

Higher National School of Hydraulic

The Library

Digital Repository of ENSH



المدرسة الوطنية العليا للري

المكتبة

المستودع الرقمي للمدرسة العليا للري



The title (العنوان):

Modélisation numérique des écoulements transitoires dans les conduites en charge.

The paper document Shelf mark (الشفرة) : 6-0021-14

APA Citation (APA توثيق):

Bouabdeli, Imad Eddine (2014). Modélisation numérique des écoulements transitoires dans les conduites en charge[Thèse de master, ENSH].

The digital repository of the Higher National School for Hydraulics "Digital Repository of ENSH" is a platform for valuing the scientific production of the school's teachers and researchers.

Digital Repository of ENSH aims to limit scientific production, whether published or unpublished (theses, pedagogical publications, periodical articles, books...) and broadcasting it online.

Digital Repository of ENSH is built on the open DSpace software platform and is managed by the Library of the National Higher School for Hydraulics. <http://dspace.ensh.dz/jspui/>

المستودع الرقمي للمدرسة الوطنية العليا للري هو منصة خاصة بتقييم الإنتاج العلمي لأساتذة و باحثي المدرسة.

يهدف المستودع الرقمي للمدرسة إلى حصر الإنتاج العلمي سواء كان منشورا أو غير منشور (أطروحات، مطبوعات، مبداعات، مقالات، الدوريات، كتب....) و بثه على الخط.

المستودع الرقمي للمدرسة مبني على المنصة المفتوحة DSpace و يتم إدارته من طرف مديرية المكتبة للمدرسة العليا للري.

كل الحقوق محفوظة للمدرسة الوطنية العليا للري.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'HYDRAULIQUE -ARBAOUI Abdellah-

DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE URBAINE

MEMOIRE DE MASTER

Pour l'obtention du diplôme de Master en Hydraulique

Option : Alimentation en Eau Potable

THEME DU PROJET :

**MODELISATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS
TRANSITOIRES DANS LES CONDUITES EN CHARGE**

PRESENTE PAR :

BOUABDELI imad eddine

Devant les membres du jury

Nom et Prénoms	Grade	Qualité
M ^{me} MEDDI Hind	M.C.B	Président
M ^r AMMARI Abdelhadi	M.C.B	Examineur
M ^r BOUFEKANE Abdelmadjid	M.A.A	Examineur
M ^{me} HOULI Samia	M.A.A	Examinatrice
M ^{me} MOKRANE Wahiba	M.A.A	Promotrice

Novembre - 2014

Remerciement

Avant tout propos, nous remercions « Dieu » le tout puissant qui nous a donné sagesse et santé pour faire ce modeste travail.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements :

** À Mon promotrice Madame MOKRANE Wahiba qui m'a bien voulu m'encadrer durant ce mémoire de fin d'études.*

** Aux membres de Jury qui, malgré leurs occupations, ont bien voulu examiner et discuter mon travail ; je les en Remercie vivement.*

** A Madame MEDDI Hind de m'avoir enseigné et d'avoir honoré ce jury.*

** A Monsieur AMMARI Abdelhadi de m'avoir enseigné et d'avoir honoré ce jury.*

** A Monsieur BOUFEKANE Abdelmadjid de m'avoir enseigné et d'avoir honoré ce jury.*

** A Madame HOULI Samia de m'avoir enseigné et d'avoir honoré ce jury.*

** A Monsieur Mostafa Ingénieur en hydraulique qui m'a accueilli dans son bureau d'étude et de m'avoir guidé.*

** Remercie Mr. JAAFAR Ingénieur en Hydraulique de m'avoir aidé.*

** L'ensemble du personnel et enseignants de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Hydraulique (ENSH), qui ont veillé à ma formation.*

MERCI

BOUABDELI IMAD EDDINE

❧ Dédicaces ❧

A mes très chers parents qu'ont toujours été là pour moi et qui m'ont donné un magnifique modèle du beur et de persévérance. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A mes sœurs

A mon frère : Oussama

A mes oncles maternels et paternels.

A mes amies : Ibrahim , Ahmed,

Hocine , Djamel , Khalil et Didine.

A mes amies : et tous mes amis de l'école.

ملخص:

فيما يخص أنظمة المياه، فإن التغيرات في التدفق المستمر لسائل في أنبوب، غالبا ما تؤدي إلى حدوث تغيرات مفاجئة في الضغط وتؤدي إلى ما يسمى الجريان الوتقي بالضغط.

تقدم دراستنا نمذجة رقمية لظاهرة التدفقات العابرة في الأنابيب تحت الضغط (المطرقة المائية). يتم استخدام طريقة الفرق المحدود أو طريقة الخصائص من أجل حل معادلتين: معادلة حفظ الكتلة (الاستمرارية) ومعادلة الحفاظ على كمية الحركة (الديناميكية). في نهاية هذه الدراسة النظرية، استخدمنا برنامج محاكاة الظواهر غير مستقرة.

الكلمات الرئيسية: تدفق عابرة - المطرقة المائية - المحاكاة العددية - معادلة الاستمرارية - المعادلة الديناميكية - طريقة الخصائص.

Résumé:

Dans les installations hydrauliques, Les changements du régime permanent d'écoulement d'un fluide dans une conduite, entraînent souvent des brusques variations des pressions et donnent naissance à ce qu'on appelle les écoulements transitoires en charge.

Notre étude présente une modélisation numérique du phénomène des écoulements transitoires dans les conduites en charge (coup de bélier). La méthode des différences finies ou La méthode des caractéristiques est utilisée pour résoudre les équations de « Saint-Venant », qui sont composées d'un couple d'équations: l'équation de conservation de la masse (continuité) et l'équation de conservation de la quantité du mouvement (dynamique), enfin, nous avons utilisé le programme « AFT Impulse » pour la simulation des phénomènes transitoires.

Mots-clés : écoulement transitoire – Coup de bélier – Simulation numérique – Equation continuité – Equation dynamique – Méthode des caractéristiques.

Abstract:

In the hydraulic installations, the changes of the steady flow of fluid in a pipe often lead to sudden variations in pressure and give what is called the transient flows in closed conduit.

This study presents a numerical modeling of the phenomenon of transient flows in pipes support (water hammer), the finite difference method (F.D.M) or the characteristics method (C.M), is used to solve the equations of « Saint-Venant» which consist of a pair of equations: the equation of conservation of mass (continuity) and the equation of conservation of momentum (dynamic), at the end of this theoretical study, we used the « AFT Impulse » program for the simulation of transient phenomena.

Key words: transient flow – Water Hammer – Numerical simulation – Continuity equation – Dynamic Equation – Method of characteristics.

SOMMAIRE

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre I : généralité sur l'écoulement transitoire en charge

I.1.Introduction	3
I.2. types d'écoulements.....	3
I.2.1. Ecoulement permanent et non permanent	3
I.2.2. Ecoulement uniforme et non uniforme	3
I.3. la Phénomène du coup de bélier.....	4
I.4.Causes du coup de bélier	4
I.5.Risques dus aux coups de bélier	4
I.5.1.Cas de la surpression	5
I.5.2.Cas de dépression	5
I.5.3.Fatigue de la canalisation	5
I.6.analyse physique des écoulements transitoires en charge.....	5
I.6.1.Cas de la fermeture instantanée d'une vanne sur une conduite d'adduction gravitaire	5
I.6.2. Cas d'arrêt d'une pompe sur une conduite de refoulement	13
I.7. Evolution des ondes de pression le long de la conduite :	15
I.8.Le temps de réflexion et les Valeurs équivalentes pour une conduite composée	16
I.8.1.Le temps de réflexion.....	16
I.8.2.les Valeurs équivalentes.....	16
I.9. Conclusion.....	17

Chapitre II : modélisation mathématique de l'écoulement transitoire en charge

II.1.Introduction.....	18
II.2. Equations différentielles de base	18

II.2.1. Hypothèses :	18
II.2.2. Equation de la quantité de mouvement.....	18
II.2.3. Equation de continuité :	21
II.3.Équations simplifiées	27
II.4. propriétés du système d'équations des écoulements transitoires en charge .	28
II.4.1. Instationnaire :	28
II.4.2.Unidimensionnalité :	28
II.4.3. Hyperbolicité :	29
II.5. Analyse des paramètres.....	31
II.5.1. Paramètre D :	31
II.5.2. Paramètre ρ :	31
II.5.3. Paramètre a :	31
II.5.4.Paramètre λ :	32
II.6. Conclusion	34

Chapitre III : modélisation numérique de l'écoulement transitoire en charge

III.1.Introduction	35
III.2.La méthode des différences finies	35
III.2.1. Approximation en différences finies	36
III.2.2. Schémas explicites et implicites	37
III.2.2.1. Schéma explicite.....	38
III.2.2.2. Schéma implicite	38
III.2.3. Quelques remarques sur la méthode différence finie [15]	39
III.3. Méthode des caractéristiques	39
III.3.1.Discrétisation des équations de l'écoulement transitoire par la méthode des caractéristiques	39
III.3.2.Integration du système différentielle	42
III.3.3.Conditions aux limites	46
III.3.3.1.Conditions initiales :	46
III.3.3.2.Conditions limite amont :	46

III.3.3.3. Conditions limite aval :	46
III.4. Conclusion	46

Chapitre IV : simulation numérique de l'écoulement transitoire en charge

IV.1. Introduction	47
IV.2. Description générale de la Simulation avec AFT Impulse (pour le calcul du coup de bélier)	47
IV.2.1. Algorithmique de programmation	47
IV.2.2. Les caractéristiques d'AFT Impulse [9]	47
IV.2.3. Les composants et Accessoires dans le logiciel (AFT Impulse)	48
IV.2.4. Résultats donnée par le logiciel AFT Impulse	49
IV.3. Les différentes étapes fonctionnement d'utilisation du logiciel (AFT Impulse)	50
IV.4. Les fenêtres du logiciel AFT Impulse	50
IV.5. Discrétisation des conduites	51
IV.6. Modèle d'application :	52
IV.6.1. Données de la simulation	52
IV.6.1.1. Les caractéristiques du système	52
IV.6.1.2. Les caractéristiques thermo-hydrauliques du fluide :	52
IV.6.1.3. Options de simulation :	53
IV.6.2. Les résultats graphiques pour un temps de fermeture rapide ($0 < T_f < 2L/a$)	53
IV.6.3. Les résultats graphiques pour un temps de fermeture lente ($T_f > 2L/a$) 56	
IV.6.4. Interprétation des résultats graphiques	59
IV.7. Conclusion	60
Conclusion générale	61
Références bibliographiques	

Liste des tableaux

Tableau (I.1) : Récapitulation de l'évolution des écoulements en fonction du temps	12
---	----

Liste des figures

Chapitre I : généralité sur de l'écoulement transitoire en charge

Figure (I.1) : Exemple d'Aménagement schématisé pour la description du phénomène du coup de bélier	6
Figure (I.1-a): propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t \leq t_1$)	6
Figure (I.1-b): propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_1 < t < t_2$)	8
Figure (I.1-c) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_5 = L/a$)	8
Figure (I.1-d) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_2 < t < t_3$)	9
Figure (I.1-e) : de propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_5 = 2L/a$)	9
Figure (I.1-f) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_3 < t < t_4$)	10
Figure (I.1-g) : de propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_5 = 3L/a$)	10
Figure (I.1-h) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_4 < t < t_5$)	10
Figure (I.1-i) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_5 = 4L/a$)	11
Figure (I.2) : Effet des pertes de charge	12
Figure (I.3) : Les étapes d'un cycle de variations de pression.	13
Figure (I-4) : Evolution de la pression le long de la conduite [4].	15
Figure (I-5) : Calcul de T_r pour conduite composée	16

Chapitre II : modélisation mathématique de l'écoulement transitoire en charge

Figure (II.1) : volume élémentaire d'une conduite (Equation dynamique)	19
Figure (II.2) : Elément élémentaire d'une conduite	22
Figure (II.3) : Le diagramme de Moody	33
Figure(II.4) : Rugosité absolue [13]	33

Chapitre III : modélisation numérique de l'écoulement transitoire en charge

Figure (III.1) : Maillage du domaine de calcul	37
Figure (III.2) : Schéma explicite	38
Figure (III.3) : Schéma implicite	38
Figure (III.4) : Schéma des caractéristiques	42
Figure (III.5) : Discrétisation de la conduite	43

Liste des figures

Chapitre IV : simulation numérique de l'écoulement transitoire en charge

Figure(IV.1) : Schema du modèle dans le logiciel (AFT Impulse).....	49
Figure(IV.2) : Les fenêtres primaires dans le logiciel AFT Impulse.	51
Figure(IV.3) : Les stations de calculs.....	51
Figure(IV.4) : Schéma du modèle d'application dans AFT Impulse	52
Figure(IV.5) : Variation de la hauteur dans le réservoir 1	53
Figure(IV.6) : Variation de la hauteur au point médian de la conduite 1.....	54
Figure(IV.7) : Variation de la hauteur dans la conduite 1 à la vanne.....	54
Figure(IV.8) : Variation de la vitesse dans le réservoir 1.....	54
Figure(IV.9) : Variation de la vitesse au point médian de la conduite 1.....	55
Figure(IV.10) : Variation de la vitesse dans la conduite 3 à la vanne.....	55
Figure(IV.11) : la hauteur max et min le long de la conduite	56
Figure(IV.12) : Variation de la hauteur dans le réservoir 1	57
Figure(IV.13) : Variation de la hauteur au point médian de la conduite 1.....	57
Figure(IV.14) : Variation de la hauteur dans la conduite 1 à la vanne.....	57
Figure(IV.15) : Variation de la vitesse dans le réservoir 1.....	57
Figure(IV.16) : Variation de la vitesse au point médian de la conduite 1.....	58
Figure(IV.17) : Variation de la vitesse dans la conduite 1 à la vanne.....	58
Figure(IV.18) : la hauteur max et min le long de la conduite	59



INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

En physique, un régime transitoire est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable ou un régime établi (périodique). Un régime transitoire peut apparaître lors d'une modification d'un système

En hydraulique, on appelle régime transitoire, un état d'écoulement qui se manifeste entre deux régimes stationnaires, autrement dit c'est un écoulement varié, où les variables d'état (H , v) changent. Il peut se produire soit dans un canal à ciel ouvert, soit dans une conduite à écoulement en charge par accroissement ou décroissement du débit, et dans le sous sol.

Dans la conduite, le phénomène transitoire résulte généralement du changement des caractéristiques hydrauliques d'un régime d'écoulement permanent que ça soit la vitesse ou bien la pression en fonction du temps, et il en résulte la création des ondes de pression ou de dépression qui se propagent tout au long du conduit.

Dans les réseaux hydrauliques, figurent divers éléments qui peuvent engendrer la variation de l'écoulement, donc création d'un régime transitoire, parmi ces éléments on peut citer :

- L'ouverture ou la fermeture des vannes (instantanée ou trop rapide).
- La mise en marche ou l'arrêt des pompes dans les conduites en charge par refoulement.

