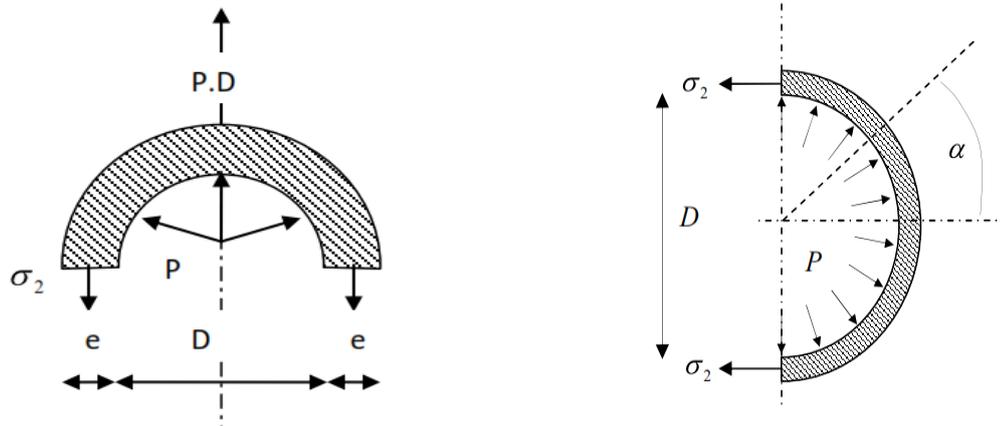


Fig.I.1 Force et contrainte radiales dans un tuyau

La contrainte est donc :

$$\sigma_2 = \frac{PD}{2e} \quad (\text{I.15})$$

- **Contrainte σ_1** : On distingue deux cas :

□ **Premier cas** : Si la conduite a suffisamment de joints, on peut considérer qu'il n'y a ni contraintes, ni déformations longitudinales et que les éléments cylindriques successifs sont indépendants entre eux (donc $\nu = 0$). Dans ce cas, on a $\nu_1 = \nu = 0$ (ν n'est pas alors le module de poisson du matériau proprement dit mais son équivalent pour la canalisation globale).

□ **Deuxième cas** : La contrainte longitudinale doit être prise en compte. Elle dépend dans ce cas de la façon dont le tuyau est ancré aux extrémités :

- Tuyau ancré aux deux extrémités : on a donc $\zeta_1 = 0$ et par conséquent $\sigma_1 = \nu\sigma_2$

Tuyau libre à une extrémité : la force qui s'exerce à l'extrémité du tuyau est égale $\frac{P\pi D^2}{4}$ cette pression peut être nulle dans le cas où la vanne d'extrémité serait grande ouverte. Cette force s'exerce sur le périmètre entier du tuyau $\pi.D$, donc sur la surface $\pi.D.e$, la contrainte est donc $\sigma_1 = \frac{PD}{4e}$ qu'on peut écrire $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2}$ (M.Meunier 1980).

I.4.2. Analyse des paramètres

Les équations de continuité et de quantité de mouvement établies précédemment, décrivent l'écoulement d'un fluide en régime transitoire dans les conduites à parois élastiques.

Dans ces équations figurent différents paramètres et variables dont deux indépendantes

X et t et deux dépendantes P et U. les autres paramètres D, ρ , C, λ représentent les caractéristiques du système et sont habituellement considérés indépendants du temps.

- Paramètre D :

Il représente le diamètre de la conduite, il n'est fonction que de la distance X (variation de la section de conduite suivant la longueur).

- Paramètre ρ :

Il représente la masse volumique du fluide, qui est généralement supposée constante pour la durée du régime transitoire.

- Paramètre C :

Il représente la vitesse de propagation de l'onde en régime transitoire, elle dépend des caractéristiques du système et des propriétés du fluide.

Elle peut être déterminée par l'expression suivante :

$$C = \sqrt{\frac{1}{\rho \left(\frac{1}{E_{\text{eau}}} + \frac{Df}{Ee} \right)}} \quad (\text{I.16})$$

Avec :

C : célérité de l'onde de pression (ou onde élastique en m/s).

ρ : la masse volumique de l'eau (1000 kg/m³).

E_{eau} : module d'élasticité du liquide (MPa).

D : diamètre intérieur de la conduite (m).

e : épaisseur de la paroi (m).

E: Module de Young du matériau ou module (MPa).

Et $f = 1 - k_c v$

Avec : k_c : coefficient d'ancrage. et v : le module de poisson.

Les deux facteurs essentiels qui interviennent dans la vitesse de propagation de l'onde de pression sont surtout la compressibilité de l'eau E et l'élasticité du matériau constituant la conduite E_{eau} .

- Paramètre λ :

Il représente le coefficient de frottement, est généralement considéré comme celui d'un écoulement turbulent permanent uniforme. Pour tous les tuyaux, on ne considère que

l'équation de Colebrook comme étant la plus acceptable pour calculer le coefficient de frottement λ . (OURAGH.Youcef 1986)

Cette équation ou, $\lambda = (Re, k/D)$ est calculée :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \tag{I.17}$$

Du fait que l'équation est difficile à résoudre, puisque la formule est implicite en λ on dispose de diagrammes (de Moody, figure II.1) permettant de lire la relation entre le coefficient de frottement λ , le nombre de Reynolds Re et la rugosité relative k/D .

Une approximation explicite de cette équation est donnée par la formule de Colebrook White :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{5.1268}{Re^{0.89}} \right) \tag{I.18}$$

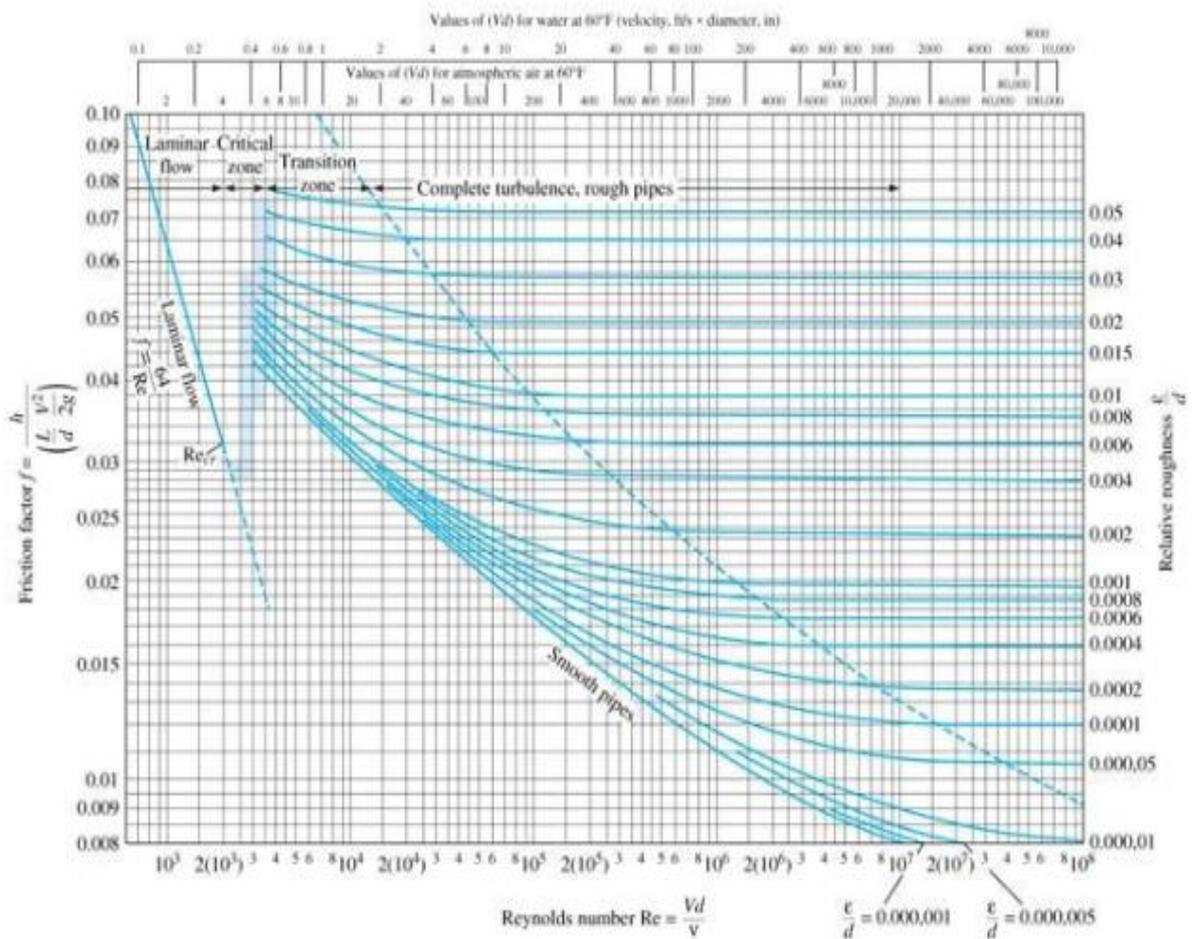


Fig. I.2 présenter le diagramme de Moody

I.4.3. types de conduites

Dans l'étude de la propagation des ondes, on est confronté à deux types de conduites : certaines ont sur toute leur longueur la même épaisseur, le même diamètre et la même nature du matériau, ce sont des conduites à caractéristique unique ; c'est la théorie de MM. Allievi et Joukowski où l'étude des coups de bélier se ramène à l'équation de d'Alembert des cordes vibrantes (C. Camichel, D. Eydoux, M. Gariel 1916).

Mais on sait que le plus souvent, les conditions industrielles sont plus épaisses à leur extrémité aval et plus mince à leur extrémité amont. Elles constituées par des tronçons d'épaisseurs différentes et parfois de diamètres différents. De pareilles conduites sont dites à caractéristiques variables ou multiples. M de Sparre a étudié de façon complète ces types de conduites.

Considérons par exemple une conduite à caractéristiques variables, pour chaque tronçon de longueur L_i on peut déterminer la vitesse de propagation C_i .

On peut assimiler une conduite à caractéristiques variables à une conduite formée de deux ou trois tronçons.

I.4.3.1. Relation entre la célérité et les propriétés de la conduite

La célérité d'onde est une fonction du matériau constituant la conduite, elle est de l'ordre de (15 m/s) pour le caoutchouc, elle peut aller jusqu'à (180 m/s) pour le cas des matières plastiques.

$C \geq 1000$ m/s pour l'acier et la fonte présentent le cas maximum tel que la célérité pourra atteindre une vitesse qui correspond à la vitesse de propagation du son dans l'eau soit ; 1430 m/s aux conditions : eau incompressible et conduite indéformable ou très rigide ($E_{\text{eau}} = 0$, $E = \infty$ Mpa).

Cas module d'Young pour certaines matières courantes :

Pour PVC : $E = 2,76 * 10^3$ Mpa.

Pour béton : $E = 1,33 * 10^5$ MPa.

Pour béton armé : $E = 2 * 10^5$ MPa

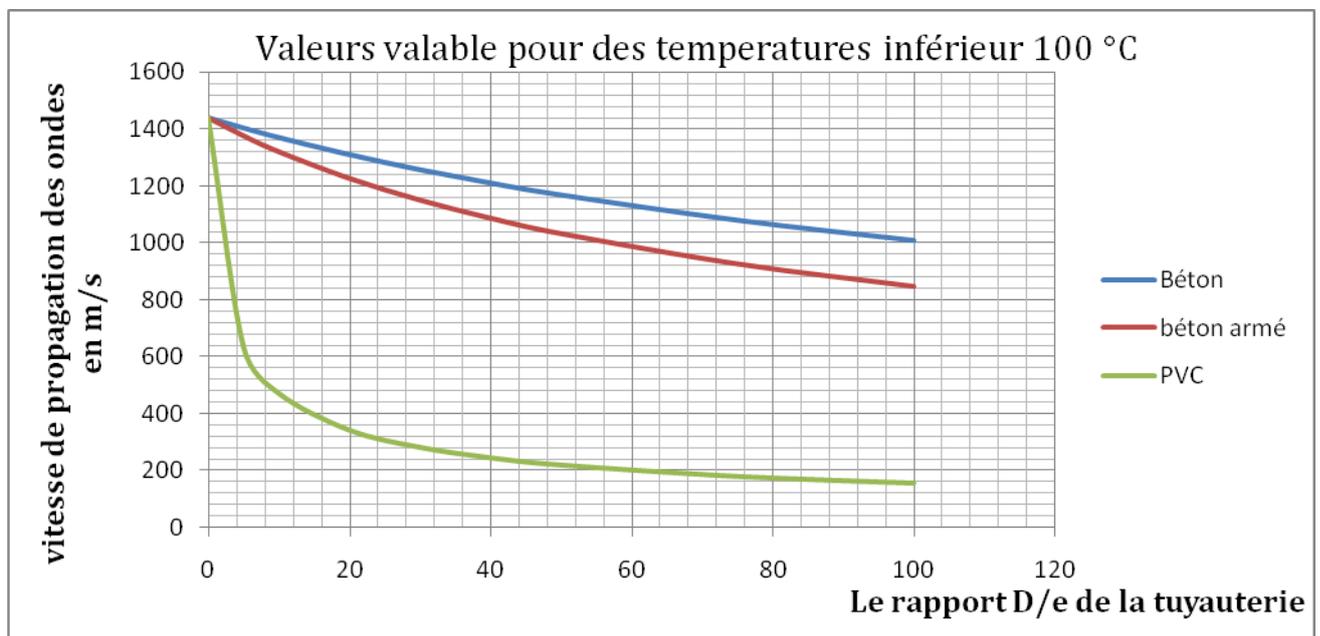
Le tableau (II.1) et la figure (II.2) illustrant la relation entre la célérité et les propriétés de la conduite (les unités des modules d'élasticité sont en Mpa, le module d'élasticité de l'eau est pris égal à 2070 MPa).