Comme pour tout problème de la mécanique des fluides, et de physique en général, ce problème obéit à des concepts mécanistes et est décrit en conséquence par un modèle mathématique bien défini. Ce dernier étant obtenu par l'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le milieu fluide étudié. L'application de ces principes permet alors de formuler les équations du mouvement régissant l'écoulement étudié qui sont dans ce cas un système d'équations aux dérivées partielles, Le système d'équations aux dérivées partielles d'écoulement transitoire en charge est de type hyperbolique non linéaire, cette système peut être résoudre par la méthode des différence différences finies ou bien la méthode des caractéristiques.

Pour atteindre ces différents objectifs, nous avons organisé notre mémoire en quatre chapitres :

Le premier chapitre représente les différents types d'écoulements et l'analyse physique des écoulements transitoires en charge.

Le deuxième chapitre représente les équations qui permettent d'étudier tous les phénomènes transitoires que l'on rencontre en écoulement sous pression ont été établis par Saint Venant. Ces équations dérivent par l'application de deux lois principales à savoir : La loi de la conservation de la masse (équation de continuité) et la loi de la conservation de la quantité de mouvement (l'équation dynamique).

Le troisième chapitre représente deux méthode numérique de résolution l'une la méthode de différences finies et l'autre la méthode des caractéristiques, et ça pour analyser le phénomène transitoire dans les installations hydrauliques réelles comme celui de la propagation des ondes élastiques dans les conduites en charges .

Le quatrième chapitre, nous avons utilisé le programme AFT Impulse pour la simulation des phénomènes transitoires sur un modèle d'installation hydraulique. Enfin des résultats obtenus de la variation de la hauteur piézométrique et de la vitesse d'écoulement au cours du temps avec leurs interprétations.



CHAPITRE I

**GENERALITE SUR L'ECOULEMENT
TRANSITOIRE EN CHARGE**

I.1.Introduction

Dans le présent chapitre, nous allons définir quelques types d'écoulement que l'on rencontrera au cours de notre travail, puis en se penchant sur l'analyse physique du coup de bélier.

I.2. types d'écoulements

I.2.1. Ecoulement permanent et non permanent

➤ Ecoulement permanent

Si les conditions d'écoulement, telle que la pression, la vitesse ou le débit en un point donné de la conduite restent invariables dans le temps, alors l'écoulement est dit permanent.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

➤ Ecoulement non permanent ou transitoire

L'écoulement du liquide est dit non permanent ou transitoire si les grandeurs physiques (P, v ou Q) caractérisant l'écoulement dans chaque point de l'espace varient dans le temps.

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial P}{\partial t} \neq 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$$

I.2.2. Ecoulement uniforme et non uniforme

Un écoulement est dit uniforme lorsque la vitesse du fluide à un instant donné, à une même direction et une même intensité en tous points de ce fluide.

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Un écoulement est dit non uniforme si la vitesse du fluide varie d'une section à l'autre.

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$$

I.3. la Phénomène du coup de bélier

Le coup de bélier étant un cas particulier du régime transitoire, est un phénomène oscillatoire qui se manifeste dans les conduites en charge à écoulement gravitaire ou par refoulement.

On entend aussi sous le terme « coup de bélier » un écoulement non permanent du liquide accompagné des variations pratiquement sensibles de la pression qui peuvent devenir dangereuses pour la tuyauterie. Ces variations résultent d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement.

I.4. Causes du coup de bélier

Le coup de bélier est un phénomène oscillatoire dont les causes les plus fréquentes sont les suivantes :

- La mise en marche ou l'arrêt des pompes dans les conduites en charge par refoulement.
- L'ouverture ou la fermeture des vannes (instantanée ou trop rapide).
- Le remplissage ou la vidange d'un système d'AEP.
- La rupture de l'alimentation électrique dans une station de pompage est cependant la cause la plus répandue du coup de bélier.
- Variation rapide du niveau d'eau dans le réservoir (Changement du niveau d'aspiration de l'eau).

I.5. Risques dus aux coups de bélier

Les conséquences du coup de bélier peuvent être néfastes, elles deviennent de plus en plus dangereuses à mesure que les paramètres modificateurs deviennent importants (variation de pressions et de débits dans le temps).

Ces phénomènes se produisent dans une conduite en charge, peuvent provoquer des risques à la suite d'une dépression ou d'une surpression engendrée par les manœuvres brusques. [3]

I.5.1.Cas de la surpression

C'est une conséquence du coup de bélier engendrée par une pression importante se produisant à la suite d'une fermeture instantanée ou rapide d'une vanne de sectionnement ou bien à la suite d'une dépression causée par l'arrêt brusque d'une pompe. Si la pression totale c'est-à-dire la pression en régime permanent majorée de la valeur de surpression due au coup de bélier dépasse la pression maximale admissible des tuyaux il y a risque de rupture de ce dernier déboîtement des joints (les anneaux d'étanchéité seront délogés).

I.5.2.Cas de dépression

C'est une conséquence du coup de bélier engendrée par l'apparition d'une pression relative négative, à la suite d'un arrêt brusque d'une pompe ou d'une ouverture instantanée d'une vanne de sectionnement. Si cette pression devient inférieure à $10mce$, il se produira une poche de cavitation. S'il y a une forte dépression la canalisation peut être aplatie par implosion et les joints aspirés. Le phénomène de cavitation, une fois apparu, peut provoquer la détérioration de la couche d'enduit intérieur du tuyau.

I.5.3.Fatigue de la canalisation

En régime transitoire les alternances des surpressions et dépressions qui sont une conséquence inévitable du phénomène provoquent la fatigue du matériau de la canalisation même si leur amplitude est faible.

I.6.analyse physique des écoulements transitoires en charge

Dans ce qui suit, on analysera ce phénomène pour les deux cas suivants :

- Cas de fermeture d'une vanne sur une conduite d'adduction gravitaire.
- Cas d'arrêt d'une pompe sur une conduite de refoulement.

I.6.1.Cas de la fermeture instantanée d'une vanne sur une conduite d'adduction gravitaire

Nous allons considérer le cas d'un système hydraulique composé d'un réservoir « R » dont la surface libre du plan d'eau est exposé à la pression atmosphérique, ce dernier est muni d'une conduite horizontale « AC » de longueur « L » à caractéristiques uniques, celle-ci est équipée d'une vanne à son extrémité aval, son rôle consiste au contrôle du débit transité par la conduite.

Au premier temps, la vanne est totalement ouverte, l'écoulement est permanent ayant en chaque section « M » du tronçon, une vitesse moyenne « v_0 » et une pression moyenne « H_0 » constantes dans le temps. [11]

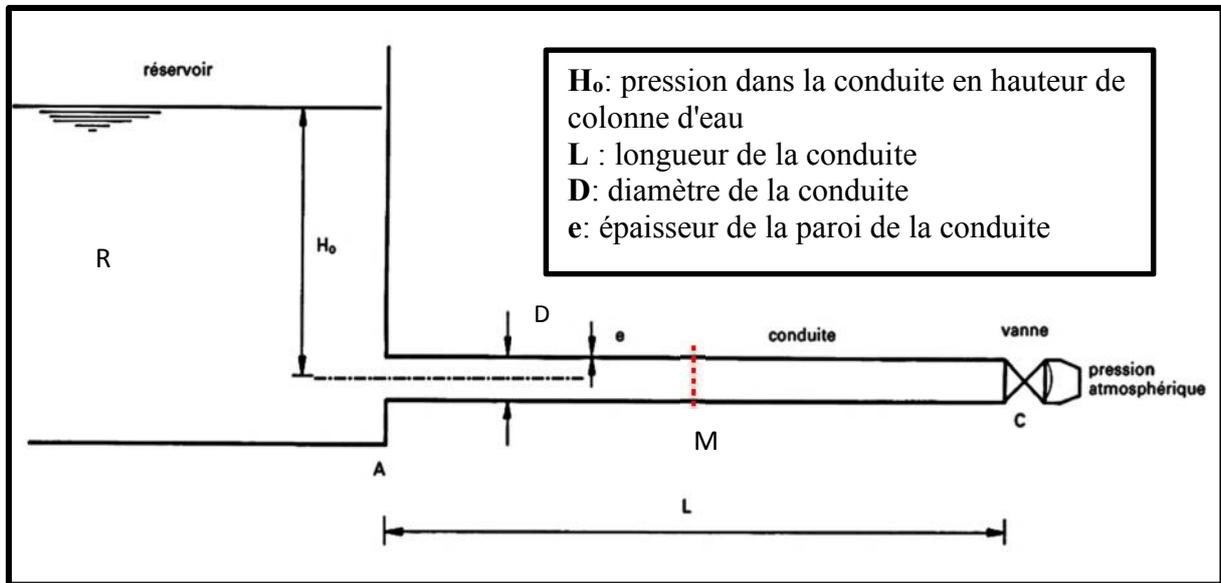


Figure (I.1) : Exemple d'Aménagement schématisé pour la description du phénomène du coup de bélier

A l'état initial voir **figure (I.1-a)** l'eau s'écoule dans la conduite, du réservoir vers la vanne, à la vitesse v_0 .

Dans cet exemple, toutes les pertes de charge sont négligées.

La pression est donc uniforme le long de la conduite et égale à :

$$P_0 = \rho g H_0$$

Avec : $(t_1 = 0 ; t_2 = \frac{L}{a} ; t_3 = \frac{2L}{a} ; t_4 = \frac{3L}{a} ; t_5 = \frac{4L}{a})$

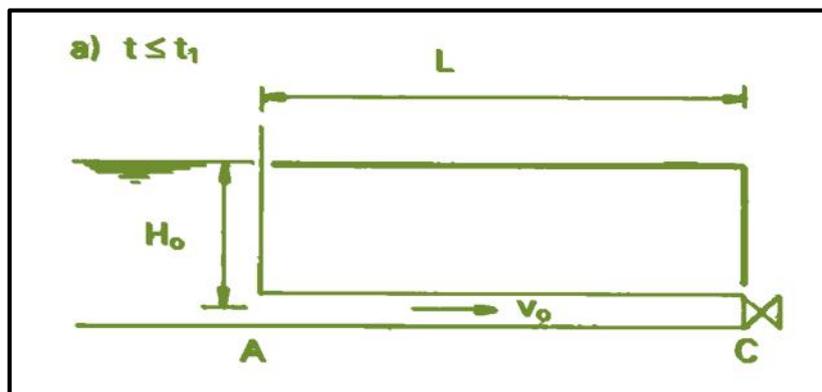


Figure (I.1-a) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t \leq t_1$)

Phase 1:

A l'instant $t = t_1$ la vanne est fermée.

La fermeture est supposée instantanée. Quelques instants après (**Figure (I.1-b)**), l'eau contenue dans le tronçon [MC] est immobile alors que l'eau du tronçon [AM] continue de s'écouler vers la vanne à la vitesse v_0 . Elle n'a pas encore reçu l'information : «La vanne est fermée ».

Cette information va se déplacer de la vanne vers le réservoir à une vitesse (a) qui est la vitesse de propagation du son dans l'eau.

Elle se calcule par la formule d'Allievi :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho(1/K_e + D/eE)}}$$

Avec:

- a : célérité de propagation de l'onde en (m / s) ;
- K_e : Module de compressibilité du liquide en (N /m²) ;

Pour l'eau : $K_e = 2.2 \cdot 10^9$ (N/m²) ;

- D : diamètre de la conduite en (m) ;
- e : épaisseur de la paroi de la conduite en (m) ;

E : module d'élasticité du matériau de la conduite en (N /m²) ;

- acier : $210 \cdot 10^9$ (N/m²) ;
- fonte : $120 - 170 \cdot 10^9$ (N/m²) ;
- plastiques : $1 - 2 \cdot 10^9$ (N/m²) ;

Pour les plastiques, valeurs très variables, se renseigner auprès des fabricants.

L'énergie cinétique de l'eau arrêtée est transformée en énergie élastique (en énergie potentiel sous forme d'ondes de surpression) dont une partie sert à déformer la conduite (expansion) et l'autre à comprimer l'eau. La pression dans ce tronçon de conduite va donc croître d'une valeur Δh par rapport à la pression du réservoir.

Cette augmentation se calcule, selon la loi de Joukowsky, par :

$$\Delta h = \frac{a \cdot v_0}{g}$$

Avec :

- Δh : maximale de la pression due à la fermeture de la vanne ou bien la valeur de surpression en (m)
- a : vitesse de propagation de l'onde (la célérité) en (m / s)
- v_0 : vitesse de l'écoulement dans la conduite avant la fermeture en (m / s)
- g : accélération due à la pesanteur = 9.81 (m / s²)

L'onde de pression due à la fermeture se propage, à la vitesse a , de la vanne vers le réservoir.

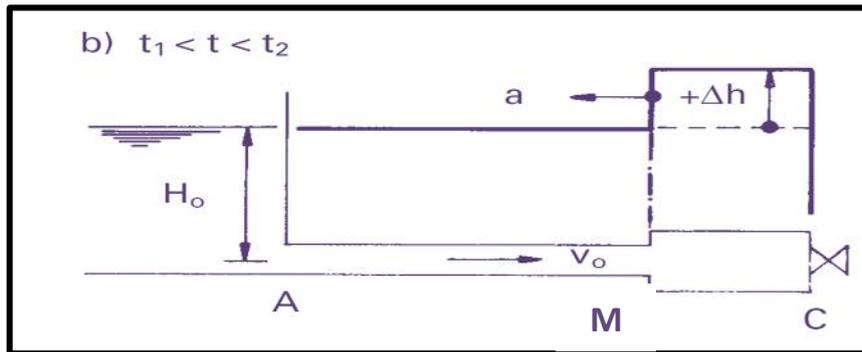


Figure (I.1-b) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_1 < t < t_2$)

À l'instant $t_2 = L/a$ l'onde de pression atteint le réservoir (Figure (I.1-c)).

L'eau est arrêtée sur toute la longueur de la conduite, et il règne dans celle-ci une pression uniforme $H_0 + \Delta h$. à l'entrée de la conduite est toujours sous la pression initiale H_0 imposée par le plan d'eau du réservoir.

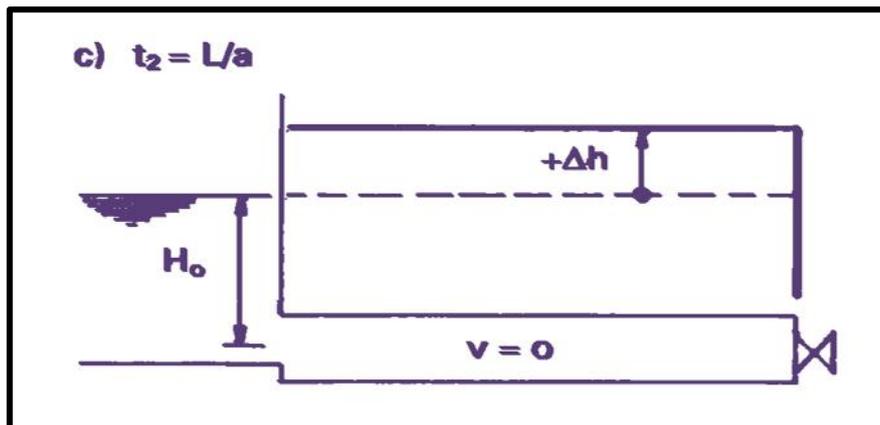


Figure (I.1-c) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_2 = L/a$)

Phase 2:

De manière à rétablir l'équilibre entre les pressions du réservoir et de la conduite, l'eau de celle-ci va commencer à s'écouler avec une vitesse égale à v_0 , mais de sens opposé.