Tableau I.1. Relation entre la célérité et les propriétés de la conduite.

Matériaux	module d'élasticité E (Gpa)	Célérité en m/s							
		D/e							
		0	5	10	20	30	40	50	100
Béton	133	1438.7	1402.9	1369.6	1309.6	1256.1	1201.9	1167.9	1018.5
béton armé	200	1438.7	1375.5	1319.9	1226.4	1150.2	1086.7	1032.7	847.5
PVC	2.76	1438.71	634.66	472.37	343.3	283	246.3	221	157.2

(Source : mémoire de magister (AMARA Lyes 2013))

Fig.I.3. Vitesse de propagation dans l'eau de l'onde de pression pour différents types de tuyauterie.



Remarque :

Le rapport D/e augmente $C = f\left(\frac{D}{e}\right)$ diminue.

La variation de la célérité en fonction du rapport (D/e) est plus visible pour le PVC.

Il y'a d'autres relations qu'on peut analyser vu que la célérité est : $C = f(D, e, E)$ c'est-à-dire fonction du diamètre intérieur de la conduite.

Conclusion

Dans ce chapitre est dans un premier abord, certaines notions et définitions générales d'écoulement dont l'usage se fera dans la suite du travail, ont été présentées, ainsi tous ce qui concerne les équations fondamentaux pour pouvoir entamer notre travail.

Nous avons ainsi cité les équations de base gouvernant les régimes d'écoulement non permanent. En se basant sur l'application du principe de continuité et de quantité de mouvement, qui n'est autre que celui décrivant la propagation des ondes planes dans les corps élastiques. La dérivation de ces équations s'est appuyée sur certaines hypothèses simplificatrices généralement acceptables en pratique d'autres phénomènes dynamiques peuvent prendre part dans l'analyse des paramètres de ce type d'écoulement, comme l'interaction fluide-structure et autres.

Chapitre II :

*Les méthodes de Modélisation
mathématique.*

Chapitre II. Les méthodes de Modélisation mathématique

Introduction

Après avoir présenté quelques aspects théoriques relatifs aux régimes non permanant en charge et exposé l'état de l'art sur le sujet, nous aborderons à présent la modélisation mathématique du phénomène. L'application simultanée des principes de conservation de masse et de quantité de mouvement permettra de formuler le système d'équations différentielles du modèle élastique qui gouverne les problèmes de propagation d'ondes du coup de bélier. Une discussion du système d'équations et sa solution générale sous la forme conservative seront données.

II.1 Modèles de bases :

II.1.2. Considérations préliminaires

Les équations du mouvement que nous dériverons dans le présent chapitre sont issues du modèle dit « élastique ». Ce modèle correspond aux conditions physiques du régime transitoire dans lesquelles on considère les effets de déformation de la conduite et la compressibilité du fluide. Ce dernier est supposé se contracter et se dilater suivant les conditions isothermiques et caractérisé par son module de compressibilité, condition pouvant être considérée comme valide pour les liquides.

Dans l'analyse des écoulements non permanents, l'équation dynamique et de continuité doivent être satisfaites dans le calcul de la pression (ou charge) et de la vitesse (ou débit) comme fonction de la position et du temps, à savoir $H(x, t)$ et $V(x, t)$, suivant la description dite *Eulerienne*. Si des gaz sont impliqués dans l'analyse d'écoulements brusquement variés, l'équation de l'énergie doit être considérée dans ce cas dans la mesure où un transfert thermique apparaît, et la variable température sera alors une nouvelle inconnue. (Wylie et Streeter, 1978).

Le développement des équations fondamentales invoqué ici repose sur les hypothèses suivantes :

1. la conduite est considérée uniforme et l'écoulement est unidimensionnel ; la vitesse et la pression suivent une distribution uniforme à travers la section transversale de la conduite ;
2. la déformation de la conduite est linéairement proportionnelle à la contrainte (loi d'élasticité de *Hooke*) et l'effet de compressibilité du liquide est caractérisé par son module de compressibilité et la linéarité de comportement. Aucune interaction fluide-structure n'est prise en compte ;

3. le fluide est homogène et monophasique, donc aucune cavitation ou vaporisation du fluide n'apparaît durant le régime transitoire. Les équations ne seront valides pour un écoulement biphasique ou rupture de veine liquide ;
4. les formules des pertes de charge par frottement en régime stationnaire sont valides en régime transitoire (hypothèse de quasi-stationnarité) ;
5. aucun apport ou distribution latéral de débit n'est observé.

II.1.3 Equations différentielles de base

II.1.1.3.1 Classification des modèles

Outre les différentes définitions obtenues en fonction du point de vue du modélisateur, il est également possible de les classer par types d'approche [Chocat B]. Ces approches ne sont pas exclusives les unes des autres et peuvent même être complémentaires.

a. Les modèles physiques

Dans ce cas, le modèle devient une maquette reproduite à une échelle spécifique. La principale difficulté revient à transposer le résultat dans la réalité par rapport au facteur d'échelle. Il est souvent impossible d'éviter des distorsions dans les phénomènes. Il devient donc nécessaire de négliger certains aspects. Par exemple, les forces de viscosité sont négligées si les forces de gravité dominent. On parle alors de similitude de Froude. Si au contraire, les forces de gravité peuvent être négligées au profit des forces de viscosité, on parle de similitude de Reynolds.

b. Les modèles mathématiques

Dans ce cas, le modèle représente sous forme d'équations les phénomènes physiques de la réalité. Il se compose d'une ou plusieurs équations dont l'origine, le degré de complexité et le réalisme multiplient les possibilités de construction. Ainsi, il est possible de distinguer :

o Les modèles empiriques

Ils sont représentés par des formules et équation simples et empiriques. Par exemple, la formule rationnelle qui permet de déterminer le débit de pointe en fonction d'information minimale du bassin versant, à savoir le coefficient de ruissellement.

Les inconvénients de ces modèles sont divers. Parfois, les coefficients locaux interviennent et ne sont pas transposables directement. Il n'y a pas de moyens de contrôle de l'ordre de grandeur et il n'est pas possible de rattacher d'autres processus (par exemple un bilan pollutif ou le transport solide aux crues

calculées).

○ **Les modèles statistiques**

Ils utilisent des fonctions de distribution (loi Normale, de Gumbel) afin d'évaluer ou de prédire un comportement observé. Ces méthodes analysent les variables en tant qu'échantillon d'une population statistique dans le but d'une régionalisation ou en vue de la prédiction de certaines grandeurs. En hydrologie, la variable la plus utilisée est le débit à l'exutoire d'un bassin versant, et notamment le débit maximum et minimum journalier, mensuel ou annuel.

L'expérience indique que les valeurs moyennes d'un comportement sont représentées correctement par la loi Normale, et que les valeurs maximums et minimums sont mieux approchées par une loi de type « extrême » telle que la loi de Gumbel.

Les principales faiblesses de ces modèles sont :

- Estimation d'une valeur caractéristique seulement ;
- Non prise en compte de nombreux paramètres ;
- Impossibilité de rattacher d'autres processus ;
- Résultats dépendent des données ;
- Difficulté de calculer les erreurs de simulation.

○ **Les modèles conceptuels**

Ces modèles tentent de reproduire la réponse d'un bassin versant en remplaçant la réalité de l'écoulement par une idéalisation fort simplifiée de la géométrie du bassin versant et de l'écoulement par rapport à la situation réelle.

En hydrologie, les deux concepts de modélisation principalement utilisés sont :

- La représentation de la géométrie des surfaces d'écoulement par des plans rectangulaires de pentes constantes ;
- La représentation de l'écoulement par des réservoirs fictifs.

○ **Les modèles mécanistes (ou à base physique)**

Ils résolvent des systèmes d'équations de quantité de mouvement et de continuité liés au transport d'eau, de substance ou d'énergie. Ils décrivent mathématiquement les phénomènes rencontrés. A titre d'exemple, l'équation de Barré St-Venant pour les écoulements en surface libre ou de Darcy-Richards pour les écoulements souterrains. De tels modèles nécessitent une description détaillée du bassin versant, des schémas numériques robustes et la détermination de paramètres

physiques (paramètre de friction, conductivité hydraulique etc.), ces derniers pouvant être mesurés in situ. Cependant l'utilisation rigoureuse des paramètres réels ne permet pas d'éviter des distorsions des modèles. En effet, des simplifications inévitables impliquent que certains processus ne sont pas simulés correctement. Ainsi, les paramètres réels du modèle doivent intégrer une erreur, une information sur les paramètres non pris en compte, si le modèle est calé. Il en découle qu'un modèle à base physique donne des réponses très proches des observations avec des paramètres physiques différents de ceux mesurés.

Les inconvénients de ces modèles sont la mise en œuvre fastidieuse, la détermination des paramètres et leur coût.

II.1.3.2. Equation dynamique

Nous allons établir à présent l'équation du mouvement pour le volume de contrôle représenté sur la figure (II.1) à un instant donné t , où la conduite subit une déformation due aux forces dynamiques du régime transitoire. Les forces extérieures s'exerçant sur la tranche liquide projetées sur l'axe x de la conduite se composent de :

- la force de pression normale sur la face amont : PS
- la force de pression normale à la face aval de la tranche : $-\left(PS + \frac{\partial(PS)}{\partial x} \delta x\right)$
- la composante du poids propre due au champ de gravité : $-\rho g S \delta x \sin \theta$
- la composante de pression sur l'enveloppe : $\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \frac{\partial S}{\partial x} \delta x$
- la force de frottement du liquide avec la paroi : $\tau_w \cdot \pi \cdot D \cdot dx$

Ainsi, l'équilibre dynamique des forces extérieures de surface et de volume s'écrira :

$$\sum F = PS - \left(PS + \frac{\partial(PS)}{\partial x} \delta x\right) + \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \frac{\partial S}{\partial x} \delta x - \tau_w \cdot \pi \cdot D \cdot dx - \rho g \cdot S \cdot \delta x \cdot \sin \theta \quad (II.1)$$

En omettant les termes de second ordre dans l'expression (II.1) et en simplifiant, on obtient :

$$\sum F_{ext} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \cdot S \cdot \sin \theta\right) \delta x - \tau_w \cdot \pi \cdot D \cdot dx \quad (II.2)$$

Nous savons que le principe fondamental de la dynamique, qui indique que le changement temporel de l'impulsion est égal à la somme des forces extérieures exercées sur le volume de contrôle (\mathcal{V}) liquide de longueur δx , s'écrit (Comolet, 1990) :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(m\overrightarrow{V}) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \overrightarrow{V} d\mathcal{V} \quad (II.3)$$

Le premier membre de l'équation (II.3) étant connu, il reste à développer le second membre qui représente la dérivée temporelle de la quantité de mouvement sous sa forme intégrale. Pour ce faire, on se servira du théorème de transport de *Reynolds*.

Il traduit que la variation temporelle d'une quantité f définie sur un volume de contrôle \mathcal{G} se compose de la somme de la variation de f au cours du temps au sein du volume (variation locale) ainsi que le flux de f à travers la surface S enveloppant le volume de contrôle matériel, avec n la normale unitaire à la surface S .

II.2. Méthodes d'analyse

L'analyse d'un écoulement en régime non permanent dans un système hydraulique en charge peut être menée principalement suivant deux voies (*De Almeida et Koelle, 1992*):

- a) **Domaine d'analyse temporel** : par intégration numérique directe des équations de base et ceci par biais de schémas numériques qui fournissent la solution discrète des variables d'état H et V dans divers points d'espace x et le temps t . L'analyse des régimes d'oscillation établis (périodiques) peut également être traitée dans ce domaine en imposant dans la simulation un état de fluctuation harmonique.
- b) **Domaine d'analyse fréquentiel** : moyennant certaines opérations de transformations et linéarisation des équations de base et des conditions aux limites, une réponse fréquentielle du système est obtenue en imposant une fonction de forçage périodique par l'analyse de *Fourier* et le principe de superposition. Par une transformation inverse, on peut ainsi convertir les résultats dans le domaine temporel. Nous citons parmi autres, la méthode des impédances et la méthode des matrices de transfert (*Chaudhry, 1979*).