L'énergie cinétique de la phase précédente, stockée sous forme d'énergie élastique de déformation est restituée. La pression se rétablit à sa valeur initiale depuis le réservoir jusqu'à la vanne à mesure que l'eau se met en mouvement vers le point A. L'onde de pression a été réfléchiée par le plan d'eau du réservoir (Figure (I.1-d)).

L'onde de pression change de signe lors de sa réflexion sur le plan d'eau.

Une onde négative égale à $-\Delta h$ va se superposer à la surpression existante et l'annuler.

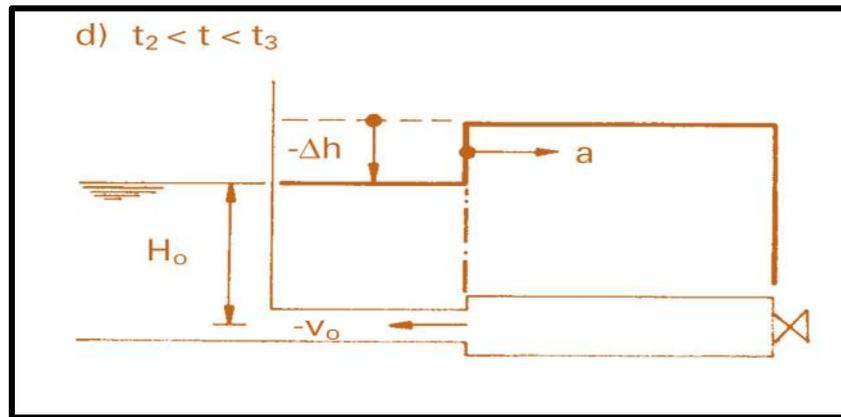


Figure (I.1-d) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_2 < t < t_3$)

A l'instant $t_3 = 2L/a$ toute l'eau est en mouvement, à la vitesse v_0 en direction du réservoir et la pression est rétablie sur toute la longueur à sa valeur initiale H_0 (Figure (I.1-e)).

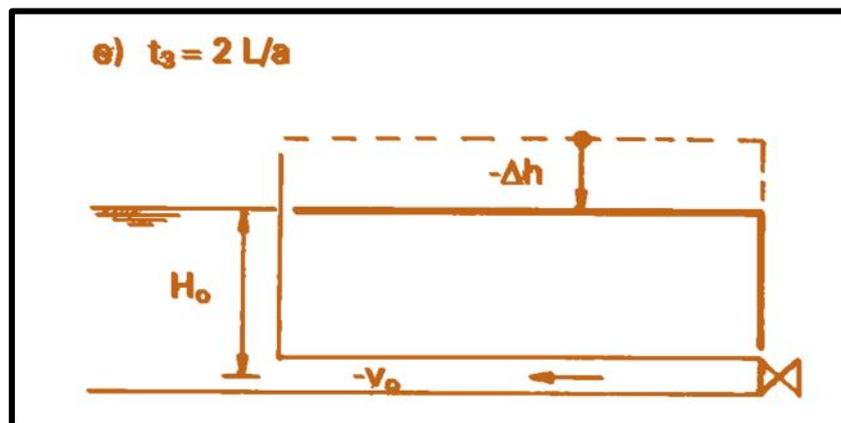


Figure (I.1-e) : de propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_3=2L/a$)

Phase 3 :

Par inertie l'eau va continuer à s'écouler vers le réservoir diminuant ainsi la pression dans la conduite. L'onde négative égale à $-\Delta h$ est réfléchiée par la vanne et va se cumuler à la pression H_0 existante.

La pression va s'établir à la valeur $H_0 - \Delta h$, de la vanne vers le réservoir (Figure (I.1-f)). L'onde de pression conserve son signe lors de sa réflexion sur la vanne.

Parallèlement à cette diminution de pression, la vitesse de l'eau va passer de v_0 à zéro. A nouveau l'énergie cinétique va être stockée sous forme d'énergie élastique provoquant des déformations égales mais de signe opposé à la première phase.

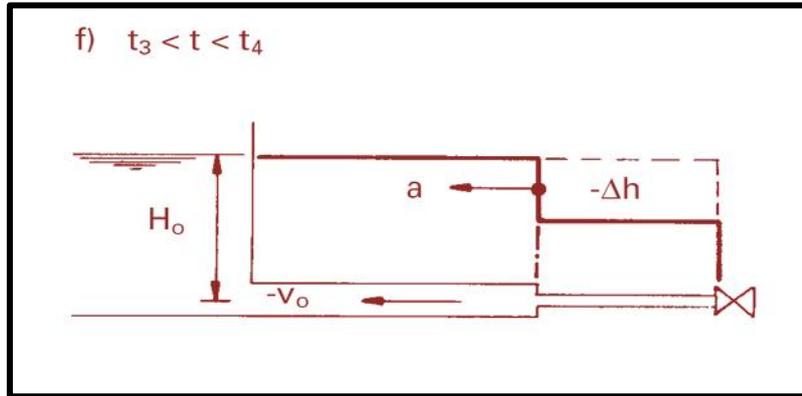


Figure (I.1-f) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_3 < t < t_4$)

A l'instant $t_4 = 3 L / a$ la vitesse de l'eau est nulle et la pression égale à $H_0 - \Delta h$ sur toute la longueur de la conduite Figure (I.1-g).

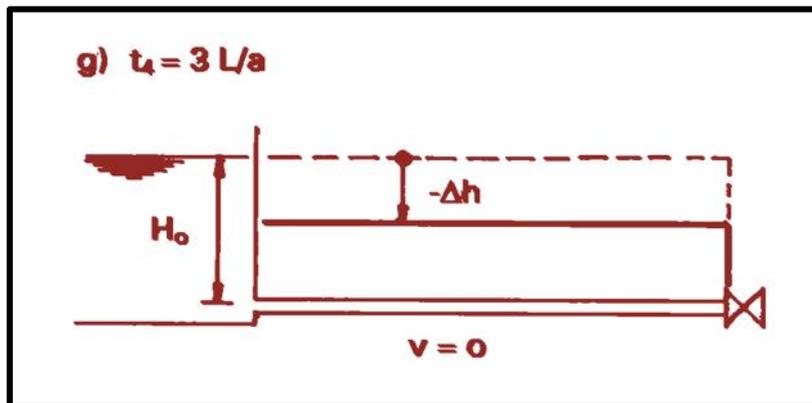


Figure (I.1-g) : de propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_5=3L/a$)

Phase 4 :

Une nouvelle fois l'égalisation des pressions entre le réservoir et l'entrée de la conduite va induire la mise en mouvement de l'eau, cette fois en direction de la vanne (Figure (I.1-h)).

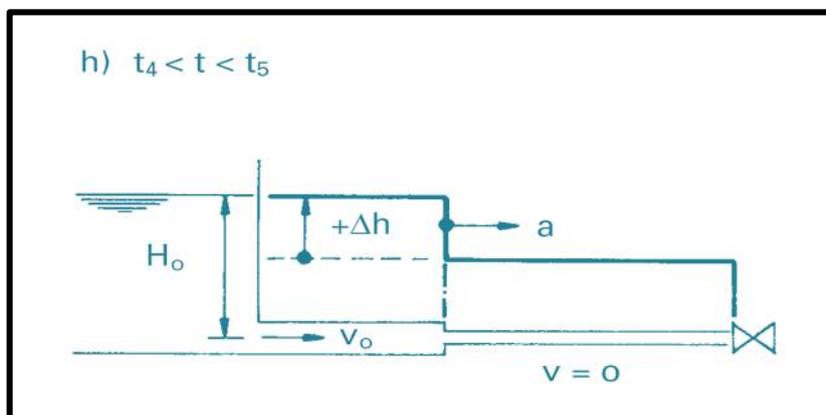


Figure (I.1-h) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_4 < t < t_5$)

A l'instant $t_5 = 4L/a$ la totalité de l'eau circule vers la vanne à la vitesse v_0 et la pression est restaurée à sa valeur initiale H_0 (Figure (I.1-i)).

La situation est identique à celle du moment de la fermeture. Un cycle est terminé et un autre, identique, va lui succéder

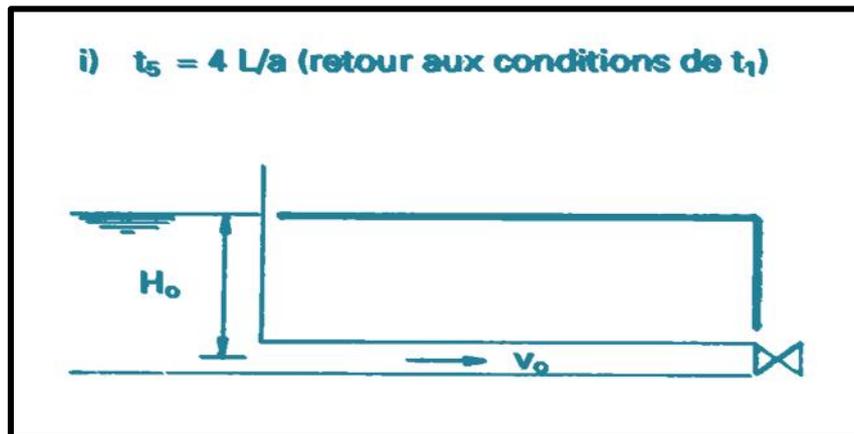
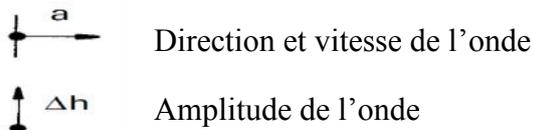


Figure (I.1-i) : propagation des ondes pour fermeture instantanée ($t_5=4L/a$)



➤ Le temps nécessaire à l'onde pour parcourir la conduite dans les deux sens est appelé période ou temps de réflexion. Il est égal à : $T_r = \frac{2L}{a}$.

Avec :

- T_r : temps de réflexion en (s)
- L : longueur de la conduite en (m)
- a : vitesse de propagation de l'onde en (m / s)

➤ Dans la réalité, les pertes par frottement entre l'eau et les parois de la conduite ainsi que l'énergie dissipée lors des déformations de l'eau et de la conduite font que la succession des cycles va s'amortir jusqu'à atteindre un état stable, caractérisé par $v = 0$ et $h = H_0$.

Au cours d'un cycle la vitesse varie entre $-v_0$ et v_0 et la pression entre $H_0 - \Delta h$ et $H_0 + \Delta h$ avec comme valeurs moyennes $v = 0$ et $H = H_0$ qui sont les valeurs finales.

➤ Le coup de bélier est un phénomène cyclique de période $4L/a$. Les pertes de charge induisent un amortissement du phénomène en diminuant l'amplitude après chaque oscillation voir le Figure (I.2).

- Dans le cas d'une ouverture instantanée de la vanne il est possible de construire la séquence des variations de vitesses et de pressions selon un schéma semblable.
- Les valeurs finales seront $v = v_0$ et $H = H_0$. Par analogie avec le cas de la fermeture, la vitesse variera entre $v = 0$ et $v = 2 v_0$ et la pression entre $H_0 - \Delta h$ et $H_0 + \Delta h$.

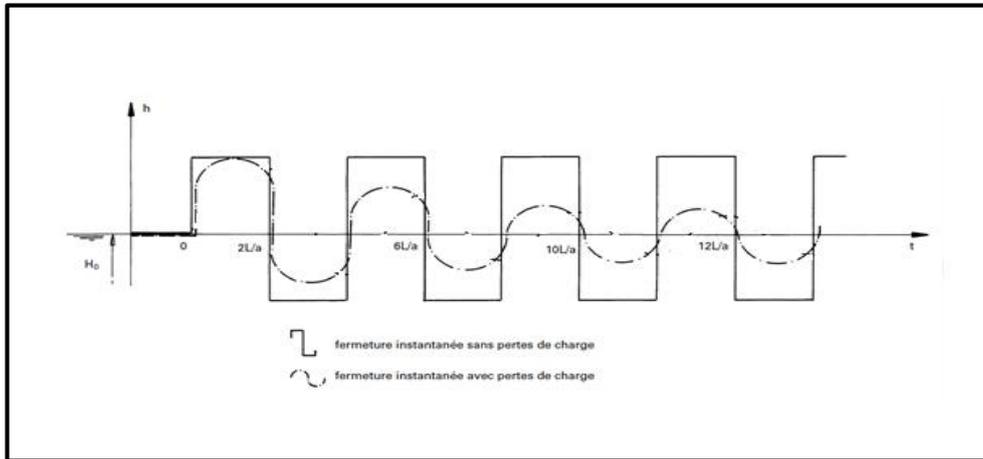


Figure (I.2) : Effet des pertes de charge

On peut résumer les quatre phases précédentes dans le tableau suivant :

Ecoulements			Temps après fermeture de la vanne	Etat de la conduite	Ondes			
Phase	Vitesse	Pression			Type	Célérité	Saut de vitesses	Saut de pression
	v_0	P_0	0	Initial $D=C^{te}$	/	/	0	0
01	0	$P_0+\Delta P$	$\frac{L}{a}$	Dilatation D	Surpression	-a	$-v_0$	ΔP
02	$-v_0$	P_0	$\frac{2L}{a}$	Initial $D=C^{te}$	Dépression	a	$-v_0$	$-\Delta P$
03	0	$P_0-\Delta P$	$\frac{3L}{a}$	Contraction D	Dépression	-a	$+v_0$	$-\Delta P$
04	v_0	P_0	$\frac{4L}{a}$	Initial $D=C^{te}$	Surpression	a	$+v_0$	ΔP

Tableau (I.1) : Récapitulation de l'évolution des écoulements en fonction du temps [07].

I.6.2. Cas d'arrêt d'une pompe sur une conduite de refoulement

Concédons donc un système, analogue à une situation de refoulement, ou l'eau coule à une vitesse v_0 pour alimenter un réservoir dont le niveau est gardé constant.

Considérons donc un système, analogue à une situation de refoulement, où l'eau coule à une vitesse v_0 pour alimenter un réservoir dont le niveau est gardé constant. Le phénomène, illustré par la figure (I.3), peut être décrit en quatre phases.

Avec :

(L) : La longueur de la conduite.

(a) : la célérité de l'onde de déformation.

(v) : La vitesse d'écoulement à l'instant t.

(v_0) : La vitesse initiale

(P) : Pompe.