II.3 Les méthodes les plus utilisées de modélisation

❖ Lors du calcul et de la simulation des coups de bélier, les techniques d'analyse qu'on va présenter sont les plus utilisées et préférées, car aucune simplification ou linéarisation n'est introduite, à côté de leur facilité et leur puissance de modélisation des conditions aux limites (pompes, vannes,...etc) et des manœuvres pratiquées.

Dans notre travail, nous ferons usage de l'analyse dans le domaine temporel. Pour ce faire, quatre principales méthodes numériques se présentent :

- Méthode des caractéristiques ;
- Méthode des éléments finis ;
- Méthodes des différences finies (schéma explicite ou implicite);
- Méthode aux volumes finis.

Conclusion :

Ayant évoqué les équations différentielles de base gouvernant les écoulements non stationnaires en charge, il a été de nécessité de citer les méthodes classiques de résolution numérique de ces équations.

Ces méthodes, en l'occurrence des modèles numériques aux différences finies, ont servi pour plusieurs décennies pour la simulation et l'analyse des régimes transitoires en charge. (Ghidaoui et al. 2005). En premier lieu, une attention particulière a été accordée à l'exposé des quatre méthodes utilisables de modélisation des écoulements.

Ceci est dû à la simple raison de la popularité de la méthode et sa puissance de résolution des équations hyperboliques, sans oublier sa facilité de programmation et sa robustesse. Demeurant très utilisée à nos jours, plusieurs améliorations ont été apportées au schéma de calcul de base à grille régulière, que nous n'avons exposé.

Distinction est faite dans la littérature entre plusieurs modèles, parmi lesquels certaines méthodes n'ont pas réussi à séduire, telles que la méthode spectrale et la méthode d'intégration aux frontières (boundary-integral method), bien adaptées à d'autres types de problèmes, néanmoins les méthodes les plus répandues et explorées dans les problèmes de propagation d'ondes à savoir la méthode des volumes finis.

Chapitre III :
*Comparaison entre les différentes
méthodes numériques.*

Chapitre III : Comparaison entre les différentes méthodes numériques.

III.1. Introduction :

L'impact hydrodynamique désigne le choc d'une structure sur la surface d'un fluide faiblement compressible (par exemple de l'eau). Dans ce chapitre est l'étude de quelques propriétés des différentes méthodes numériques en elles-mêmes, c'est à dire indépendamment de l'équation traitée. Nous situerons rapidement les méthodes de Volumes Finis par rapport aux différences Finies et aux éléments Finis. Puis nous étudierons quelques principes de base qui permettent d'expliquer l'efficacité des méthodes de Volumes Finis pour le calcul de solutions discontinues. Nous montrerons que les schémas de base présentent une meilleure précision pour les chocs que pour les discontinuités de contact. Des résultats de convergence seront démontrés sur l'équation du transport pour le schéma linéaire up wind de base et pour les schémas non linéaires.

Une fréquence trop importante des impacts peut conduire à une fatigue prématurée de la structure et même à sa rupture dans les cas extrêmes. Dans ce contexte, on comprend l'importance pour l'architecte naval de connaître les efforts induits par le tossage. Un des premiers travaux sur ce sujet a été publié par Von Kármán, qui, en introduisant le concept de masse ajoutée, a proposé une formule analytique très simple qui permet d'estimer l'effort de choc lors de l'impact d'un dièdre. Wagner a proposé également un modèle analytique pour l'impact de dièdres. On comprend que cette hypothèse limite la validité de la théorie de Wagner aux cas où les angles de pénétration sont relativement faibles. Ses travaux ont été ensuite repris et améliorés par de nombreux chercheurs. Des solutions analytiques sont. Dans ce cas, seules les conditions aux limites au niveau de la surface libre sont projetées sur une surface plane.

Le but de ce chapitre est d'évaluer les capacités de différentes méthodes numériques pour la simulation de l'impact hydrodynamique. Trois approches différentes ont été considérées :

- 1) modèle éléments finis.
- 2) modèle différences finis.
- 3) modèle volumes finis « Volume of Fluid ».

Ces méthodes numériques ont en commun un certain nombre d'étapes de base :

- Approximation des variables inconnues de l'écoulement par des fonctions simples

- Substitution de la solution par des approximations issues de la discrétisation et manipulation mathématiques pour obtenir des systèmes d'équations algébriques (linéarisation)
- Résolution du système d'équations algébriques pour déterminer la valeur de l'approximation en tout point et a tout instant.

Pour la résolution de ces équations, il faut connaître certains coefficients qui dépendent eux même de la valeur de la solution en certains points. Toutes ces méthodes procèdent donc par itération, a partir d'une valeur initiale pour initialiser la valeur de ces coefficients.

III.2. Méthode des caractéristiques(MOC) :

En mathématiques, la méthode des caractéristiques est une technique qui permet de résoudre les équations aux dérivées partielles hyperboliques. Particulièrement adaptée aux problèmes de transport, elle est utilisée dans de nombreux domaines tels que l'hydraulique, la mécanique des fluides ou le transport des particules en suspension.

Dans certains cas particuliers, la méthode des caractéristiques peut permettre la résolution purement analytique des EDP. Dans les cas les plus complexes rencontrés par exemple en modélisation des systèmes hydrauliques, la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique du problème de propagation des ondes dans les conduites en charge.

Pour une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, la méthode des caractéristiques consiste à rechercher des courbes (appelées « lignes caractéristiques », ou plus simplement « caractéristiques ») le long desquelles l'EDP se réduit à une simple équation différentielle ordinaire (EDO). La résolution de l'EDO le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

En fait, c'est un algorithme mathématiquement rigoureux, et qui a été prouvé pour simuler la réalité avec la plus grande précision. C'est le standard et incontestablement le plus rigoureux et robuste des algorithmes d'analyse de débit transitoire hydraulique.

Il calcule les résultats le long de la canalisation, capturant exactement les changements critiques qui pourraient autrement être manqués, a condition que la vitesse de l'onde ne varie pas dans le temps a cause d'une perturbation (de l'air ou d'un entraînement de gaz) dans cette canalisation.

Afshar et Rohani (2008) ont proposé de leur coté une méthode des caractéristiques implicite. Dans cette approche, les équations de base de l'élément conduite et des différents

appareils sont alors organisées dans un système matriciel ayant pour inconnus les variables H et Q au pas de temps considéré. Les auteurs mettent ainsi en relief dans leur travail la supériorité de la méthode face aux limitations de la méthode des caractéristiques classique.

Depuis sa mise en œuvre dans les années 1960, la méthode des caractéristiques a fait preuve de sa puissance et sa supériorité comparée à d'autres méthodes, ce qui lui a permis d'être la méthode la plus populaire et universelle dans le calcul des coups de bélier.

L'origine de la méthode remonte à *Monge* en 1789, c'est ce dernier qui a su en donner des applications graphiques concrètes en hydraulique et aux autres branches de la mécanique et de l'électricité, et depuis, son nom reste attaché à la méthode graphique des caractéristiques.

III.2.1. Formulation mathématique du modèle aux caractéristiques

La méthode des caractéristiques consiste à transformer un système d'équations aux dérivées partielles en un autre système d'équations aux dérivées ordinaires. Ainsi, l'équation de continuité et l'équation dynamique formant un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, est converti en quatre équations aux dérivées totales. Ces dernières équations peuvent être alors résolues numériquement par un schéma aux différences finies. La solution du problème est obtenue à l'aide de l'outil informatique. Reprenons les équations différentielles gouvernant les régimes transitoires en charge, obtenues précédemment

$$L_1 = \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g j = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$L_2 = \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.2})$$

Pour que ce système d'équations définisse de manière unique la solution, il faut et il suffit que les deux équations L_1 et L_2 soient linéairement indépendantes, donc la combinaison linéaire de ces équations doit être nulle.

III.2.2. Interprétation physique de la méthode des caractéristiques

Mathématiquement, les lignes caractéristiques partagent le plan x et t en deux régions sur lequel les solutions sont recherchées. Mais du point de vue physique, les droites caractéristiques correspondent aux tracés le long desquels les perturbations se propagent (*Abbott, 1966*).

III.2.3. Solution numérique du système différentiel

On a représenté sur la figure III.1 tout l'information général qui donne une solution de ce système différentiel :

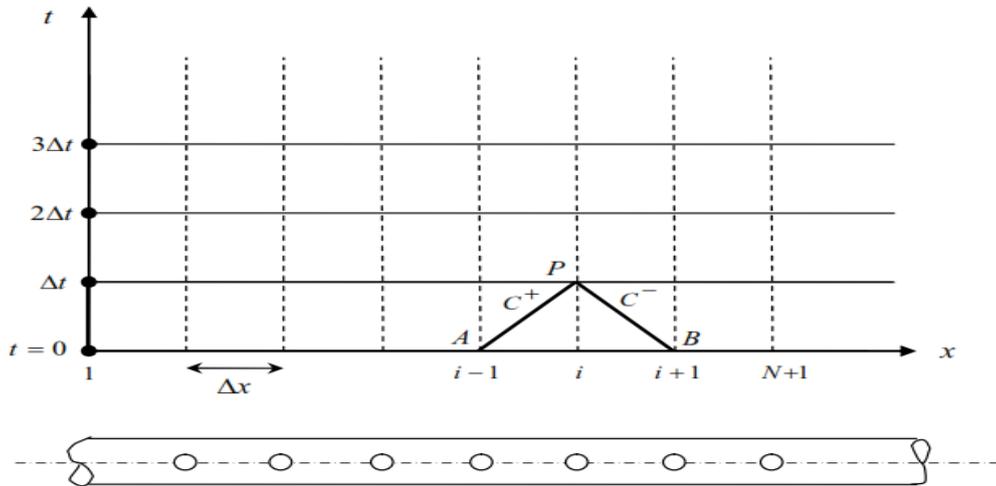


Figure (III.1): Intégration numérique des équations sur le plan x,t (Wylie et Streeter, 1978)

III. 3 Méthode des éléments finis

La nécessité de calculer les déformations des structures et des terrains sous diverses sollicitations impose le recours à des méthodes numériques et à des lois de comportement des matériaux relativement compliquées.

L'utilisation des résultats d'un calcul par éléments finis en conditions de projet dépend de la représentativité du modèle et de la validité des hypothèses, mais aussi du bon déroulement du processus de résolution incrémental et itératif.

Ce processus doit être fiable et dans la mesure du possible économique ; il doit aussi être bien adapté au traitement local des lois de comportement introduites dans le code de calcul. Il s'agit essentiellement de résoudre des équations différentielles et des équations implicites qui définissent les lois de comportement incrémentales et non linéaires (hypo élasticité, hyper élasticité, élasto plasticité,...etc.).

Les algorithmes utilisés conduisent parfois à des durées de calcul importantes et à des difficultés de convergence liées aux chargements appliqués. Il est alors essentiel pour l'utilisateur de juger de la convergence et d'interpréter correctement les informations que le code de calcul fournit sur le déroulement de la résolution.

Dans cette méthode on utilise des fonctions linéaires ou quadratiques, sur chaque élément, pour décrire la variation locale de l'inconnue. Les équations différentielles sont exactement vérifiées par la solution exacte.

III.3.1 Formulation du problème fluide :

Considérons un fluide parfait incompressible initialement au repos. L'écoulement est supposé irrotationnel. Il est donc possible d'introduire une fonction F appelée potentiel des vitesses telle que :

$$\vec{V}_f = \vec{\nabla}\phi \quad (\text{III.3})$$

En notant $h(x, y, t)$ l'élévation de la surface libre Γ_L la condition aux limites au niveau de cette dernière peut s'écrire :

$$P(x, y, h(x, y, t)) = 0 \quad (\text{III.4})$$

P : étant la pression hydrodynamique.

La condition de glissement au niveau de la paroi de la surface solide Γ_s est :

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n} = \vec{V}_s \cdot \vec{n} \quad (\text{III.5})$$

\vec{V}_s : étant la vitesse au niveau du solide et \vec{n} la normale extérieure au domaine fluide.

Nous avons étudié à la fois l'impact de structures rigides et déformables. Dans le dernier cas, la structure est modélisée à l'aide d'éléments de poutre pour le cas de dièdres ou à l'aide d'éléments de coque axisymétrique pour le cas de cônes. L'interaction entre le fluide et la structure est prise en compte en utilisant une loi de contact normal de forme exponentielle.

La résolution par la méthode des éléments finis d'un problème de mécanique en comportement non linéaire nécessite généralement l'application de quatre procédures de discrétisations (maillage, méthode itérative, traitement local des équations de comportement, loi de chargement appliquée).

Chacune de ces procédures peut être la source d'erreurs numériques et conduire soit à une mauvaise solution, soit à une divergence non justifiée du processus itératif. Il convient donc, dans la mesure du possible, de contrôler ces procédures afin d'assurer aux utilisateurs du code la validité des résultats qu'ils sont en droit d'attendre.

- **Remarque :**

La méthode des éléments finis a reçu une large application dans les problèmes de la mécanique des solides et des fluides (*Zienkiewicz et Taylor, 2000*) ; mais son succès dans le calcul des écoulements transitoires est très restreint. Habituellement, dans ce type de problèmes, des techniques hybrides mettant en œuvre des éléments finis dans le domaine spatiale et les différences finies dans le domaine temporelle sont appliquées. L'avantage principal de la méthode des éléments finis est son habilité à traiter les géométries complexes du domaine de calcul. A l'opposé, le temps et le volume des calculs restent les inconvénients majeurs de la méthode. *Szymkiewicz*

(1995) propose une version modifiée de la méthode des éléments finis appliquées aux équations de transport et des écoulements non permanents.

III.4. Méthode des différences finies :

La méthode consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs de différences basés sur des intervalles de temps et d'espace finis Δx et Δt , puis à résoudre les équations algébriques obtenues en tenant compte des conditions initiales et aux limites. Ainsi, le domaine de variation continu du problème se trouve transformé en un ensemble finis de points (nœuds) où la solution sera recherchée. Ce domaine discret est alors délimité par des frontières formant par conséquent un réseau de points de calcul, appelé aussi grille de calcul.

Il a été mis en évidence dans ce qui a précédé que le système d'équations aux dérivées partielles régissant la propagation des ondes élastiques dans un écoulement en charge est de type hyperbolique quasi-linéaire, par conséquent une solution analytique sous forme close n'est malheureusement pas disponible pour résoudre des problèmes pratiques. Cependant, moyennant des techniques de discrétisation numériques de ces équations différentielles, on pourra aboutir à des solutions approchées satisfaisantes en passant du domaine continu au domaine discontinu où les équations différentielles se trouvent converties en équations algébriques plus simples à résoudre.

III.4.1. Approximation en différences finies

Si une fonction quelconque $f(x)$ est continue et dérivable, alors l'idée de base est d'appliquer à cette fonction un développement en série de *Taylor* comme suit (*Hoffmann et Chiang, 2000*)

$$f(x, \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + O(\Delta x)^n \quad (\text{III.6})$$

Dans lequel $O(\Delta x)^n$ représente le reste ou l'erreur de troncature d'ordre n .

Les problèmes des écoulements non stationnaires étant gouvernés par des équations aux dérivées partielles, on peut appliquer aisément ce développement pour une fonction à deux variables ou plus. Ayant $f(x, t)$ comme fonction de l'espace et du temps, on procédera à la discrétisation du plan x, t , en un réseau (maillage) orthogonale, formant ainsi une grille de nœuds de calcul (Figure (III.2)).

Pour l'approximation des dérivées spatiales premières, et en négligeant l'erreur de troncature, le développement de *Taylor* permet de formuler les possibilités suivantes :

- Schéma décentré amont (précis au premier ordre) :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \quad (\text{III.7})$$

- Schéma décentré aval (précis au premier ordre) :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_i^j - f_{i-1}^j}{\Delta x} \quad (\text{III.8})$$

- Schéma centré (précis au deuxième ordre) :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2 \Delta x} \quad (\text{III.9})$$

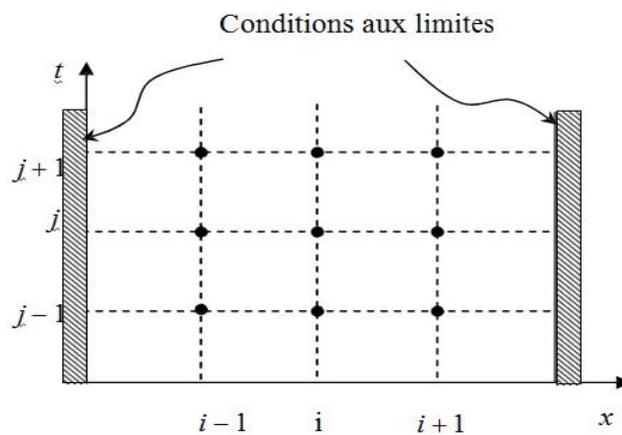


Figure III.2 Maillage du domaine de calcul et

III.4.2. Schémas explicites et implicites

Suivant la façon de discrétisation de l'équation aux dérivées partielles, deux cas se distinguent pour la méthode des différences finies (Hoffmann et Chiang, 2000):

a) Schéma explicite

Si les dérivées spatiales dans l'équation sont exprimées en termes de variables au temps j connu, le schéma est dit alors explicite. C'est-à-dire, les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné sont exprimées en fonction des caractéristiques de celui-ci supposées connues à l'instant précédent, de ce fait, ce qui se passe au temps $t + \Delta t$ ne dépend que du passé au temps t (Figure (III.3.a)).

b) Schéma implicite

A l'opposé, si les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné $t + \Delta t$ sont approchées en fonction de la solution précédente trouvée au temps t , et des valeurs recherchées au temps même du calcul, la liaison est implicite, et le schéma est dit par conséquent implicite (Figure(III.3.b)). Ceci impose la résolution simultanée des équations algébriques obtenues à

chaque pas de temps. Le schéma en question possède l'avantage d'être inconditionnellement stable et offre une flexibilité dans le choix du temps de calcul, mais pour des systèmes ayant des conditions aux limites complexes, cette méthode devient vite compliquée en plus du volume de calcul induit.

Parmi ces schémas, nous citons celui de *Preissmann* (*Cunge, 1988*), le schéma de *Beam et Warming* (*Fennema et Chaudhry, 1989*) et le schéma de *Vasiliev* (*Chaudhry, 2008*). L'ensemble de ces schémas a reçu de larges applications dans le domaine des écoulements à surface libre.

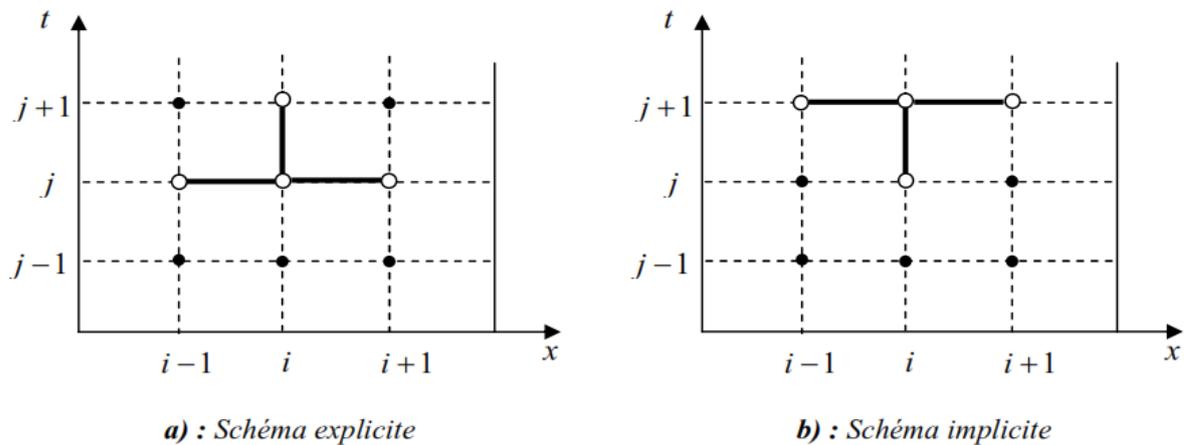


Figure (III.3): Molécules de calcul d'un schéma aux différences finies

III.4.3. Limites de l'approche aux différences finies et apparition de discontinuités

Il est connu que les lois de la dynamique des fluides peuvent être exprimées du point de vue mathématique soit sous forme différentielle ou bien intégrale (dite aussi faible). Quand un schéma numérique est appliqué à la forme différentielle, le domaine de la solution est discrétisé en un ensemble de points ou nœuds de calcul. Telle est l'approche de la méthode des différences finies (*Hoffmann et Chiang, 2000*). Or nous savons que pour les équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques, des conditions initiales continues peuvent bien conduire à des solutions discontinues. Pour montrer le mécanisme de leur apparition, considérons la loi de conservation donnée par la forme générale suivante, sans terme source :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{III.10}$$

Où la fonction de flux F peut dépendre uniquement de x , t et de la variable conservée U . L'équation (IV.1), qui est sous forme dite conservative, peut alors s'écrire sous la forme non conservative suivante (*Guinot, 2008*) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{III.11}$$

Avec $\hat{\lambda} = dF / dU$ Sous la forme caractéristique, l'équation (II.24) se réécrit, comme a été vu au chapitre précédent, de la manière suivante :

$$U = Cte \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \hat{\lambda} \quad \text{(III.12)}$$

La quantité U , dite invariant de *Riemann*, est donc constante le long de la caractéristique (trajectoire) $dx / dt = \hat{\lambda}$. Lorsque la fonction de flux F n'est pas linéaire, $\hat{\lambda}$ n'est pas constante et dépend aussi de la valeur de U , invariante le long d'une caractéristique.

• **Remarque :**

Il est possible, au lieu d'utiliser la méthode des caractéristiques, de faire usage de l'approximation par différences finies pour résoudre les équations aux dérivées partielles du mouvement transitoire sous leur forme conservative ou non conservative. Un bon nombre de schémas aux différences finies implicites et explicites ont été mis au point à cet effet.

III.5. Méthode des volumes finis

Nous avons vu que face à l'insolubilité analytique des équations hyperboliques de lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement gouvernant la propagation des ondes dans les conduites en charge pour les cas réels, parfois très complexes, on est alors amené à ne pas résoudre directement les équations différentielles de base qui décrivent le phénomène physique mais à résoudre des versions approchées qui s'en rapprochent autant que possible. Les équations approchées que l'on résout s'obtiennent à partir des équations originales par le biais de la discrétisation, moyennant laquelle il est espéré de se rapprocher de la solution analytique exacte (souvent inexistante).

Dans les méthodes dites aux différences finies, examinées précédemment, cette opération de discrétisation est appliquée de façon identique à l'espace et au temps, cependant d'autres approches existent.

Récemment, la discrétisation par la méthode des volumes finis a reçu un fort succès en mécanique des fluides en raison de ses innombrables avantages, notamment dans les problèmes liés aux lois de conservation hyperboliques et propagation des ondes en hydraulique à surface libre et en charge où, comme le sait-on, des problèmes d'apparition de discontinuités et formation de chocs, inhérent à ce type d'équations, sont fort et bien probables, ce qui pose des problèmes aux autres méthodes.

Dans la théorie, les résultats numériques obtenus en utilisant n'importe quel schéma devraient être proches de la solution exacte, à condition d'avoir un nombre suffisamment important de cellules. Ceci provient du fait que lorsque les points de grille sont de plus en plus

rapprochés, quelle que soit la manière d'estimer les propriétés et leur dérivée on aboutit au même résultat.

III.5.1. Facultés et puissance de l'approche aux volumes finis

Appliquée initialement aux problèmes d'équations elliptiques (équilibre et distribution de potentiels) et paraboliques (diffusion et transfert de masse), où *Patankar* (1980) fut le pionnier, la méthode des volumes finis s'est rapidement répandue dans la résolution des problèmes hyperboliques de propagation d'ondes de choc en mécanique des fluides. Sa puissance est puisée de son caractère et approche physique dans la formulation et résolution des problèmes, ce qui lui confère une supériorité face aux limitations des autres méthodes. On s'efforcera tout d'abord ici à montrer la faillibilité dans le cas général des méthodes aux différences finies et aux caractéristiques face au problème de continuité de la solution, quasi inévitable, et où le caractère conservatif du problème cesse d'être satisfait.

III.5.2. Limites de l'approche aux volumes finies et apparition de discontinuités

Il est connu que les lois de la dynamique des fluides peuvent être exprimées du point de vue mathématique soit sous forme différentielle ou bien intégrale (dite aussi faible). Quand un schéma numérique est appliqué à la forme différentielle, le domaine de la solution est discrétisé en un ensemble de points ou nœuds de calcul. Telle est l'approche de la méthode des différences finies (Hoffmann et Chiang, 2000).

La méthode des Volumes Finis est la méthode de choix pour les équations de conservation non linéaires. Nous allons en étudier quelques propriétés. Soit par exemple le système de lois de conservation en dimension deux d'espace :

$$\partial_t U + \partial_x f(U) + \partial_y g(U) = 0 \tag{III.13}$$

On se donne un maillage du plan. Les mailles sont notées Ω_j leur mesure de surface est S_j . La normale sortante est $\vec{n}_j = (n_j^x, n_j^y)$ Pour un maillage constitué de polygones, deux mailles voisines ont une interface qui est un segment de droite noté droite noté $\Sigma_{jk} = \Sigma_{kj}$. La normale sortante du côté Ω_j est notée $\mathbf{n}_{jk} = -\mathbf{n}_{kj}$.