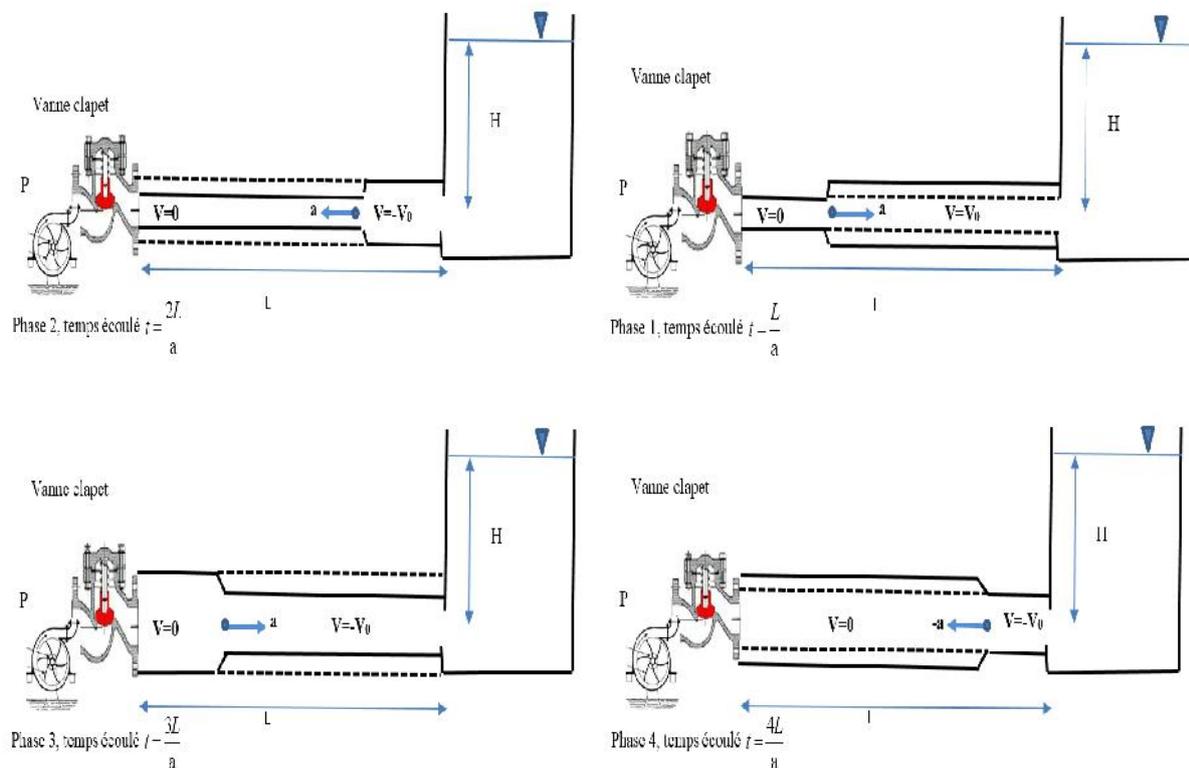


Figure (I.3) : Les étapes d'un cycle de variations de pression.

Le phénomène, peut être décrit en quatre phases :

Phase 1 :

Au temps $t = 0$, le débit à travers la pompe est brusquement interrompu. La vanne clapet située à l'amont du système est fermée, immédiatement et à proximité de la vanne, la vitesse d'écoulement s'annule, donc l'énergie cinétique fait de même et doit être compensée par un gain d'énergie potentielle sous forme d'une dépression puisque le mouvement initial de l'eau a tendance à tirer sur la partie de la colonne d'eau qui est immobile. Cette énergie de dépression se traduit mécaniquement par une énergie de déformation qui tend à réduire le diamètre de la conduite. Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que toute la conduite soit mise en compression, ce qui prend un temps égal au rapport de la longueur 'L' sur la célérité de l'onde de déformation « a ».

Phase 2 :

Lorsque l'onde de dépression atteint le réservoir, celle-ci se dissipe puisqu'il règne à cet endroit une pression constante, à ce moment précis, plus rien ne retient la mise en compression de conduite et elle commence à prendre sa forme à proximité du réservoir, l'augmentation du volume ainsi créée, entraîne le remplissage de la conduite à une vitesse équivalente à la vitesse initial du fluide puisque la déformation initial de la conduite est directement liée à cette dernière, ce phénomène a la même durée que celle de l'étape précédente.

Phase 3 :

Au moment où toute la conduite a repris sa forme, la vitesse de l'eau doit s'annuler en frappant la vanne fermée, encore une fois, on doit avoir transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle par contre cette fois, l'énergie de pression est positive ; cette surpression met en tension la Conduite qui se dilate, la vitesse de l'onde de déformation « a » étant Constante, la durée de cette étape est identique à celle des précédentes.

Phase 4 :

Le surplus d'eau dû à l'augmentation du volume de la conduite commence à s'évacuer près du réservoir à une vitesse « v_0 » de façon à ce que la conduite reprenne son diamètre initial. À la fin de cette étape, toute la conduite aura retrouvé les conditions initiales et l'étape 1 pourra recommencer. Ce cycle de période $T = 4L/C$ se répéterait indéfiniment, s'il n'y avait

pas de frottement. Les effets du frottement agissent essentiellement sur l'amortissement de l'amplitude de la variation de pression.

I.7. Evolution des ondes de pression le long de la conduite :

Dans le cas de la fermeture instantanée d'une vanne sur une conduite d'adduction gravitaire, on peut tracer le diagramme permettant de déterminer l'évolution de la pression au cours du temps en chaque point de la conduite. D'après la figure (I-4), on peut conclure que le temps pendant lequel un point quelconque de la conduite est en surpression (dépression) et d'autant plus petit qu'il se trouve plus près du réservoir.

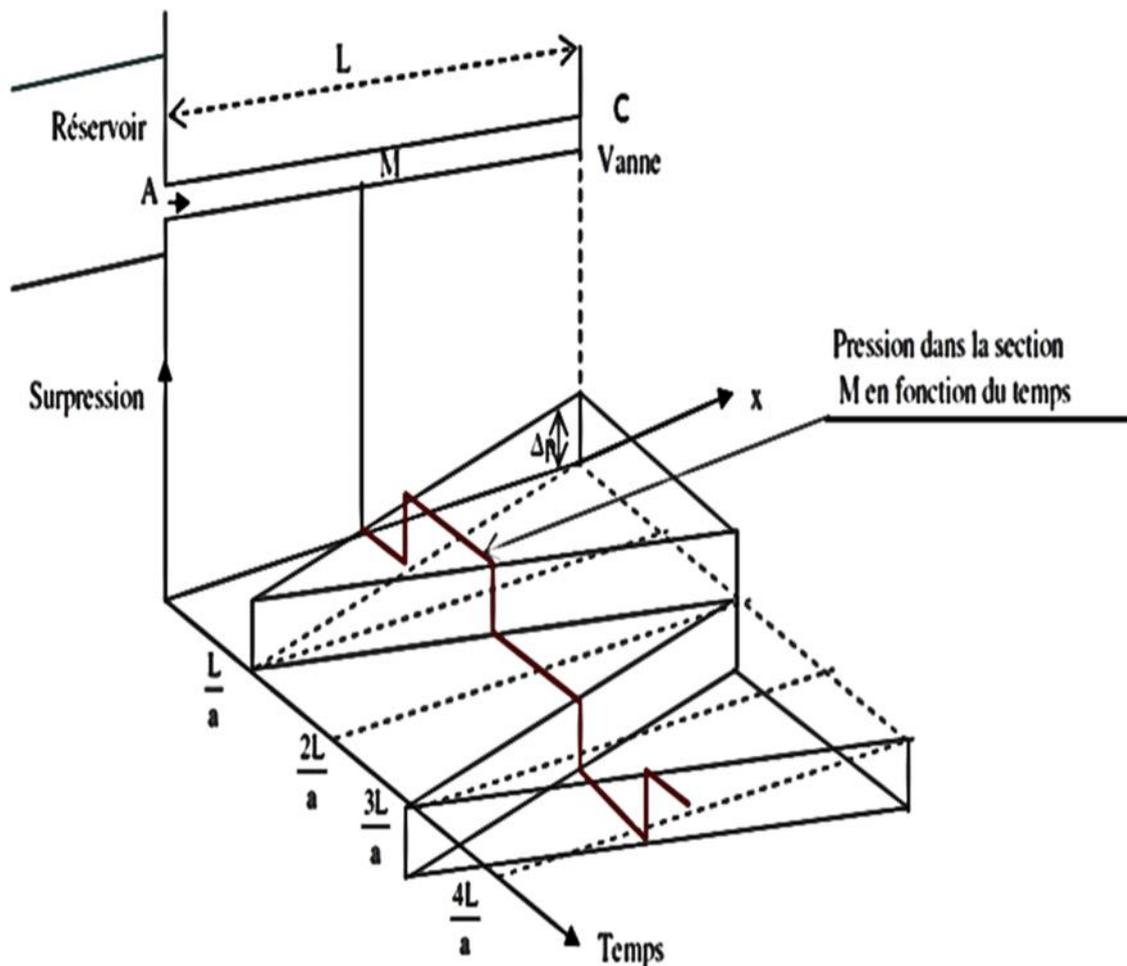


Figure (I-4) : Evolution de la pression le long de la conduite [4].

I.8. Le temps de réflexion et les Valeurs équivalentes pour une conduite composée

I.8.1. Le temps de réflexion

Au cas où ces caractéristiques ne sont pas constantes le long de la conduite voir la figure (I-5), le temps de réflexion de l'onde T_r est la somme des temps de réflexion de chaque tronçon.

Tel que :

$$T_r = 2 \cdot \sum \frac{L_i}{a_i}$$

a_i : est calculé pour chaque tronçon par la formule : $a_i = \frac{1}{\sqrt{\rho(1/K_e + D_i/e_i E_i)}}$

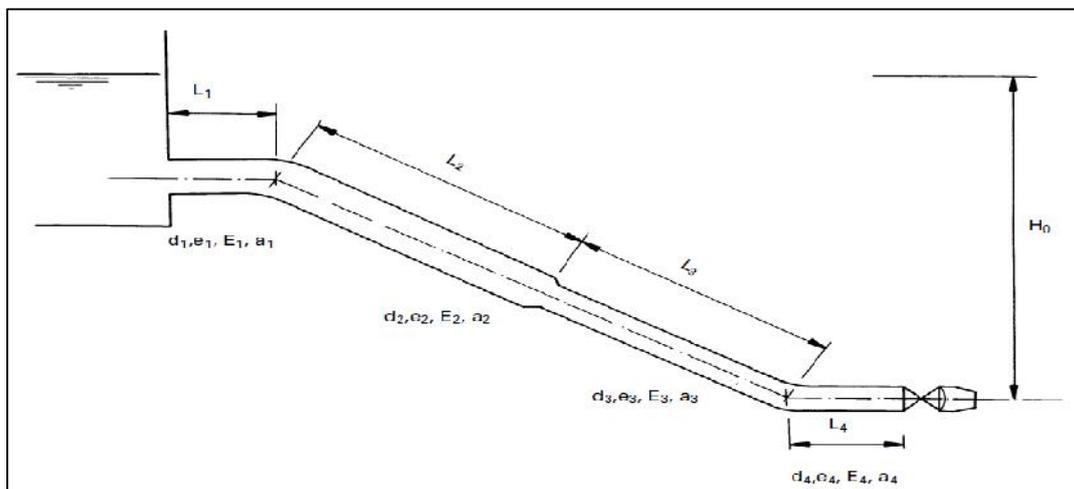


Figure (I-5) : Calcul de T_r pour conduite composée

I.8.2. les Valeurs équivalentes

Il peut s'avérer utile, pour certains calculs, de ramener une conduite constituée de tronçons de caractéristiques différentes à une conduite équivalente de caractéristiques homogènes. [11]

vitesse de propagation équivalente :

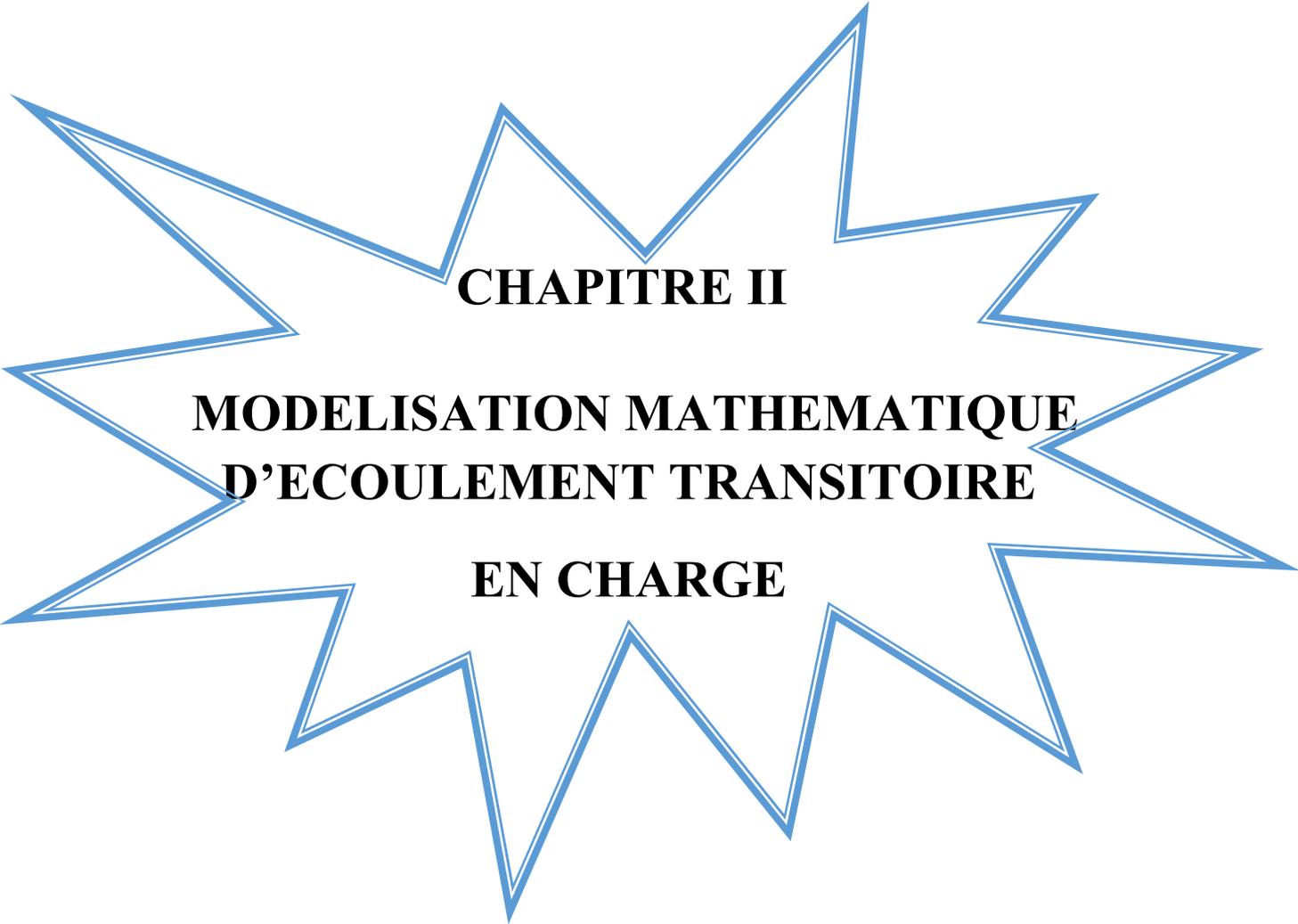
$$a_{\text{eq}} = \frac{2L}{T_r}$$

Section équivalente :

$$S_{\text{eq}} = \frac{L}{\left(\frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2} + \frac{L_3}{S_3} + \dots \right)}$$

I.9. Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons vu comment évolue un régime transitoire dans les conduites en charge après une manœuvre, ainsi que la description sur l'analyse physique du phénomène du coup de bélier.