La mesure de longueur au bord est de σ . On pourra confondre la maille Ω_j et son numéro j . De même pour l'interface jk . On commence par intégrer dans (III.4)

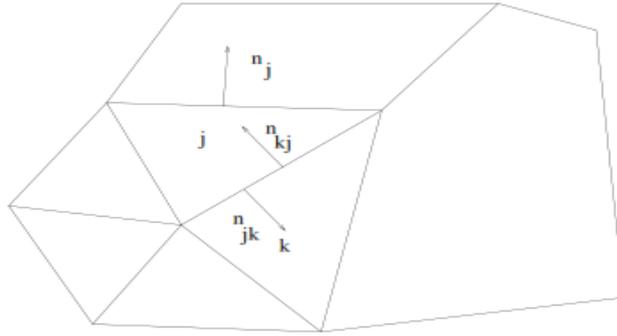


Figure (III.4) Les mailles peuvent être triangulaires, quadrangulaires ou autre

III.5.3. Formulation intégrale et propriétés des solutions faibles

A l’opposé de l’approche aux différences finies, si la forme intégrale est utilisée dans la formulation du problème, alors le domaine est discrétisé en volumes ou cellules. Subséquemment, les lois de conservation sous forme intégrale ou faible sont alors appliquées à ces volumes élémentaires. Reprenons l’équation (III.1) avec cette fois la prise en compte du terme source :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - G = 0 \tag{III.14}$$

La forme faible de l’équation (IV.4) sur un domaine $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ pondérant la dernière équation par une fonction $w(x, t)$ arbitraire de l’espace et du temps et en intégrant l’équation obtenue sur le domaine d’espace et du temps :

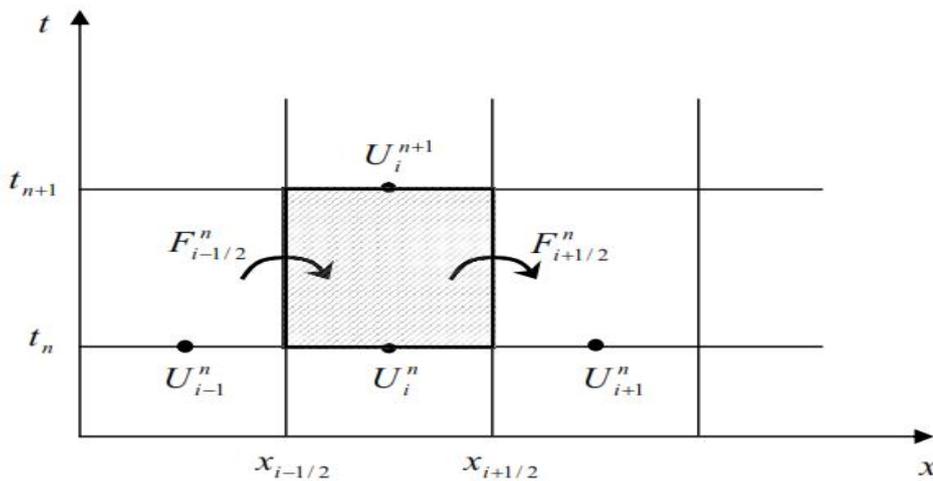


Figure (III.5) : Discrétisation en volumes finis et transfert de flux dans le plan x,t

- Remarque :
Ce schéma ainsi obtenu est très semblable à celui de la méthode des caractéristiques. Ultérieurement Zhao et Ghidaoui (2004) formulent et appliquent des

schémas aux volumes finis de type *Godunov* de premier et deuxième ordre pour la résolution de l'équation dynamique de et celle de continuité gouvernant le problème du coup de bélier

- ❖ Avant de passer aux détails de la modélisation numérique par schémas aux volumes finis des équations hyperboliques, il nous paraît nécessaire de souligner les lignes de démarcation entre la méthode des différences finies, des éléments finis et celle des volumes finis, pour mettre ainsi l'accent sur les avantages qu'offre cette dernière dans le domaine de la mécanique des fluides numérique. Les traits caractéristiques de chaque méthode sont alors donnés dans le tableau (III.1) ci-dessous.

Tableau (III.1)- Principe et particularités des principales méthodes de discrétisation numérique :

<i>Méthode de discrétisation</i>	<i>Principe de l'approche</i>	<i>Particularités</i>
<i>Différences finies (MDF)</i>	Approximation des dérivées intervenant dans les équations à l'aide de développement en série de Taylor	- Mise en œuvre simple pour une géométrie simple ; - Difficulté de traitement des géométries complexes ; - Pas toujours conservative.
<i>Éléments finis (MEF)</i>	Détermination d'un champ local à attribuer à chaque sous domaine (élément) pour que le champ global obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème.	- Approche très mathématique ; - S'adapte à des géométries quelconques ; - Difficultés pour résoudre les termes non linéaires ; - Très utilisée dans la mécanique des solides.
<i>Volumes finis (MVF)</i>	Bilan local des flux dans un petit volume de contrôle, et approximation des flux sur chaque face des cellules.	- Approche très physique ; - S'adapte à une géométrie quelconque - Plusieurs schémas pour la résolution des termes non linéaires hyperboliques. - Conservative (par sa formulation) ; - La base de la plupart des codes généralistes en mécanique des fluides.

A coté des difficultés de géométrie du domaine de calcul dont souffre la méthode des différences finies, où la technique de transformation de coordonnées du domaine physique au domaine numérique s'impose dans ce cas (*Bhallamudi et Chaudhry, 1992 ; Berreksi , 2012*), le problème réside en ce que l'information qu'elle prend en compte n'est que les valeurs prises par la variables U en différents points discrets de l'espace, c'est-à-dire que l'information entre ces points est perdue. La méthode aux volumes finis remédie alors à cela en considérant toute l'information, mais sous forme moyennée, contenue entre deux points, comme nous le détaillerons dans ce qui suit.

III.5.4. Formulation générale pour les lois de conservation

En une dimension d'espace, la méthode des volumes finis est basée sur la subdivision du domaine spatiale en un ensemble d'intervalles ou volumes finis, appelés aussi cellules de calcul. Après écriture des équations sous forme intégrale sur chaque cellule, une discrétisation des flux entrant et sortant de celle-ci permet de déterminer l'évolution du système en fonction du temps (*LeVeque, 2002*).

Considérons la loi de conservation hyperbolique suivante, qui est celle de l'advection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{III.15}$$

Cette équation est alors soumise à des conditions initiales ou aux frontières. Pour trouver sa forme conservative, intégrons cette équation sur un volume de contrôle formé dans ce cas par un segment centré autour de $x_i=i\Delta x$, où Δx st la taille de la cellule de la grille de calcul.

Les bornes de ce segment sont $x_{i-1/2}$, $x_{i+1/2}$ dans lequel l'indice "1/2" indique que ces points sont à l'interface avec les cellules voisines centrées x_{i-1} , x_{i+1} (Figure (III.1))

Dénotons la "i" ème cellule de la grille par :

$$C_i = ((x_{i-1/2}, x_{i+1/2})) \tag{III.16}$$

L'algorithme numérique comprend les étapes suivantes :

l'intégration formelle des équations du flux de fluide dans tous les volumes de contrôle du domaine numérique, la discrétisation impliquant la substitution des équations par des approximations de l'équation intégrée aux nœuds, représentant les phénomènes liés à l'écoulement tels que la convection, la diffusion et les sources. Ceci convertit les équations intégrales en système d'équations algébriques, la résolution des équations algébriques par une méthode itérative.

La première étape, l'intégration sur les volumes de contrôle, distingue la méthode des volumes finis de toutes les autres techniques. En effet, elle permet la conservation des

propriétés pour chaque volume. Ce rapport entre l'algorithme numérique et les principes physiques fondamentaux de conservation est un des intérêts principaux de la méthode FVM.

Un autre intérêt réside dans le fait que cette méthode est moins hermétique et plus facile d'approche que les deux autres méthodes (Versteeg et Malalasekara, 1995). L'inconvénient est qu'il est difficile de construire des schémas numériques d'ordre élevé (supérieur au deuxième ordre) en trois dimensions (Ferziger et Peric, 1999). Il n'y a aucune opération énorme de manipulations de matrices comme dans la FEM. La précision spatiale peut toujours être augmentée par l'amélioration de la grille et le raffinement du maillage. En effet, les points centraux peuvent bien représenter les propriétés aux nœuds. On peut récapituler les avantages et les inconvénients des différentes méthodes numériques selon le Tableau III-2.

Tableau III.2 : Avantages et des inconvénients des différentes méthodes numériques.

Méthode	Avantage	Inconvénient
MDF	Mathématiquement simple Facilité d'avoir des schémas élevés en terme d'espace et de temps.	La conservation de la masse n'est pas assurée.
MEF	Maximum d'informations Equations indépendantes pour chaque élément.	Complicée en termes de formulation mathématique. Temps de résolution long.
MVF	Simple en application pour les fluides. Assure la conservation de la masse.	Exactitude dépendant du maillage. Difficulté de construire des schémas numériques d'ordre élevé.

Conclusion :

Donc les différents modèles numériques ont été mis en œuvre pour prévoir les efforts générés lors du phénomène d'impact hydrodynamique. Une étude comparative des résultats des modèles a été menée. Des résultats provenant de la littérature ont également été considérés. Nous avons présenté la méthode la plus puissante pour la résolution numérique des équations caractérisant l'écoulement transitoire en charge, qui est la méthode aux volumes finis. Cette méthode nécessite de convertir les équations aux dérivées partielles en des équations ordinaires.

Nous avons également remarqué que les modèles qui sont basés sur la théorie de Wagner ont tendance à prédire des efforts légèrement plus importants que les modèles plus « généraux ». De plus, cette différence semble devenir plus importante lorsque les angles de pénétration augmentent. C'est sans doute le prix des hypothèses simplificatrices à la base de la théorie de Wagner (linéarisation des conditions aux limites et de l'équation de Bernoulli) Et les caractéristiques de ce réseau (pente, diamètre, longueur) utilisé seront différentes selon les cas afin de déterminer les limites du modèle.

Chapitre IV :

*Simulation du model mathématique
des volumes finis par le logiciel
MATLAB.*

Chapiter IV : Simulation du model mathématique des volumes finis par le logiciel MATLAB

Introduction :

Dans ce qui a précédé, un exposé détaillé de la théorie de base des écoulements en charge non permanent a été présenté ainsi que les méthodes numériques permettant de résoudre les équations du mouvement gouvernant le phénomène. Dans le but de tester les performances de ces modèles numériques, le présent chapitre traitera alors la mise en application et l'expérimentation des schémas aux volumes finis dans des cas d'occurrence des régimes non permanents d'écoulements associés dans les installations hydrauliques. Les cas étudiés choisis découlent entre autres des problèmes réels rencontrés en pratique, ce qui confère ainsi au travail une double dimension, théorique et pratique.

IV.1. Discrétisation du modèle mathématique par volumes finis

Après avoir mis en exergue le comportement de la solution des équations du mouvement transitoire en charge, nous nous pencherons dans ce qui suit sur l'application du concept de la méthode des volumes finis à la discrétisation numérique de ces équations. Les schémas sur lesquels nous focaliserons notre travail sont en l'occurrence, le schéma à double pas de *Richtmyer Lax-Wendroff* et le schéma original de *Godunov*, avec prévision des flux par la solution exacte et approché du problème de *Riemann* aux interfaces des cellules.

IV.1.1. Application du schéma de Richtmyer Lax-Wendroff

Nous appliquerons à présent la méthode des volumes finis avec le schéma de *Richtmyer Lax-Wendroff* au système hyperbolique d'équations de conservation qui régit les écoulements instationnaires en charge. Reprenons alors l'écriture de ce système :

- Nous appliquerons à présent la méthode des volumes finis avec le schéma au système hyperbolique d'équations de conservation qui régit les écoulements transitoire a surface libre:

$$\text{On a } Q = V S$$

Avec S la section de la collecteur est connu si on a la pent i et la pente de ligne de charge

$$j \text{ ansi : } j = \frac{V^2}{K^2 R^{\frac{3}{4}}} \text{ avec la formule de strickler}$$

$$\text{Ou } j = \frac{V^2}{C^2 R} \text{ avec la fourmule de chezy}$$

D'après les deux équations de base conservation de la masse et équation dynamique on a :

Premièrement rappel des hypothèses :

- fluide homogène et incompressible ;
- problème filaire : à chaque abscisse, le niveau de l'eau est horizontal d'une rive à l'autre ;
- absence d'apports ou de départs latéraux (problème conservatif).

Alors on après le développement la formule en débit Q :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (IV.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{g.S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{g.S} \frac{\partial (\frac{Q^2}{S})}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - i = j = \frac{-Q^2}{K^2 S^2 R^{4/3}} \end{array} \right. \quad (IV.2)$$

La formulation équivalente en vitesse V :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (V S)}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (IV.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - i = j = \frac{-V^2}{K^2 R^{4/3}} \end{array} \right. \quad (IV.4)$$

- Considérons alors une conduite de longueur L sur laquelle une discrétisation en volumes finis est appliquée. On aura alors N cellules centrées en x_i et dont chaque face, de gauche et de droite, se situe respectivement en $x_{i+1/2}$, $x_{i-1/2}$

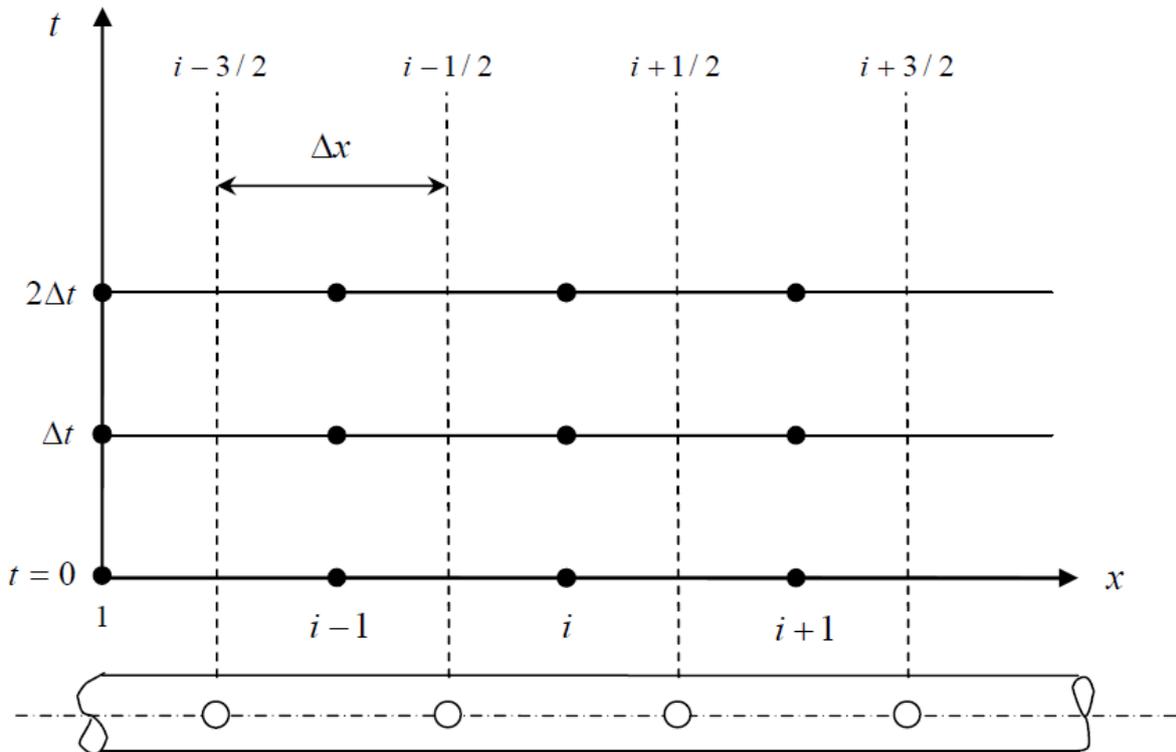


Figure IV.1 : présente les cellules de la méthode volumes finis

- Il importe alors de calculer les flux numériques arrivant le long des interfaces au cours de chaque pas de temps. L'étape de prédiction des flux suivant la méthode de s'effectuera sur les deux interfaces de chaque cellule.

IV.2 La simulation sur MATLAB :

Les systèmes hydrauliques sont de plus en plus complexes et pouvoir les simuler avec les systèmes mécaniques associés et leurs systèmes de contrôle, permet d'optimiser leurs performances.

De plus, SimHydraulics propose des moyens pour équilibrer le compromis entre fidélité du modèle et rapidité de la simulation.

Simulink est une plate-forme de simulation multi-domaine et de modélisation de systèmes dynamiques. Il fournit un environnement graphique et un ensemble de bibliothèques contenant des blocs de modélisation qui permettent le design précis, la simulation, l'implémentation et le contrôle de systèmes de communications et de traitement du signal.

Simulink est intégré à MATLAB, fournissant ainsi un accès immédiat aux nombreux outils de développement algorithmique, de visualisation et d'analyse de données de MATLAB.

Points forts du MatLab/Simulink :

- Modélisation de systèmes hydrauliques
- Création de blocs personnalisés avec le langage Simscape
- Recalage de paramètres
- Simulation avec des données réelles.

Fonctions utilisées :

- SimHydraulics
- Simscape
- Simulink Design Optimization

Les données nécessaires sont du même type :

- géométrie du lit (mineur + majeur) en un certain nombre de sections de données ;
- Rugosité (mineur, majeur), pour les mêmes sections ;
- hydrogramme de crue à l'amont du bief $Q(t)$;
- Loi de débit à l'aval du bief ou relation $y(t)$;
- ligne d'eau initiale (à $t = 0$).

On a les caractéristiques d'une conduite(PVC) comme un exemple sur le tableau V.1 suivant :

Caractère	Valeur
Diamètre de la conduite	800 mm
Longueur	200 m
Rugosité	0.2 mm
Célérité des ondes	1000 m/s
Débit	0.89 m ³ /s

Source : mémoire de fin d'étude 2007 en assainissement

❖ D'après les équations de Navier Stokes :

- Équation de continuité appelée alors équation d'incompressibilité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

- Équation de bilan de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$

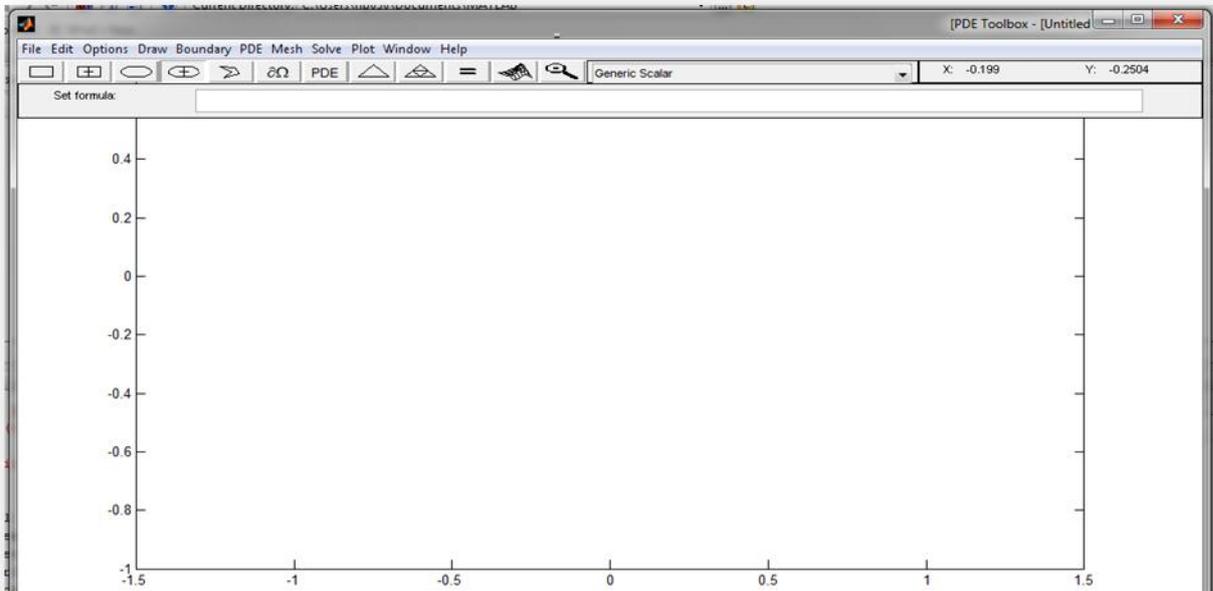
D'après le développement de l'équation de Navier Stokes on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\text{div}(0.5(\text{grand}(u))) + 0.39u = g$$

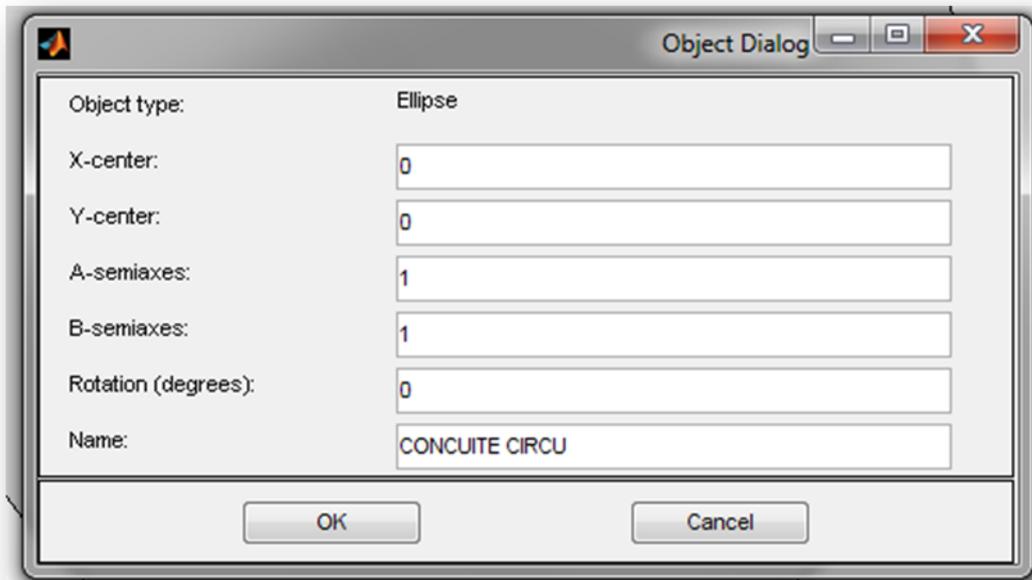
IV.2.1 L'application sur logiciel MATLAB :

Dans ce travail on a test et faire une application de la simulation avec la méthode de volume finis sur logiciel MATLAB on utilise l'application « pdetool » ; alors est directement affiche une fenêtre de la simulation comme la figure IV.2 suivant :

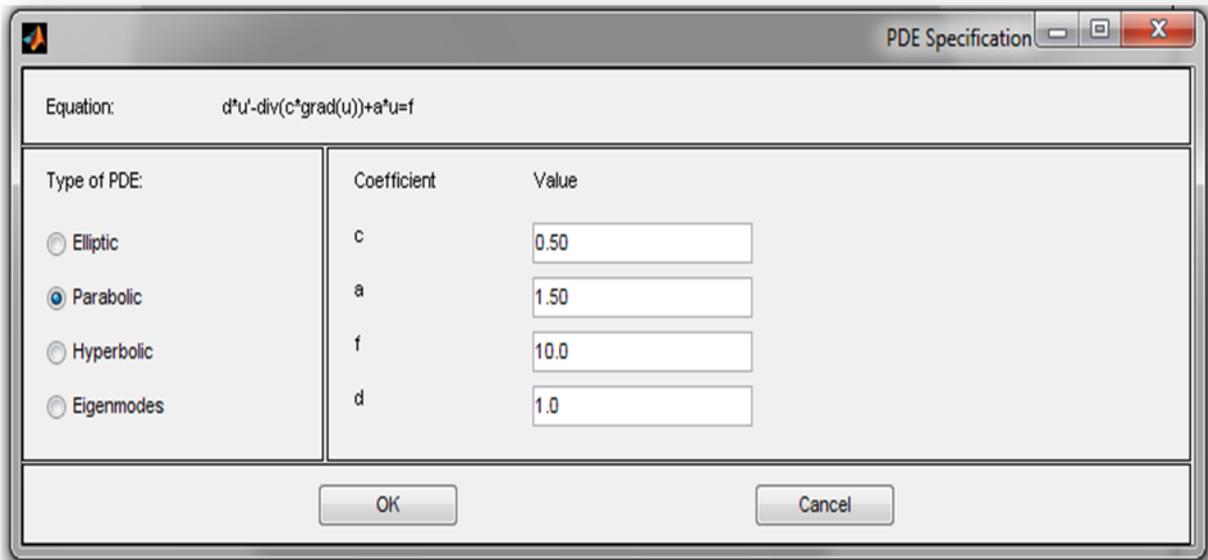
Figure IV.2 : représente la première fenêtre de paramètre