CHAPITRE II

**MODELISATION MATHEMATIQUE
D'ECOULEMENT TRANSITOIRE**

EN CHARGE

II.1.Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation mathématique des écoulements transitoire, visqueux et newtoniens dans une conduite en charge.

Les équations qui permettent d'étudier tous les phénomènes transitoires que l'on rencontre en écoulement monophasique sous pression ont été établis par Saint Venant régissant les écoulements transitoires en charge. Ces équations dérivent par l'application de deux lois principales à savoir :

- La loi de la conservation de la masse (équation de continuité).
- La loi de la conservation de la quantité de mouvement (l'équation dynamique).

II.2. Equations différentielles de base

II.2.1. Hypothèses :

Le développement des équations fondamentales invoqué ici repose sur les hypothèses suivantes :

- 1- la conduite est considérée uniforme et l'écoulement est unidimensionnel, la vitesse et la pression suivent une distribution uniforme à travers la section transversale de la conduite.
- 2- la déformation de la conduite est linéairement proportionnelle à la contrainte (loi d'élasticité de Hooke) et l'effet de compressibilité du liquide est caractérisé par son module de compressibilité et la linéarité de comportement.
- 3- le fluide est homogène et monophasique, donc aucune cavitation ou vaporisation du fluide n'apparaît durant le régime transitoire.

II.2.2. Equation de la quantité de mouvement

On applique le théorème de la quantité de mouvement à une tranche de la conduite comprise entre deux sections S et S' d'abscisse x et $x + dx$, en projection sur un axe de la canalisation orientée positivement de l'amont vers l'aval. Les projections des forces extérieures sur cet axe sont le poids de La masse de l'élément liquide, la force de pression et les forces de frottement [2], [5].

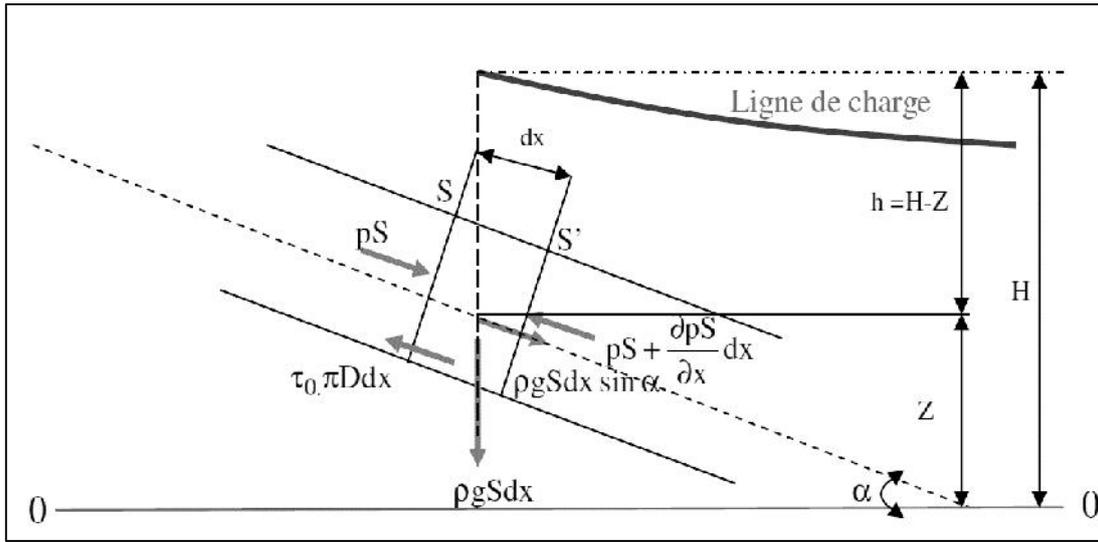


Figure (II.1) : volume élémentaire d'une conduite (Equation dynamique)

Le théorème d'Euler est : [6]

$$\frac{d(mv)}{dt} = \sum F_{ext} \tag{II.1}$$

Avec :

- $\sum F_{xt}$: La somme des forces extérieures.
- m : La masse de la tranchée.
- v : La vitesse d'écoulement.

Qui indique que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide.

$$\frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement.

On a :

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Donc

$$\frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = \rho S dx \frac{dv}{dt} \tag{II.2}$$

Donc on détermine $\sum F_{\text{extérieure}}$ tout en se basant sur la figure (II-1) :

$$PS - (PS - \frac{\partial(PS)}{\partial x} dx) + \rho g S dx \sin \alpha - \tau_f \pi D dx = \sum F_{\text{extérieure}}$$

Les forces extérieures appliquées sur le volume élémentaire, sont :

- la force de pression normale sur la face amont : PS
- la force de pression normale à la face aval de la tranche : $-(PS + \frac{\partial(PS)}{\partial x} dx)$
- la composante du poids propre due au champ de gravité : $\rho g S dx \sin \alpha$

α : l'angle entre l'axe de la conduite et l'horizontal.

- Les frottements du liquide avec les parois de la conduite : $-\tau_f \pi D dx$

Donc :

$$-S \frac{\partial P}{\partial x} dx - P \frac{\partial S}{\partial x} dx + \rho g S dx \sin \alpha - \tau_f \pi D dx = \rho S dx \frac{dv}{dt}$$

En négligeant le terme contenant $\frac{\partial S}{\partial x}$ et en divisant sur $\rho S dx$, on obtient :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g \sin \alpha - \frac{\tau_f \pi D}{\rho S} = \frac{dv}{dt} \quad (\text{II.3})$$

On détermine l'expression de $\tau_f \pi D$. Les pertes de charge, représentées par ΔP , sont exprimées par la formule suivante :

$$\Delta P = \rho g \lambda \frac{L}{D} \frac{v|v|}{2g} \quad (\text{II.4})$$

On peut écrire alors que la force de frottement F_r :

$$F_r = \tau_f \pi D L \quad \text{Ou} \quad F_r = \Delta P \frac{\pi D^2}{4}$$

D'où l'on déduit facilement :

$$\tau_f \pi D L = \Delta P \frac{\pi D^2}{4} \Leftrightarrow \tau_f \pi D = \rho g \frac{\lambda}{D} \frac{v|v|}{2g} \frac{\pi D^2}{4} = \rho g j S$$

Avec $j = \frac{\lambda}{D} \frac{v|v|}{2g}$, qui représente le gradient hydraulique.

On porte l'expression de $\tau_f \pi D$ dans la formule (II.3), on aura :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g \sin \alpha + gj = 0 \quad (\text{II.5})$$

En exprimant $\frac{dv}{dt}$ en fonction de ses dérivées partielles, on obtient en définitif :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = g(\sin \alpha - j) \quad (\text{II.6})$$

L'équation (II.6) représente la première équation de SAINT-VENANT.

Comme on a : $P = \rho gh = \rho g(H - Z)$ et $\frac{dZ}{dx} = -\sin \alpha$,

Donc :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + gj = 0 \quad (\text{II.7})$$

En remplaçant j par sa formule, on aura définitivement l'équation dynamique suivante

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v|v|}{2D} = 0 \quad (\text{II.8})$$

II.2.3. Equation de continuité :

L'équation de conservation de la masse appliquée au volume de contrôle exprime que la différence des masses entrant et sortant de ce volume est égale à la masse conservée à l'intérieur.

La figure (II.2) illustre un volume élémentaire de longueur dx à un instant t . La section de la conduite S ainsi que la masse volumique du fluide ρ , sont fonction de la pression $P(x, t)$

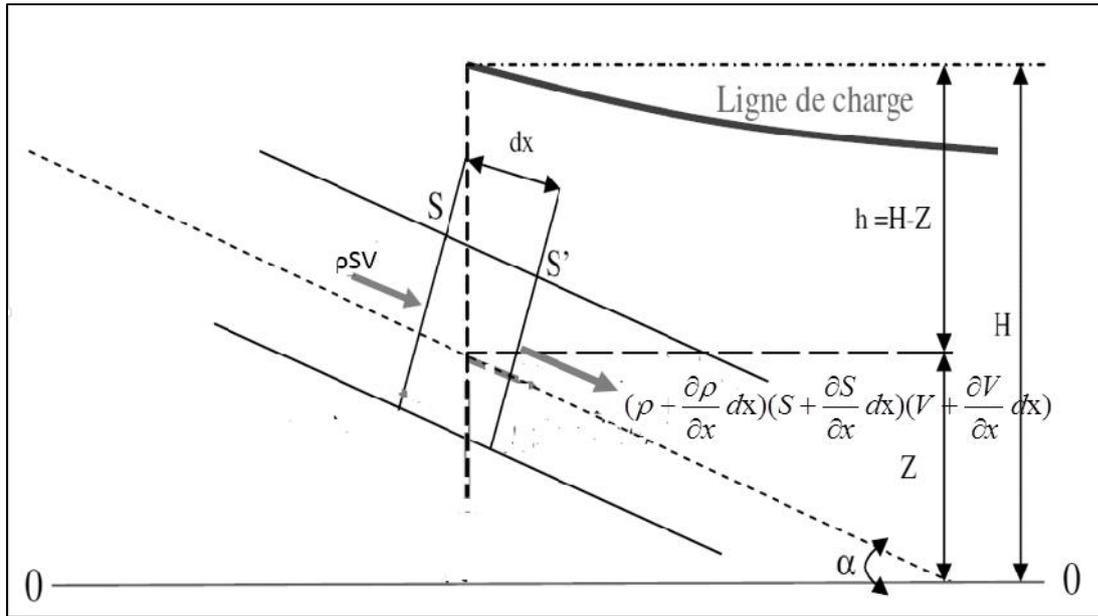


Figure (II.2) : Elément élémentaire d'une conduite

Suivant la figure (II.2), la masse fluide entrant à travers la section amont par unité de temps est :

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_e = \rho S v \tag{II.9}$$

En admettant l'hypothèse de continuité des fonctions $\rho(x,t)$, $S(x,t)$ et $V(x,t)$, la masse par unité de temps sortant de la face aval du volume de contrôle sera, en appliquant aux fonctions précédentes un développement en série de *Taylor* tronqué au premier ordre :

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_s = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \tag{II.10}$$

De ce fait, le changement temporel de la masse emmagasinée à l'intérieur de ce volume s'exprimera par :

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - \rho S v = - \frac{\partial(\rho S dx)}{\partial t} \tag{II.11}$$

Ayant fait quelques transformations algébriques et sans oublier d'omettre les termes de second ordre contenant $(dx)^2$, on aboutit, après avoir simplifié par $\rho S dx$, à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v}{S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\partial x} \frac{\partial(dx)}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.12})$$

En écrivant les dérivées partielles dans l'équation (II.12) en fonction des dérivées totales (ou de *Lagrange*), et tenant aussi en considération l'invariance de la longueur de L'élément de volume ($\frac{\partial(dx)}{\partial t} = 0$), le résultat sera :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.13})$$

En multiplier par (dt) :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{\partial v}{\partial x} dt = 0 \quad (\text{II.14})$$

- Variation de longueur de l'élément liquide est : $(\frac{\partial v}{\partial x} dt)$
- Variation de la masse volumique de l'élément liquide est : $(\frac{d\rho}{\rho})$
- Par définition, le module de compressibilité de l'eau est égal à $\frac{dP}{d\rho}$
 ρ

On en déduit l'égalité suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{K_e} \quad (\text{II.15})$$

P varie avec x et t, mais les variations de P avec x sont négligeables par rapport aux variations avec t, donc :

$$dP = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (\text{II.16})$$

Donc :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho g}{K_e} \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (\text{II.17})$$

➤ Variation de section de l'élément liquide : $(\frac{dS}{S})$

Sous l'action de la pression P, la matière de la canalisation est soumise à une contrainte σ :

$$\sigma = \frac{PD}{2e} \quad (\text{II.18})$$

$$\text{Et } d\sigma = \frac{D}{2e} dp \quad (\text{II.19})$$

Par ailleurs :

$$d\sigma = E \frac{dD}{D} \quad (\text{II.20})$$

Avec :

E : module d'Young ou module d'élasticité de la paroi de la conduite.

Par les relations précédentes (II-12), on déduit : $\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E} = \frac{DdP}{2E.e}$

L'accroissement du diamètre dD entraîne un accroissement de la section dS tel que :

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dD}{D} \quad (\text{II.21})$$

$$\text{Donc : } \frac{dS}{S} = \frac{DdP}{E.e} \quad \text{mais on a } dP = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

Donc on obtient :

$$\frac{dS}{S} = \frac{\rho g D}{E.e} \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (\text{II.22})$$

On remplace chaque terme de l'équation (II.14) par les expressions données dans les équations, (II.15), (II.22), on obtient l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{\partial v}{\partial x} dt &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\rho g}{K_e} \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\rho g D}{E.e} \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dt &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Où, en simplifiant par dt :

$$\rho g \left(\frac{1}{K_e} + \frac{D}{E.e} \right) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.24})$$

On pose donc :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\rho g}{g} \left(\frac{1}{K_e} + \frac{D}{E.e} \right) = \rho \left(\frac{1}{K_e} + \frac{D}{E.e} \right) \quad (\text{II.25})$$

Tel que :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{K_e} + \frac{D}{E.e} \right)}} \quad (\text{II.26})$$

Cette valeur correspond à la vitesse de propagation d'une onde élastique dans un fluide. Elle est égale à la limite supérieure. Des valeurs indicatives de la célérité d'onde a dans des canalisations de différentes qualités sont données à L'ANNEXE I.

La vitesse de l'onde " a " augmente avec toute augmentation de ε , E et de e et elle diminue avec toute l'augmentation de D et ρ .

L'équation de continuité en fonction des variables dépendantes (la charge h et la vitesse d'écoulement v) s'écrit donc :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.27})$$

L'équation de continuité en fonction des variables dépendantes (la pression P et la vitesse d'écoulement v) s'écrit donc :

$$\frac{dP}{K_e} + \frac{DdP}{E.e} + \frac{\partial v}{\partial x} dt = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{K_e} + \frac{D}{E.e} \right) dP + \frac{\partial v}{\partial x} dt = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho a^2} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.28})$$

En exprimant $\frac{dP}{dt}$ en fonction de ses dérivées partielles, on obtient

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} \right) + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.29})$$

L'équation (II-27) représente la 2^{ème} équation de SAINT-VENANT

Dans les régimes transitoires (avec faible variation de ρ), l'expression de la charge totale $H = Z + P/\rho g$, Dans un tel cas, on écrit :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dZ}{dt} + \frac{1}{\rho g} \frac{dP}{dt} \quad (II.30)$$

Ou bien encore :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} = g \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right) \quad (II.31)$$

La conduite étant fixe et ancrée ($\frac{\partial Z}{\partial t} = 0$) et $\frac{\partial Z}{\partial x} = -\sin \alpha$

Donc la différentielle totale dans ce cas sera :

$$\frac{dZ}{dt} = v \frac{\partial Z}{\partial x} = -v \sin(\alpha) \quad (II.32)$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} = g \left(\frac{dH}{dt} + v \sin(\alpha) \right) \quad (II.33)$$

En faisant usage de la dérivée matérielle de la charge ($\frac{dH}{dt}$) dans l'équation (II-31).

On écrira en final (II-26), sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial x} + v \sin(\alpha) + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (II.34)$$

L'équation (II.34) représente alors l'équation de continuité gouvernant les régimes transitoires en charge, laquelle couplée avec l'équation dynamique (II-8) précédemment établie, permet d'obtenir la solution des variables d'état de l'écoulement.

Reprenons le système d'équations (dit parfois de *Saint-Venant*) des écoulements instationnaires en charge :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial x} + v \sin(\alpha) + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (II.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \end{array} \right. \quad (II.36)$$

Ou bien encore :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} \right) + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = g(\sin \alpha - j) \end{cases} \quad (II.37)$$

L'équation de continuité (II.35) et celle de la dynamique (II.36) régissant la propagation des ondes élastiques dans les conduites en charge, constituent donc un système d'équations différentielles de premier ordre. Dans ce système, les variables indépendantes sont la coordonnée longitudinale x et le temps t , et les variables dépendantes sont la charge H et la vitesse d'écoulement v . Les autres variables, comme la célérité de l'onde (a), et le diamètre D , ne changent pas dans le temps mais peuvent évidemment varier selon x . Le coefficient de frottement λ varie avec le nombre de Reynolds. Cependant, λ est considéré constant parce que les effets d'une telle variation sont négligeables en régime transitoire (Chaudhry, 1979).

II.3.Équations simplifiées

Les équations de continuité et de quantité de mouvement établies précédemment peuvent être simplifiées en éliminant les termes d'inertie convective du type $v \frac{\partial H}{\partial x}$, $v \frac{\partial V}{\partial x}$ et $v \frac{\partial P}{\partial x}$;

Le système de deux équations simplifiées de continuité et de quantité de mouvement en fonction des variables dépendantes (la pression P et la vitesse d'écoulement v) s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = g(\sin \alpha - j) \end{cases} \quad (II.38)$$

Le système de deux équations simplifiées de continuité et de quantité de mouvement en fonction des variables dépendantes (la pression H et la vitesse d'écoulement v) s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + v \sin(\alpha) + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \end{cases} \quad (II.39)$$

Le système de deux équations simplifiées de continuité et de quantité de mouvement en fonction des variables dépendantes (la pression H et la vitesse d'écoulement Q) s'écrit donc :

On a :

$$Q = Sv \quad (\text{II.40})$$

Avec : Q le débit volumique [m^3/s].

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{II.41})$$

et :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{II.42})$$

En remplaçant les dérivées partielles par leurs expressions dans les équations simplifiées on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + v \sin(\alpha) + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda Q |Q|}{2DS} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

II.4. propriétés du système d'équations des écoulements transitoires en charge

Les écoulements transitoires en charge sont régis par un système d'équations aux dérivées partielles. De ce fait, et avant de procéder à sa résolution, il est de grande importance de déterminer les propriétés physico-mathématiques de ces équations. Ceci nous permettra de choisir la méthode de résolution la plus adéquate. Dans ce qui suit, on présentera quelques propriétés du système dont on aura besoin par la suite :

II.4.1. Instationnaire :

L'écoulement régi par les équations de système de Saint Venant (II-37) est instationnaire (non stationnaire) car, les paramètres hydrauliques tels que vitesse, pression, dans chaque point de l'espace varient dans le temps, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial P}{\partial x} \neq 0 \quad (\text{II.44})$$

II.4.2. Unidimensionnalité :

L'écoulement examiné est unidimensionnel car les composantes verticale et transversales (le long les axes y et z) des grandeurs physiques sont négligeables par rapport à la composante le long l'axe de l'écoulement x.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.45})$$

II.4.3. Hyperbolicité :

On considère le système de deux équations aux dérivées partielles, liant les fonctions $u(x, t)$ et $w(x, t)$ [1]

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial t} + b_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial w}{\partial t} = c_1 \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial t} + b_{21} \frac{\partial w}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial w}{\partial t} = c_2 \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

Où les coefficients a_{ij} , b_{ij} et c_i tel que ($i = 1, 2$) ($j = 1, 2$) peuvent dépendre des variables x et t et des fonctions $u(x, t)$ et $w(x, t)$ mais pas des dérivées partielles de u et w .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx = du \\ \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} dx = dw \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

On obtient quatre équations quasi- linéaires avec les inconnues : $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}$

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial t} + b_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial w}{\partial t} = c_1 \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial t} + b_{21} \frac{\partial w}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial w}{\partial t} = c_2 \\ \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + 0 + 0 = du \\ 0 + 0 + \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} dx = dw \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

Ce système peut être écrit sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial t \\ \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ du \\ dw \end{pmatrix} \Leftrightarrow MT = N \quad (\text{II.49})$$

On a alors pour $\text{dit}(M) = 0$

$$\text{dit}(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{II.50})$$

En développant mathématiquement le déterminant, on trouve :

$$\text{dit}(M) = (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})dx^2 + (a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})dt^2 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21})dxdt = 0 \quad (\text{II.51})$$

En divisant la dernière relation par dt^2 , on obtient :

$$\text{dit}(M) = (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21})\left(\frac{dx}{dt}\right) + (a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11}) = 0 \quad (\text{II.52})$$

C'est une équation du second degré pour un inconnu $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ et dont la solution dépend du discriminant de cette équation.

$$\Delta = (a_{11}b_{22} + a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11} - a_{21}b_{12})^2 - 4.(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21}) \quad (\text{II.53})$$

➤ $\Delta > 0$: L'équation (II.52) admet deux racines réelles distinctes en $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ et le système (II.46) est dit de type (hyperbolique).

➤ $\Delta = 0$: L'équation (II.52) admet deux racines confondues et le système (II.46) est dit de type (Parabolique).

➤ $\Delta < 0$: L'équation (II.52) admet deux racines complexes et le système (II.46) est dit de type (Elliptique).

Par autre méthode, pour vérifier le type du système d'équations de Saint Venant (II.39) régissant les écoulements transitoires en charge, En récrivant le système d'équations de Saint-Venant sous forme matricielle, on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} H \\ v \end{Bmatrix} = -[A(H, v)] \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} H \\ v \end{Bmatrix} + [G(H, v)] \quad (\text{II.54})$$

Dans lesquelles :

$$A \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

$$\text{Et } G \begin{bmatrix} v \sin \alpha \\ \frac{\lambda v |v|}{2D} \end{bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

L'équation caractéristique associée à la matrice A est : [12]

$$\lambda^2 - \text{Tracé}(A)\lambda + \text{dét}(A) = 0 \quad (\text{II.57})$$

$\tilde{\lambda}$: Les valeurs propres de la matrice A

$$\text{Donc : } \tilde{\lambda}^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \pm a \quad (\text{II.58})$$

Sachant que (a) est réel, les deux racines de l'équation, en l'occurrence les valeurs propres de la matrice A, sont alors réelles et distincts, de ce fait le système (II.43) des équations aux dérivées partielles de type (hyperbolique).

II.5. Analyse des paramètres

II.5.1. Paramètre D :

Il représente le diamètre de la conduite, il n'est fonction que de la distance x (variations de la section de conduite suivant la longueur).

II.5.2. Paramètre ρ :

Il représente la masse volumique du fluide, qui est généralement supposée constante pour la durée du régime transitoire.

Elle est déterminée par le rapport $\rho = \frac{m}{V}$

La valeur exacte de la masse volumique de l'eau à 4 °C est de 999, 973 kg/m³ [14].

II.5.3. Paramètre a :

Il représente la vitesse de propagation de l'onde en régime transitoire, elle dépend des caractéristiques du système et des propriétés du fluide.

Elle peut être déterminée par l'expression suivante :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho(1/ K_e + D/ eE)}} \quad (\text{II.59})$$

Avec :

- a : vitesse de propagation de l'onde ou célérité de l'onde de pression en (m / s) ;
- K_e : module de compressibilité du liquide en (N /m²) ;

Pour eau : $K = 2.2 \cdot 10^9$ (N/m²) ;

- D : diamètre de la conduite en (m) ;
- e : épaisseur de la paroi de la conduite en (m) ;
- E : Module de Young du matériau ou module d'élasticité du matériau constituant la conduite (N/m²) ;

II.5.4. Paramètre λ :

Il représente le coefficient de frottement, est généralement considéré comme celui d'un écoulement turbulent permanent uniforme.

Pour tous les tuyaux, on ne considère que l'équation de Colebrook comme étant la plus acceptable pour calculer le coefficient de frottement.

Cette équation où $\lambda = f(R_e, \frac{\varepsilon}{d}, \lambda)$ est calculée :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right) \quad (\text{II.60})$$

Du fait que l'équation est difficile à résoudre, puisque la formule est implicite en on dispose de diagrammes de Moody figure (II.3) permettant de lire la relation entre le coefficient de frottement, le nombre de Reynolds R_e et la rugosité relative $\frac{\epsilon}{D}$.

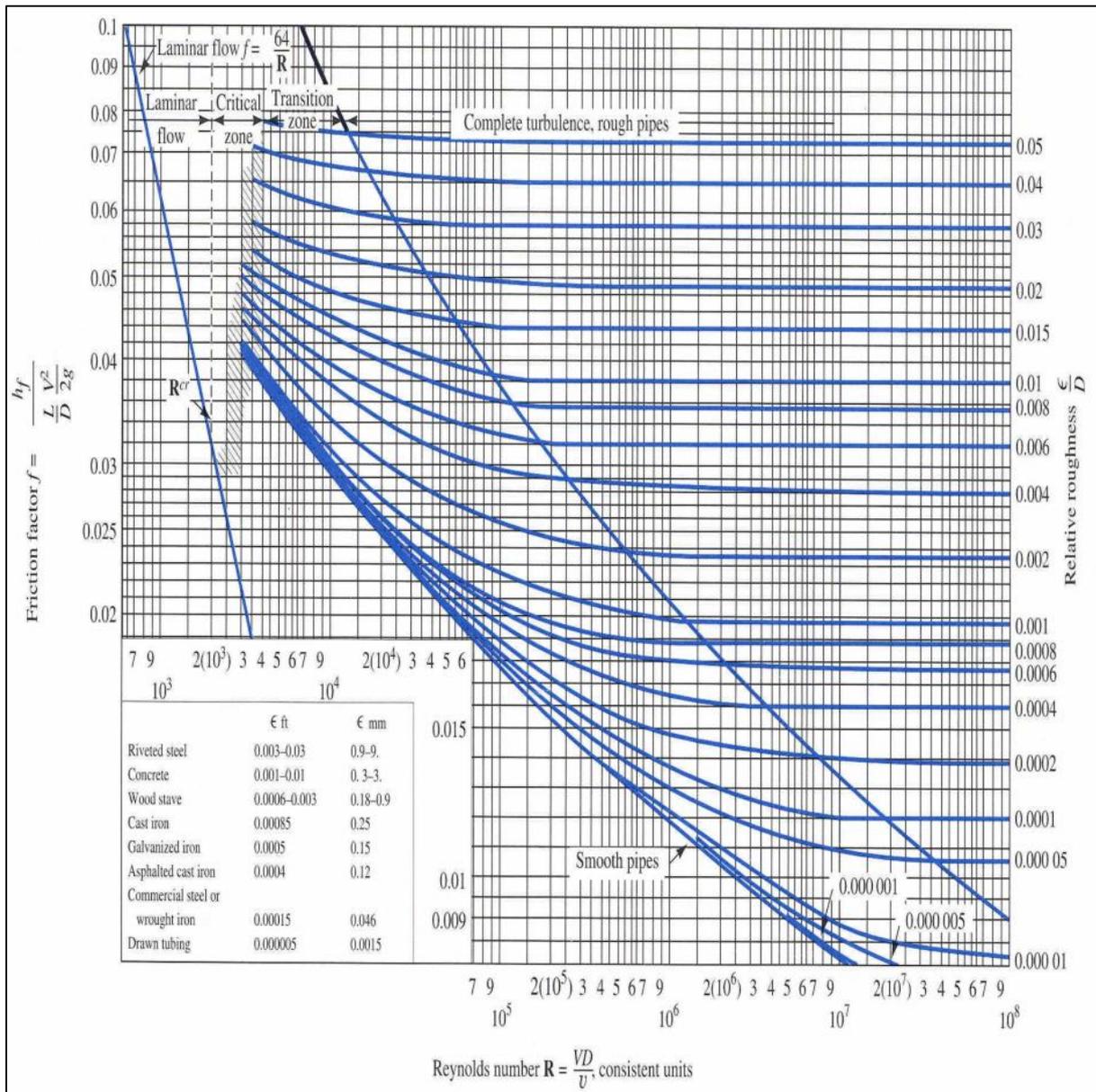
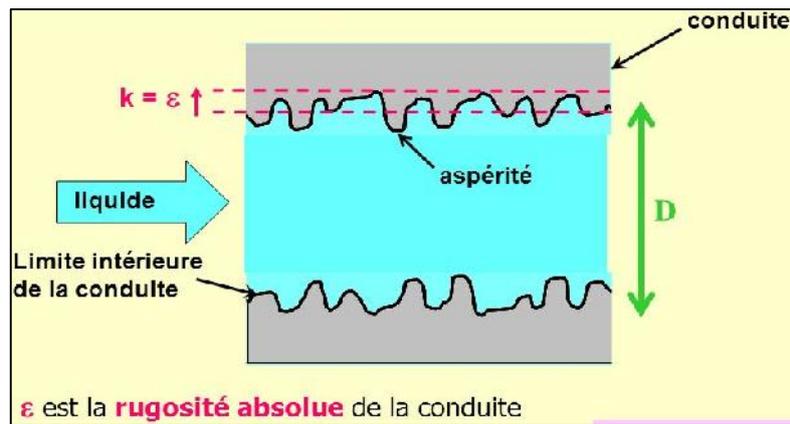


Figure (II.3) : Le diagramme de Moody

ϵ : Appelé coefficient de rugosité absolu

Généralement La rugosité des conduits est un facteur déterminant dans le choix des matières de tuyaux lors de l'étude d'un réseau hydraulique.



Figure(II.4) : Rugosité absolue [13]

R_e : Le nombre de Reynolds qui caractérise le rapport entre les forces d'inertie de l'écoulement et les forces de viscosité.

Défini par la relation suivante :

$$R_e = \frac{vD}{\nu} \quad (\text{II.61})$$

ν : représente la viscosité cinématique du fluide (m^2/s)

- la viscosité cinématique qui est égal à :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (\text{II.62})$$

Avec :

η : viscosité dynamique du fluide ($\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$).

ρ : Masse volumique du fluide (kg/m^3).

II.6. Conclusion

Nous avons, au cours du présent chapitre, formulé les équations différentielles de base gouvernant les régimes d'écoulement non permanent en charge. Il en a résulté alors de l'application du principe de continuité et de quantité de mouvement un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, qui n'est autre que celui décrivant la propagation des ondes planes dans les corps élastiques. La dérivation de ces équations s'est appuyée sur certaines hypothèses simplificatrices généralement acceptables en pratique.



CHAPITRE III

**MODELISATION NUMERIQUE
D'ECOULEMENT TRANSITOIRE**

EN CHARGE

III.1.Introduction

Les équations générales du phénomène de coup de bélier, telles que présentées au chapitre(II) décrivent un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique. Pour résoudre ce système complexe, le calcul numérique s'impose. En général, une distinction est faite entre les méthodes de résolution numériques suivantes (Chaudry 1979).