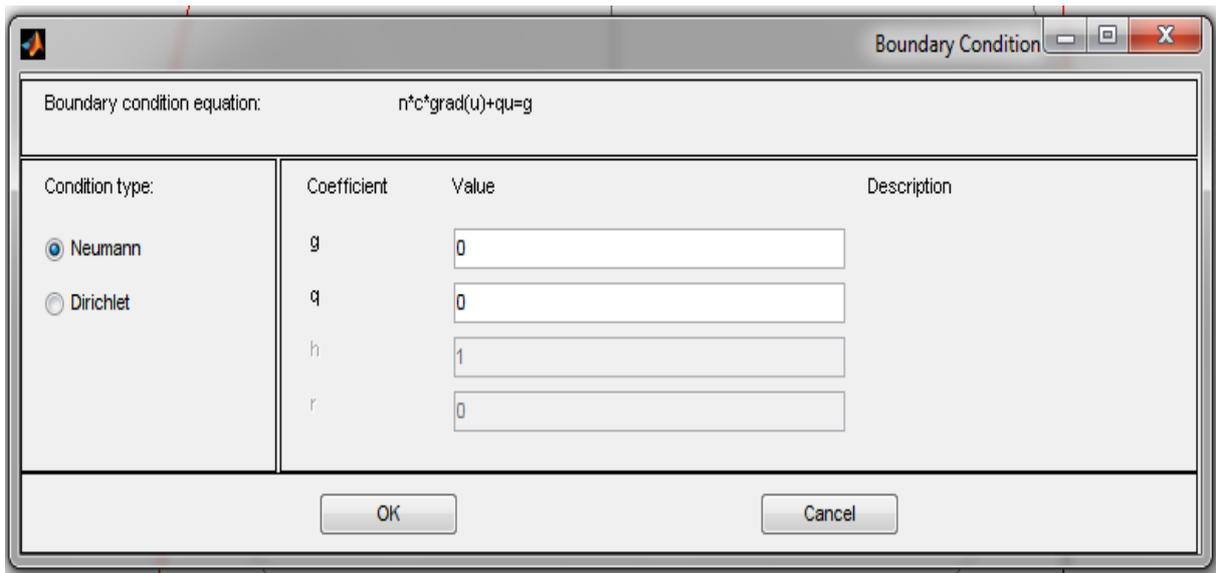
- En suite dans la fenetre précédant on selectionné les type de conduite qui on a modélise on a utilise « object Dialog » comme suivant :



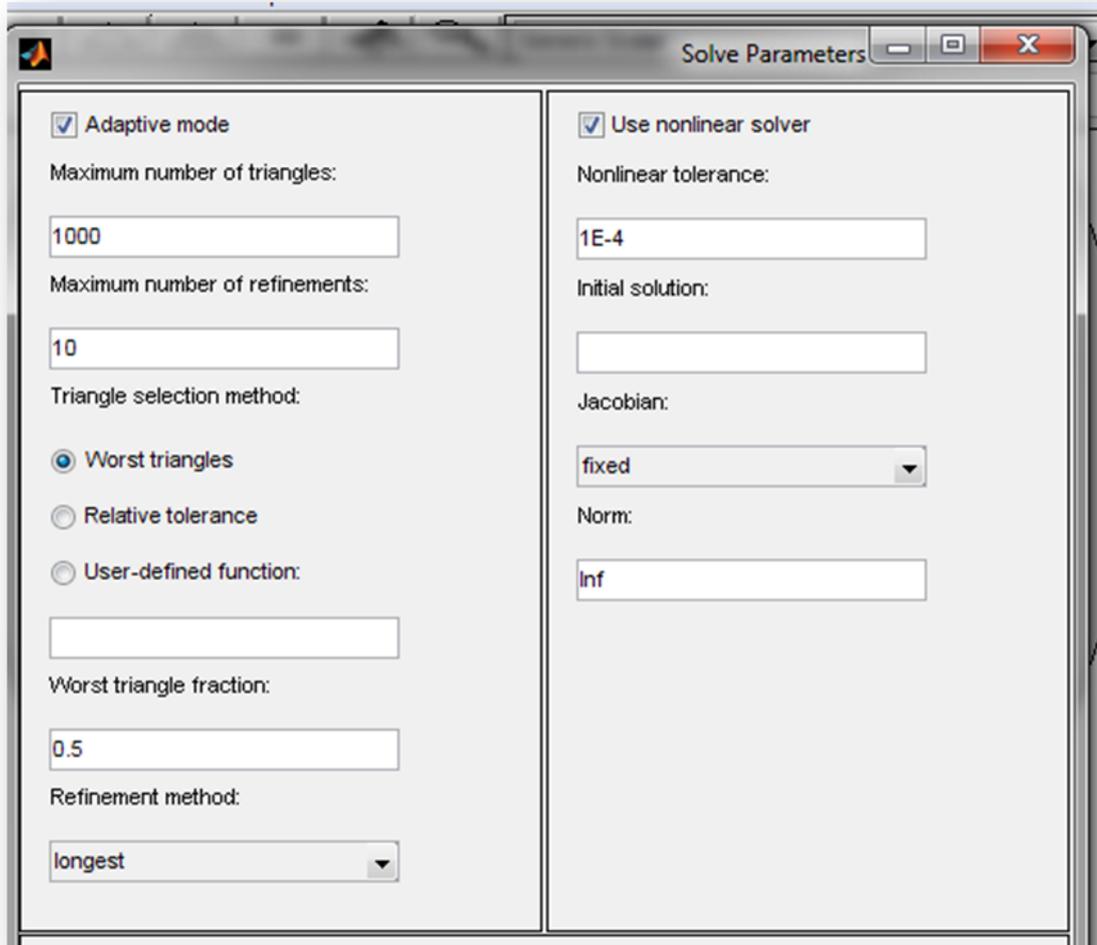
- D'après le choix le type de la conduite et la définition les parametre on passer a de l'équation d'écoulement, l'ogiciel est définis l'équation sur forme suivant : $\mathbf{d} \cdot \mathbf{u}' - \text{div}(\mathbf{c} \cdot \text{grad}(\mathbf{u})) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$ et on définis les parametre ($\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ et \mathbf{f}), on a représenter sur la fenetre suivant :



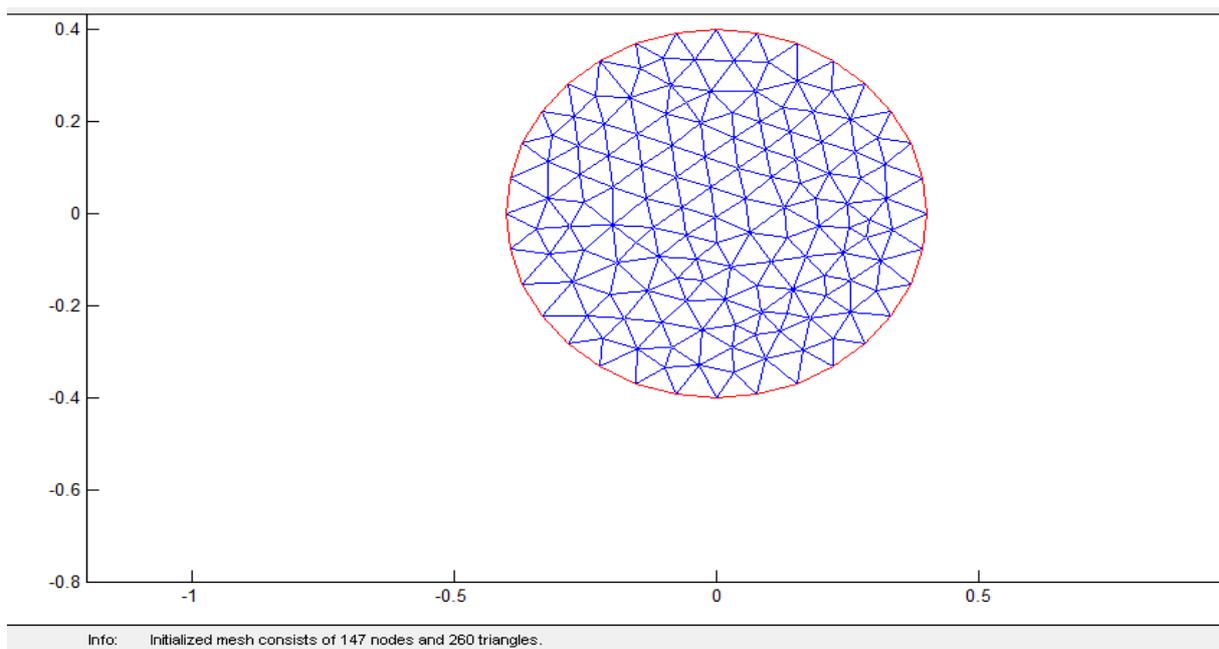
- Bien sur les conditions de « boundary » :



- D'après terminé la déclaration des paramètres en passe au maillage mais avant nous avons quelque paramètre if faut la définis, la figure suivante a expliqué comment entre les paramètres :



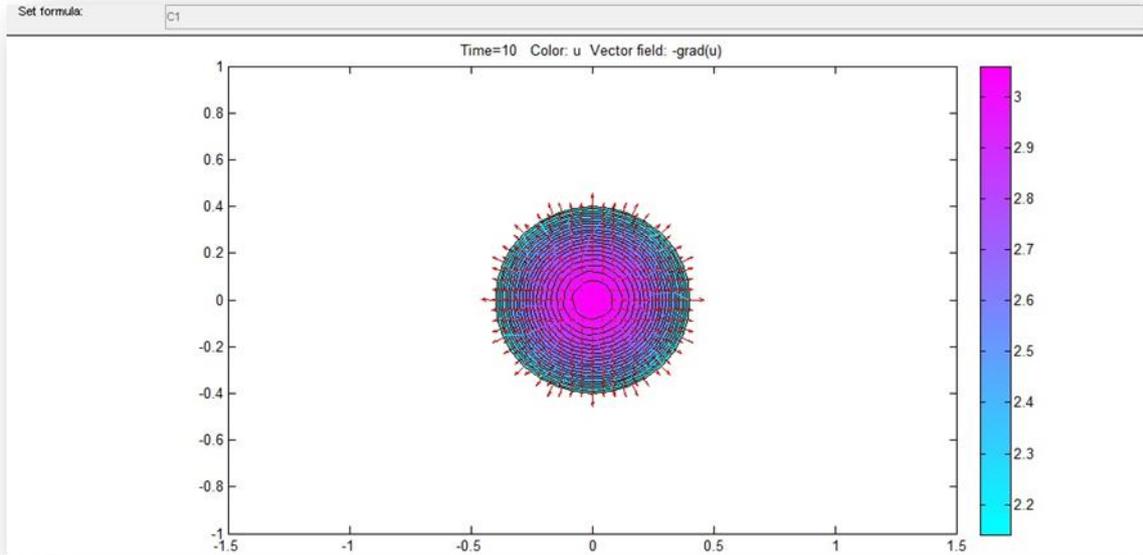
- Alors il affiché automatiquement le maillage comme suivant :



IV.3. Les résultats de simulation :

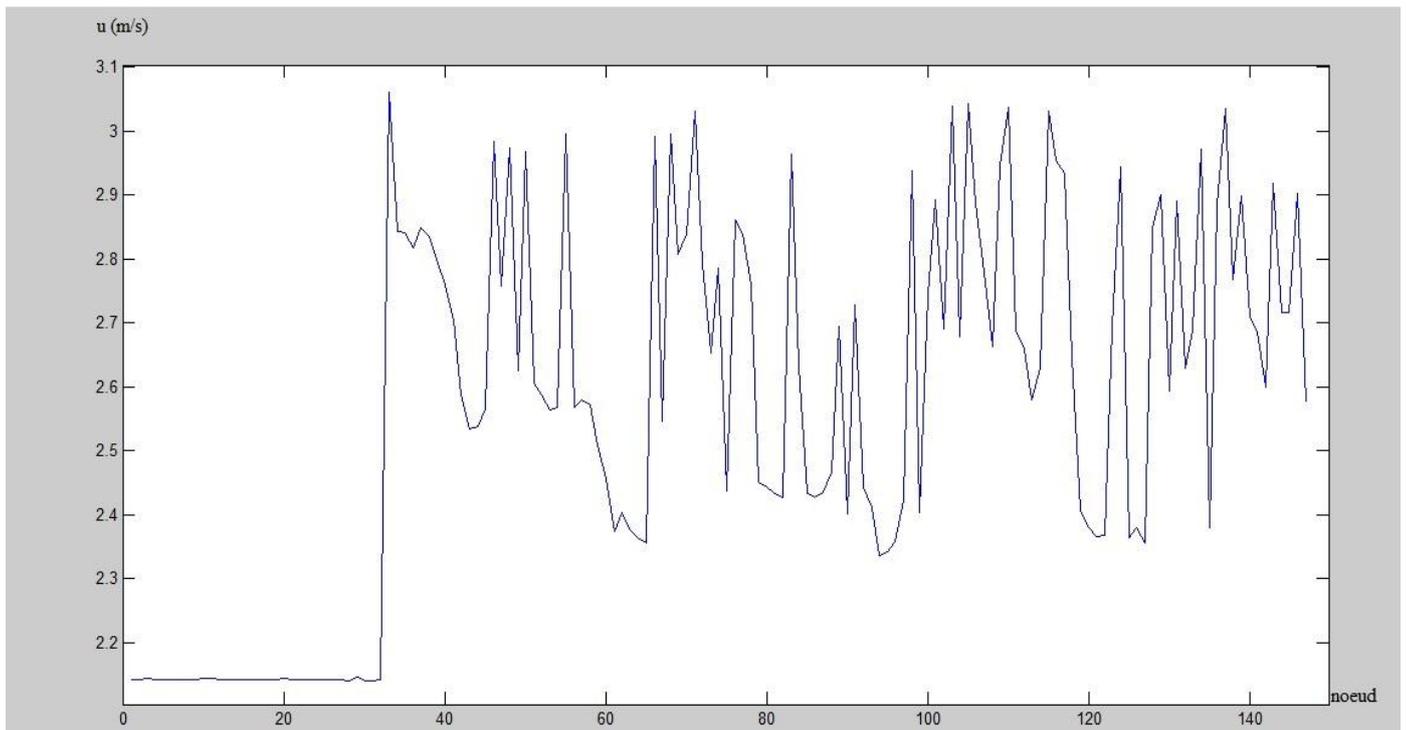
On exécuté les l'application il ma donné plusieurs résultats premièrement l'altération des vitesses u (m/s) dans **Tableau annexe I**, d'après le champ des vitesses en deux dimension (2D) ; dans la figure suivant