- La méthode des caractéristiques (MC) ;
- La méthode des différences finies (MDF) ;
- La méthode des éléments finis (MEF) ;
- La méthode spectrale (MS) ;
- La méthode de l'intégration selon les limites ;

La MC est certainement la plus populaire et actuellement la plus utilisée. Les avantages de la MC sont une simulation correcte d'onde à front raide, une illustration simple de sa propagation, une programmation présentant peu de difficultés et une efficacité en termes de calcul.

La MDF peut entraîner soit des schémas explicites ou implicites. Ces derniers sont avantageux en termes de rapidité, mais sont plus sophistiqués du point de vue de la programmation. Les trois dernières méthodes ne sont pas avantageuses pour la résolution de problèmes unidirectionnels ou n'ont même pas été appliquées à de tels problèmes. [8]

III.2.La méthode des différences finies

La méthode consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs de différences basés sur des intervalles de temps et d'espace finis Δt et Δx , puis à résoudre les équations algébriques obtenues en tenant compte des conditions initiales et aux limites. Ainsi, le domaine de variation continu du problème se trouve transformé en un ensemble finis de points (nœuds) où la solution sera recherchée. Ce domaine discret est alors délimité par des frontières formant par conséquent un réseau de points de calcul, appelé aussi grille de calcul.

III.2.1. Approximation en différences finies

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées partielles aux points du maillage par des développements de séries de Taylor comme suit :

Soit $f(x)$ une fonction quelconque

$$\begin{cases} f(x_{i+1}) = f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^{(n)} f(x_i)}{\partial x^n} + \varepsilon(\Delta x^{n+1}) \\ f(x_{i-1}) = f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \dots + (-1)^n \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^{(n)} f(x_i)}{\partial x^n} + \varepsilon(\Delta x^{n+1}) \end{cases}$$

$\varepsilon(h^{n+1})$: L'erreur de troncature d'ordre $n+1$

Pour l'approximation des dérivées spatiales premières, et en négligeant l'erreur de troncature, le développement de *Taylor* permet de formuler les possibilités suivantes :

- Schéma décentré amont (précis au premier ordre) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} (f_{i+1}^n - f_i^n) \quad (\text{III.01})$$

-Schéma décentré aval (précis au premier ordre) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} (f_i^n - f_{i-1}^n) \quad (\text{III.02})$$

- Schéma centré (précis au deuxième ordre) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) \quad (\text{III.03})$$

Pour les dérivées spatiales secondes de la fonction $f(x,t)$, elles s'obtiennent de façon similaire.

On écrit alors :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (\text{III.04})$$

Où, f_i^n représente la valeur de la fonction aux points x_i, t_n .

Les problèmes des écoulements instationnaires étant gouvernés par des équations aux dérivées partielles, on peut appliquer aisément ce développement pour une fonction à deux variables ou plus. Ayant $f(x,t)$ comme fonction de l'espace et du temps, on procédera à la discrétisation du plan x,t en un réseau (maillage) orthogonale, formant ainsi une grille de nœuds de calcul (Figure (III.1)).

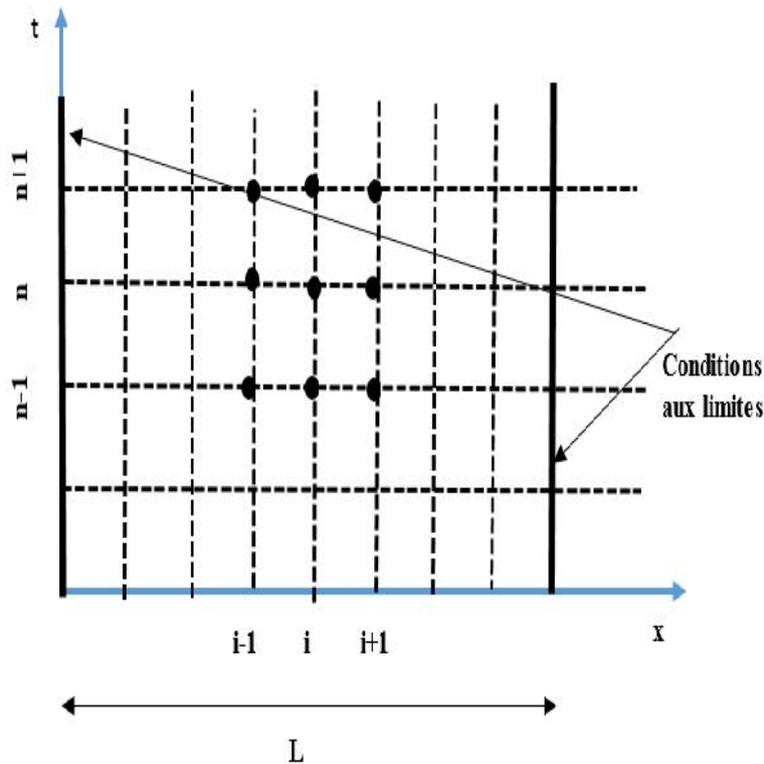


Figure (III.1) : Maillage du domaine de calcul

En ce qui est de la dérivée première par rapport au temps, on adopte en général un schéma décentré en avant, et un schéma centré quant à la dérivée seconde :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n = \frac{1}{\Delta t} (f_i^{n+1} - f_i^n) \quad (\text{III.05})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_n = \frac{f_i^{n+1} - 2f_i^n + f_i^{n-1}}{\Delta x^2} \quad (\text{III.06})$$

III.2.2. Schémas explicites et implicites

Suivant la façon de discrétisation de l'équation aux dérivées partielles, deux cas se distinguent pour la méthode des différences finies :

III.2.2.1. Schéma explicite

Le schéma est dit alors explicite. C'est-à-dire, les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné sont exprimées en fonction des caractéristiques de celui-ci supposées connues à l'instant précédent, de ce fait, ce qui se passe au temps $t + \Delta t$ ne dépend que du passé au temps t (Figure (III.2)).

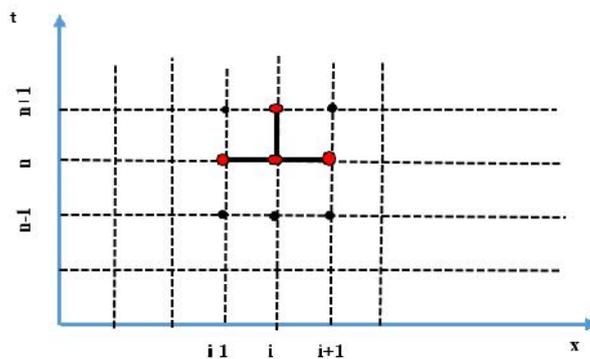


Figure (III.2) : Schéma explicite

III.2.2.2. Schéma implicite

A l'opposé, si les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné $t + \Delta t$ sont approchées en fonction de la solution précédente trouvée au temps t , et des valeurs recherchées au temps même du calcul $t + \Delta t$, la liaison est implicite, et le schéma est dit par conséquent implicite (Figure (III.3)).

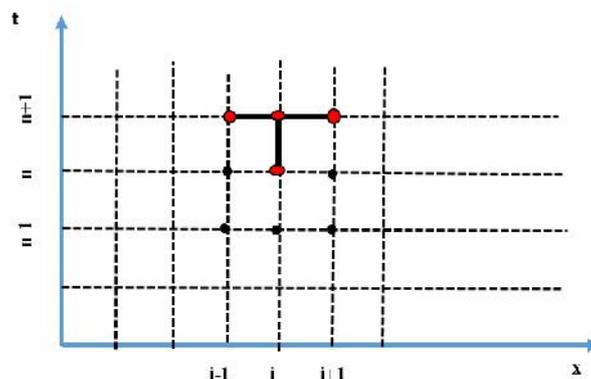


Figure (III.3) : Schéma implicite

III.2.3. Quelques remarques sur la méthode différence finie [15]

- méthode des différences finies simple à mettre en oeuvre (dvp Taylor) ;
- convergence quadratique si les solutions sont régulières ;
- permet de traiter la plupart des conditions limites ;
- mais limitée à des géométries rectangulaires ;

III.3. Méthode des caractéristiques

En mathématique, la méthode des caractéristiques est une technique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. Particulièrement adaptée aux problèmes de transport, elle est utilisée dans de nombreux domaines tels que l'hydraulique ou hydrologie.

Pour une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, la méthode des caractéristiques cherche des courbes appelées « courbes caractéristiques », le long desquelles l'EDP se réduit à une simple équation différentielle ordinaire. La résolution de l'EDO le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

Dans certains cas particuliers, la méthode des caractéristiques peut permettre la résolution purement analytique des EDP. Dans les cas les plus complexes rencontrés par exemple en modélisation des systèmes hydrauliques, la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique d'écoulement transitoire soit dans les conduites en charge ou dans les canaux.

III.3.1. Discrétisation des équations de l'écoulement transitoire par la méthode des caractéristiques

Rappelle mathématique sur l'équation des dérivées totales des fonctions $H(x,t)$, $v(x,t)$.

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (\text{III.07})$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{III.08})$$

Les deux équations dynamiques et de continuité peuvent s'écrire sous forme :

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial H}{\partial t} + V \sin(\alpha) + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ L_2 = \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.09})$$

Les équations L_1 et L_2 donnent deux équations aux dérivées partielles non linéaires avec deux inconnues H et v qui sont fonctions de x et t . Il n'y a pas de solution connue de ces équations, mais elles peuvent être résolues par la méthode des caractéristiques.

Les deux équations L_1 et L_2 peuvent être combinées avec un multiplicateur inconnu K tel que : $L_1 + K L_2 = 0$

Donc :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + v \sin(\alpha) + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + K \left(\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v |v|}{2D} \right) = 0 \quad (\text{III.10})$$

Après un certain arrangement, on trouve :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} + K g \frac{\partial H}{\partial x} \right) + K \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{a^2}{K g} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \sin(\alpha) + K \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \quad (\text{III.11})$$

Par comparaison, le premier terme entre crochet de l'équation (III.11) avec équation de dérivée totale (III.07), on trouve :

$$\frac{dx}{dt} = K g \quad (\text{III.12})$$

Et par comparaison, le deuxième terme entre crochet de l'équation (III.11) avec équation de dérivée totale (III.08), on trouve :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a^2}{K g} \quad (\text{III.13})$$

Par conséquent :

$$Kg = \frac{a^2}{Kg} \quad (\text{III.14})$$

$$\text{Donc : } aK = \pm \frac{a}{g}$$

Ainsi les deux valeurs réelles distinctes de K transforment les deux équations aux dérivées partielles en deux systèmes d'équations aux dérivées totales. En remplaçant les valeurs de K, ces équations deviennent :

$$\text{pour } K = \frac{a}{g} \text{ on obtient : } C^+ \begin{cases} \frac{dH}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + V \sin(\alpha) + \frac{a}{g} \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = a \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$$(\text{III.16})$$

$$\text{pour } K = -\frac{a}{g} \text{ on obtient : } C^- \begin{cases} \frac{dH}{dt} - \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + V \sin(\alpha) - \frac{a}{g} \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = -a \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

$$(\text{III.18})$$

En posant $v = \frac{Q}{S}$ et pour une conduite horizontale ($\frac{dZ}{dx} = \sin(\alpha) = 0$) et En multipliant des équations de compatibilité par (dt) donc en écrivant les équations aux caractéristiques comme suit

$$C^+ \begin{cases} d\left(H + \frac{a}{gS} Q\right) + \frac{\lambda Q |Q|}{2gDS^2} dx = 0 \\ \frac{dx}{dt} = a \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

$$(\text{III.20})$$

$$C^- \begin{cases} d\left(H - \frac{a}{gS} Q\right) - \frac{\lambda Q |Q|}{2gDS^2} dx = 0 \\ \frac{dx}{dt} = -a \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

$$(\text{III.22})$$

Pour comprendre la signification de ces quatre équations, il convient de les examiner en utilisant la figure ci-dessous Figure(III.4).

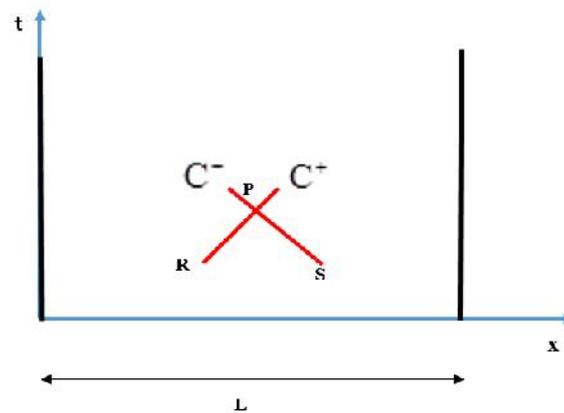


Figure (III.4) : Schéma des caractéristiques.

Considérons que v et H sont connus en deux points R et S . La courbe C^+ représentant l'équation (III.16) est appelée courbe caractéristique plus, elle définit la propagation d'onde dans le sens d'écoulement. L'équation (III.15) n'est valable que pour C^+ . La courbe C^- représentant l'équation (III.18) est appelée courbe caractéristique moins, elle définit la propagation d'onde dans le sens contraire d'écoulement. L'équation (III.17) est valable seulement pour la caractéristique C^- .

Les équations (III.15) et (III.17) sont appelées équations de compatibilité ; chacune de ces équations contient deux inconnus H et v pour un point connu (R ou S) de ses caractéristiques, mais à l'intersection de C^+ et C^- au point P , les deux équations peuvent être résolues pour trouver v_P et H_P .

III.3.2. Intégration du système différentielle

Pour effectuer l'intégration des deux équations de compatibilité (III.15) et (III.17) successivement le long les caractéristiques C^+ et C^- , discrétisons la conduite en un certain nombre de points. Ces points de discrétisation seront supposés suffisamment proches pour nous permettre d'écrire :

$$df_{(x,t)} = f_{i+1} - f_i$$

Avec f une fonction telle que H ou Q aux points de discrétisation successifs (i) et ($i+1$). La canalisation est considérée comme constituée de N tronçons égaux, soit $N+1$ sections voir la figure (III-5), tel que H et v sont initialement connus à chaque section.

De la figure, on voit que le pas de temps $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$.