Figure IV.3 : la répartition de champ de vitesse 2D



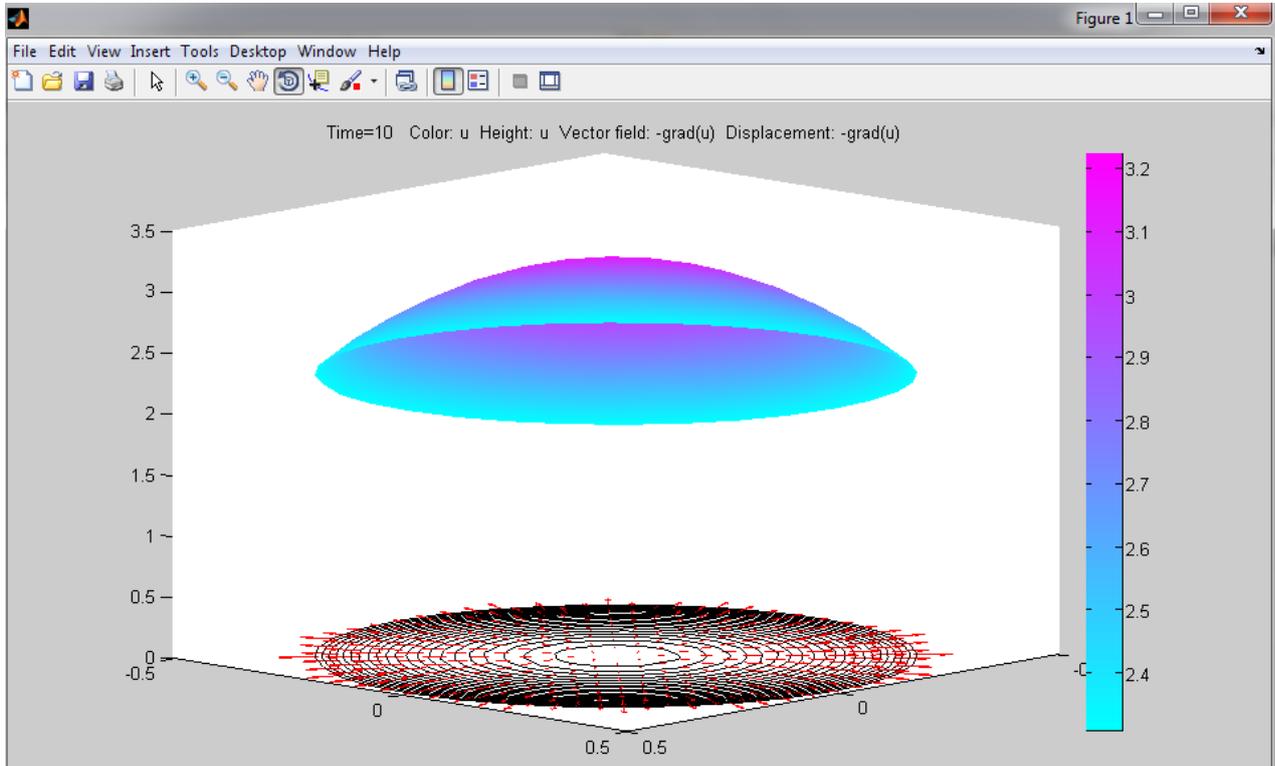
- Nous avons a le graphe qui représente la répartition de vitesse dans une conduite circulaire avec un écoulement en charge non permanent ;

La figure IV.4: le graphe de répartition des vitesses u (m/s)=f (chaque nœud).



- On suite la représentation en trois dimension 3D est donné des formations sur la répartition de vitesse sur la conduite et la forme d'écoulement comme présente sur la figure suivant :

Figure IV.5 : la répartition des vitesses en 3D



IV.4 Interprétation des résultats :

Nous avons dix (10) itérations chaque itération représente un pas de temps qui est aussi 10 :

Dans le $T=0 \rightarrow u(0) = 0$

Dans la première itération : qui est représenté dans le graphe (vert) nous avons pour un premier temps une vitesse voisine 2.96 m/s pour les nœuds 0-33 ou la vitesse attend est maximum qui est 3.06 m/s puis nous remarquons une diminution de vitesse ou éloignons au nœud 33 qui représente la centre de la conduite et comme on remarque dans le nœud 50 et ses voisin la vitesse est presque égale au vitesse maximum car elle si proche de centre, ce qui prouve le figure IV.4.

Dans les autres graphiques nous remarquons qui ont le même allure mais avec des vitesses plus importantes à chaque fois on augmente le pas et l'itération la vitesse augmente considérablement au départ et puis d'une façon légère mais ce que ont peut aussi tirer toujours

ce que la vitesse maximale reste toujours dans le nœud 33 qui est logiquement le centre qui possède la vitesse max.

Cette augmentation de vitesse dans chaque itération dus aux permis veines qui démarrent et qui ont une grosse influence ce qui freine l'écoulement mais plus tard il sera plus stable c'est pour ça nous voyons que la vitesse change pas beaucoup.

Comment nous le savons tous et on vient de le prouver la vitesse est en maximum au centre de conduite et a chaque fois en allons vers les parois la vitesse se diminue dus au frottement des veines entre eux et aux frottements des veines contre les parois et vis versa.

Conclusion :

Les résultats obtenus en employant la méthode numérique aux volumes finis ont permis de tester un cas et d'étudier une variante par la modification des données d'entrée pour une conduite gravitaire en charge, afin de choisir la solution optimale. Ils ont permis également de calculer le paramètre recherchés (vitesse) en fonction du temps aux divers points du réseau quelle que soit sa complexité. La validation des résultats numériques obtenus par le schéma de *Godunov*. Il a été mis en relief l'influence de l'étranglement symétrique interposé à la base du ballon sur la réponse du système et la forme des ondes élastiques naissant à la suite de cette pratique. Des déformations sur les fronts d'ondes ont été observées ce qui pourrait être néfastes à la conduite.

CONCLUSION GENERALE :

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à l'étude numérique des écoulements transitoires en charge. Il est incarné ainsi dans tout esprit d'hydraulicien ce que présente l'apparition de ce régime, Par conséquent, une étude soignée des régimes transitoires dans les conduites forcées s'apparente comme nécessité imposante et constituant un test ultime à chaque installation hydraulique.

La modélisation mathématique de ce type d'écoulement par l'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles dit de *Saint-Venant*. En physique mathématique, ce système appartient à la classe des équations hyperboliques, gouvernant la quasi-totalité des écoulements transitoire de gaz et de liquides (en charge et à surface libre).

Parmi tant de modèles numériques s'appêtant bien à simuler ces phénomènes, récemment la méthode des volumes finis s'est présentée comme étant la plus performante et a ouvert de nouvelles perspectives de recherche. Ceci revient à son approche très physique et sa formulation mathématique qui jouit de nombreux avantages déterminants dans les problèmes hyperboliques, connus en théorie des coniques par l'apparition de discontinuités dans les solutions. Par suite, notre travail s'est focalisé sur l'application de cette méthode pour une simulation correcte des régimes aussi complexes que ceux non stationnaires.

Pour le traitement des conditions aux limites du domaine de calcul, nous avons introduit dans ce travail une technique basée sur le concept de « maillage excentré ». Comparativement à la technique usuelle évoquée en littérature, ce concept permet à notre connaissance une meilleure manipulation des équations formées par les organes hydrauliques.

La modélisation numérique ainsi faite du phénomène par la méthode des volumes finis a été mise en application.

Reference bibliographer:

- ABBOTT, M.B: "An introduction to the method of characteristics". Thames and Hudson, 1966.
- AFSHAR M. H. et ROHANI M. (2008), "Water hammer simulation by implicit method of characteristic". International Journal of Pressure vessels and piping, 85, pp 851-859.
- BERREKSI, A. : "Modélisation et simulation numérique des écoulements non permanents dans des canaux à ciel ouvert ". Thèse de Doctorat ès Sciences en Hydraulique, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 2012.
- BHALLAMUDI, S. M. et CHAUDHRY, M. H. (1992), "Computation of flows in open-channel transitions". Journal of Hydraulic Research Vol. 30, N° 1, pp. 77-93.
- CAMICHEL, C., EYDOUX, D. et GARIEL, M. : "Etude théorique et expérimentale des coups de bélier". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, Tome 8, pp. 1-251, 1916 et Tome 8, pp. 1-145, 1917.
- CARLIER, M. : "*Hydraulique générale et appliquée*". Eyrolles, Paris, 1980.
- CHAUDHRY, M. H. : "Open Channels Flow". Deuxième édition, Springer, 2008.
- CHAUDHRY, M. H. : "*Applied hydraulic transients*". Van Nostrand, 1979.
- COMOLET, R. : "Mécanique expérimentale des fluides". Masson, Paris, 1990.
- CUNGE, J. A. : "Simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux".

Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.

- DE ALMEIDA, B., KOELLE, E. : "Fluid transients in pipe networks". Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, Glasgow, 1992.

Ferziger et Peric, « Explicit methods for 3D transient free-surface flows, *J. Hydraul. Engng., ASCE* 116(8), 1013-1034. HAGER, W.H. (1992). Spillways shockwaves and air entrainment. Review and recommendation, Commission Internationale des grands Barrages, *CIGB*, Bulletin 81, 1999. »

- GHIDAOU, M. S., ZHAO, M., MCLNNIS, D. A. et AXWORTH, D. H. (2005), "A review of Water hammer Theory and Practice". Transactions of the ASME, Vol. 58, pp. 49-76.
- HOFFMANN, K. A. et CHIANG, S. T. : "Computational Fluid Dynamics". Volume 1. Engineering Education System, USA, 2000.
- GUINOT, V. : "Wave Propagation in Fluids : Models and numerical techniques". ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc, 2008.

- HOFFMANN, K. A. et CHIANG, S. T. : "Computational Fluid Dynamics". Volume 2. Engineering Education System, USA, 2000.
- *Hwang R.R* (1991) numerical simulation of vertical forced plume in cross flow of stably stratified fluid. Journal of fluids engineering ASME Vol.117, pp 696_705
- FENNEMA, R. J. et CHAUDHRY, M. H. (1989), "Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows". Journal of Hydraulic Research Vol. 27, N° 3, pp. 321–332.
- Mémoire de fins d'étude « assainissement de la ville d'oum el djellil wilaya de medea(2007) »
- Mémoire de magister : « MODÉLISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS EN CHARGE , *AMARA Lyes* 2013 »
- MEUNIER, M. : "Les coups de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression". Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts, 1980.
- FERZIGER J.H, PERIC M., (1999) computational methods for fluid dynamics, published by springer, Germany, 389 p.
- LEVEQUE, RANDALL, J : "Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems". Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- PATANKAR, S. V.: "Numerical heat transfer and fluid flow". Series in Computational and Physical Processes in Mechanical and Thermal Sciences, Taylor and Francis, 1980.
- OURAGH, Y. : "Ecoulements forcés en hydraulique". Deuxième partie. Office des Publications Universitaires, OPU, Alger, 1994.
- SZYMKIEWICZ, R. (1995), "Method to Solve 1D Unsteady Transport and Flow Equations".Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 121(5), pp. 396-403.
- VERSTEEG. H.K , MALALASEKARA .W, (1995) An introduction computational fluid dynamics the finite volume method, Longman Group Ltd, 257 p.
- WYLIE, E. B. et STREETER, V. L.: "Fluid transients". MacGraw-Hill, 1978.
- YOUNG, Il KIM : "Advanced Numerical and Experimental Transient Modelling of Water and Gas Pipeline Flow Incorporating Distributed and Local Effects". Thèse de Doctorat de Philosophie (PhD), Université d'Adelaïde, Australie, 2008.
- ZHAO, M. et GHIDAOU, M. S. (2004), "Godunov-type solutions for water hammer flows".Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 130(4), pp. 341-348.
- ZIENKIEWICZ, O. C. et TAYLOR, R. L.: "The Finite Element Method". Volume 1, 2 et 3, Butterworth-Heinemann, 2000.

Annexes