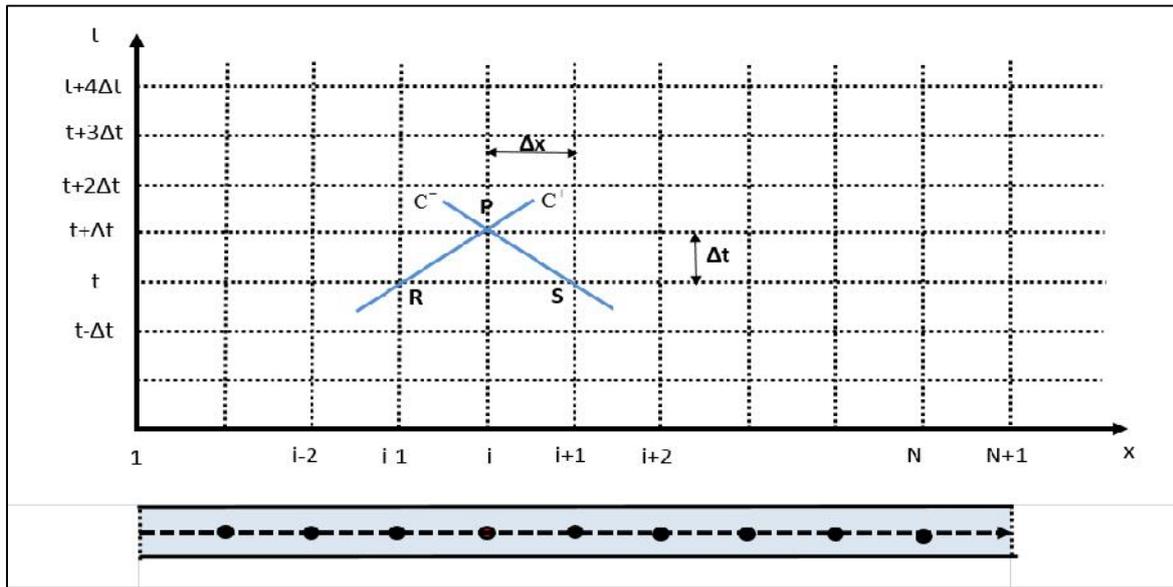


Figure (III.5) : Discretisation de la conduite

Pour plus de commodité et de simplicité des formules à utiliser pour calculer H_i et Q_i , on procède à l'intégration des équations de compatibilité (III.19) et (III.21)

- le long de la caractéristique C^+ :

$$d\left(H + \frac{a}{gS}Q\right) + \frac{\lambda Q|Q|}{2gDS^2} dx = 0 \quad (\text{III.23})$$

- le long de la caractéristique C^- :

$$d\left(H - \frac{a}{gS}Q\right) - \frac{\lambda Q|Q|}{2gDS^2} dx = 0 \quad (\text{III.24})$$

Soit connue l'ensemble des grandeurs H et Q le long de la conduite au temps t et on intègre l'équation (III.23) le long de la caractéristique C^+ passant par le point R de coordonnées $(i-1)$ et t , entre deux instants t et $t + \Delta t$ (c'est-à-dire on passe du point $(i-1)$ au temps t ; au point (i) au temps $t + \Delta t$) :

$$\int dH + \frac{a}{gS} \int dQ + \int \frac{\lambda Q|Q|}{2gDS^2} dx = 0 \quad (\text{III.25})$$

$$\text{Soit } \frac{\lambda Q|Q|}{2gDS^2} = BQ|Q| \quad \text{où } B = \frac{\lambda}{2gDS^2}, \text{ et en posant } R = \frac{a}{gS}$$

La relation (III.25) s'écrit alors :

$$\int dH + R \int dQ + B \int Q|Q| dx = 0 \quad (\text{III.27})$$

En intégrant (III.26) par rapport à H et Q, on aura :

$$(H_{P_i} - H_{i-1}) + R(Q_{P_i} - Q_{i-1}) + B \int Q|Q| dx = 0 \quad (\text{III.28})$$

Comme on ne dispose pas de la fonction Q(x), la dernière intégrale sera calculée par voie explicite ou en d'autres termes on supposera que le débit Q est constant entre t et $t + \Delta t$ et il est égale à Q_{i-1} .

Ce qui donne :

$$(H_{P_i} - H_{i-1}) + R(Q_{P_i} - Q_{i-1}) + TQ_{i-1}|Q_{i-1}| = 0 \quad (\text{III.29})$$

Avec : $t + \Delta t$

$$T = B(x_i - x_{i-1}) = B\Delta x \quad (\text{III.30})$$

En regroupant les termes correspondants au point P_i d'une part et ceux correspondants au point R_{i-1} d'autre part, on aura :

$$H_{P_i} + RQ_{P_i} = H_{i-1} + Q_{i-1}(R - T|Q_{i-1}|) \quad (\text{III.31})$$

On pose :

$$H_{P_i} + RQ_{P_i} = CP \quad (\text{III.32})$$

$$\text{Ou : } CP = H_{i-1} + Q_{i-1}(R - T|Q_{i-1}|) \quad (\text{III.33})$$

On procédera de la même manière pour intégrer l'équation (III.24), on trouve le long de la Caractéristique moins C^- :

$$CM = H_{P_i} - RQ_{P_i} \quad (\text{III.34})$$

$$\text{Ou } CM = H_{i+1} - Q_{i+1} (R - T|Q_{i+1}|) \quad (\text{III.35})$$

En éliminant Q_{pi} entre les équations (III.32) et (III.34), on aura :

$$H_{pi} = \frac{CP + CM}{2} \quad (\text{III.36})$$

Connaissant la valeur de H_{pi} , le débit Q_{pi} peut être trouvé à partir de l'une des équations (III.32) ou (III.34), et qui aura pour valeur :

$$Q_{pi} = \frac{CP - H_{pi}}{R} \quad \text{Ou} \quad Q_{pi} = \frac{H_{pi} - CM}{R} \quad (\text{III.37})$$

Les intégrations faites ont pour base les conditions suivantes :

- L'intégration a été effectuée pour une conduite à caractéristique unique.
- Le point i est encadré de part et d'autre par les points $i-1$ et $i+1$.
- Dans le cas où le point i est situé à la limite de la conduite, ($x = 0$ ou $x = L$),

On ne dispose alors que d'une seule équation (le long C^- ou le long C^+) et la détermination des inconnues Q_{pi} et H_{pi} se fait en faisant recours à une équation spéciale adaptée à la condition limite considérée.

Les équations (III.32) et (III.34) ont été obtenues moyennant un schéma aux différences explicite qui permet de calculer H , Q en chaque point de maillage au fur et à mesure que l'onde arrive aux nœuds. La précision dans les calculs est généralement satisfaisante, mais la méthode présente l'inconvénient de lier le pas d'espace au pas du temps. Afin de saisir cela, on prend comme exemple le cas d'une conduite composée de deux tronçons de caractéristiques L , D , e ,...etc complètement différentes. Dans le tronçon de longueur L_1 , on dispose la condition

$$\text{Suivante : } a_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \quad (\text{III.38})$$

$$\text{Telle que } L_1 = (N_1 - 1)\Delta x_1 \quad (\text{III.39})$$

Dans ce cas le premier point aura pour numéro 1 et le dernier point aura le numéro N_1 et par conséquent nous aurons discrétisé le tronçon de longueur L_1 en $(N_1 - 1)$ tronçons élémentaires de longueur Δx_1 .

Au point de raccordement, l'intégration correspondant au tronçon de longueur L_2 doit être effectuée avec le même pas de temps Δt . Or la célérité de l'onde dans ce tronçon est a_2 , donc on impose : $\Delta x_2 = a_2 \Delta t$.

On voit donc que ce tronçon doit avoir une longueur L_2 divisible par Δx_2 et par conséquent ne peut être quelconque. Cela se fait avec approximations successives tout en optant pour une certaine précision acceptable.

III.3.3. Conditions aux limites

III.3.3.1. Conditions initiales :

Ces conditions présentent les propriétés de l'écoulement « H » et « Q » à l'état initial avant la manœuvre de la vanne à l'instant initial ($t = 0$) ou bien l'état en régime stationnaire. Ils peuvent être donnés sous forme :

$$H = H(x, 0) = H(x) \text{ et } Q = Q(x, 0) = Q(x).$$

III.3.3.2. Conditions limite amont :

Nous considérons que le niveau du plan d'eau dans le réservoir reste constant, ainsi la charge au niveau de l'extrémité amont reste constante : $H(0, t) = H_0$

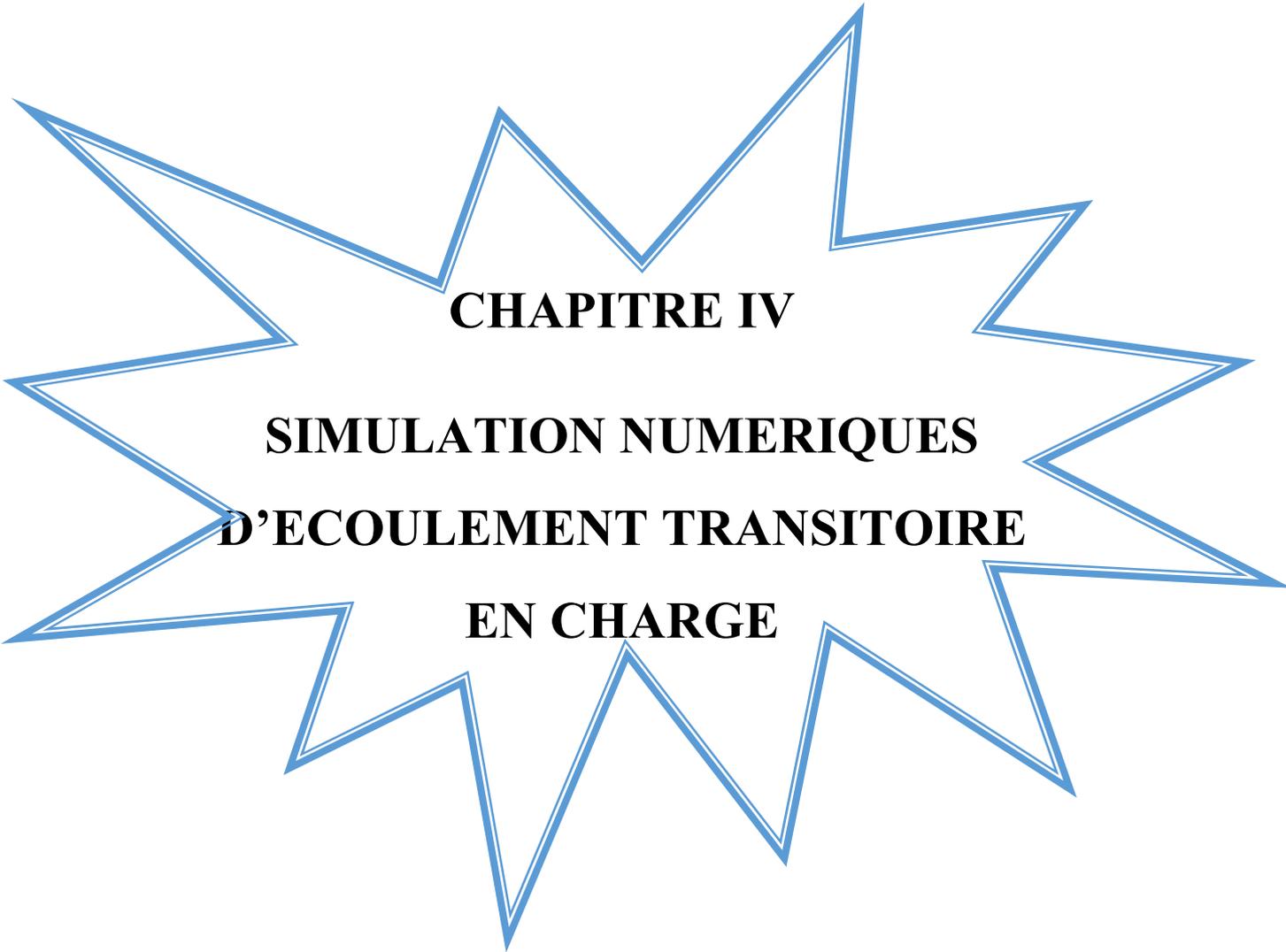
III.3.3.3. Conditions limite aval :

Une condition à la limite droite doit être donnée pour pouvoir calculer les valeurs des deux inconnues, La condition aux limites la plus simple est celle où l'une des variables est donnée en fonction du temps, exemple :

$$Q = f(L, t) = f(t).$$

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux méthodes l'une la méthode des différences finies est basée sur le développement de Taylor et l'autre la méthode des caractéristiques pour la résolution numérique des équations caractérisant l'écoulement transitoire en charge.



CHAPITRE IV

**SIMULATION NUMERIQUE
D'ÉCOULEMENT TRANSITOIRE**

EN CHARGE

IV.1.Introduction

Dans ce chapitre nous nous sommes focalisés sur l'utilisation de programme AFT Impulse utilisant la méthode des caractéristiques pour la simulation des phénomènes transitoires en charge dans des modèles d'installations hydrauliques et des systèmes hydrauliques en charges soit en gravitaire ou en refoulement, et on prends une exemple pratique d'une Cas d'écoulement gravitaire à partir d'un réservoir R_1 vers un réservoir R_2 passant par une vanne pour un temps de fermeture rapide ($0 < T_f < 2L/a$) et même système pour un temps de fermeture lente ($T_f \geq 2L/a$).

IV.2.Description générale de la Simulation avec AFT Impulse (pour le calcul du coup de bélier)

AFT Impulse (Applied Flow Technology) est un outil pratique pour aborder le sujet complexe des coups de bélier et les événements transitoires de surtension dans les systèmes hydrauliques. Il fournit la possibilité d'utiliser, durant le dessin d'un système, un outil à l'interface simple permet d'analyser, donc d'éviter, les effets du coup de bélier (**augmentation ou diminution de la pression**) dans un réseau de tuyauteries, quelle que soit sa taille ou sa complexité. Il identifie clairement quand et où se produisent les variations maximales et minimales de pression dans le système, permettant de modifier la configuration du système et ses conditions pour la fonctionnent de système. Et Dans les calculs hydrauliques, AFT Impulse tient compte des propriétés thermo-physiques du fluide véhiculé, par exemple (température, pression,.....) et les propriétés des matériaux de canalisation.

IV.2.1.Algorithmique de programmation

Deux algorithmes de calcul sont utilisés :

- Le régime stationnaire est calculé suivant Newton-Raphson pour résoudre les équations du régime stationnaire de conservation de la masse et du moment.
- Le calcul pour résoudre les équations du régime transitoire est réalisé suivant la méthode des caractéristiques. [10]

IV.2.2.Les caractéristiques d'AFT Impulse

Voici les caractéristiques principales d'AFT Impulse :

- Le logiciel a été conçu de façon à permettre l'étude et l'analyse des phénomènes transitoires et du coup de bélier.
- Il peut modeler des réseaux ou des systèmes complexes quelle que soit leur taille :

- Systèmes ouverts ou fermés.
- Réseaux complexes.
- Boucles.
- Il permet de créer et d'analyser de différents scénarios ou configurations d'un système donné, toute l'information restant dans le même fichier.
- Toutes les données, les résultats, les graphiques et les schémas peuvent être exportés sur MS-Office.
- Le logiciel travaille avec des unités SI ou Imperial.
- Il est doté de bibliothèques de liquides, de tuyauteries, de matériaux et d'accessoires.
- L'utilisateur peut créer, modifier et importer ses propres bibliothèques.
- Calculer des Pertes de charge et distribution de flux dans : tuyauteries, pompes, dispositifs anti-bélier, vannes de contrôle, soupapes de sécurité ou de décharge, etc.
- Le logiciel calcule la variation des forces hydrauliques se produisant dans les tuyauteries durant un phénomène transitoire.
- Les résultats peuvent être exportés sur des logiciels d'analyse de stress et de dessin
Des supports des tuyauteries
- Le logiciel peut calculer avec des fluides de tous types, des mélanges aux propriétés variables ou constantes et des fluides non newtoniens. [9]

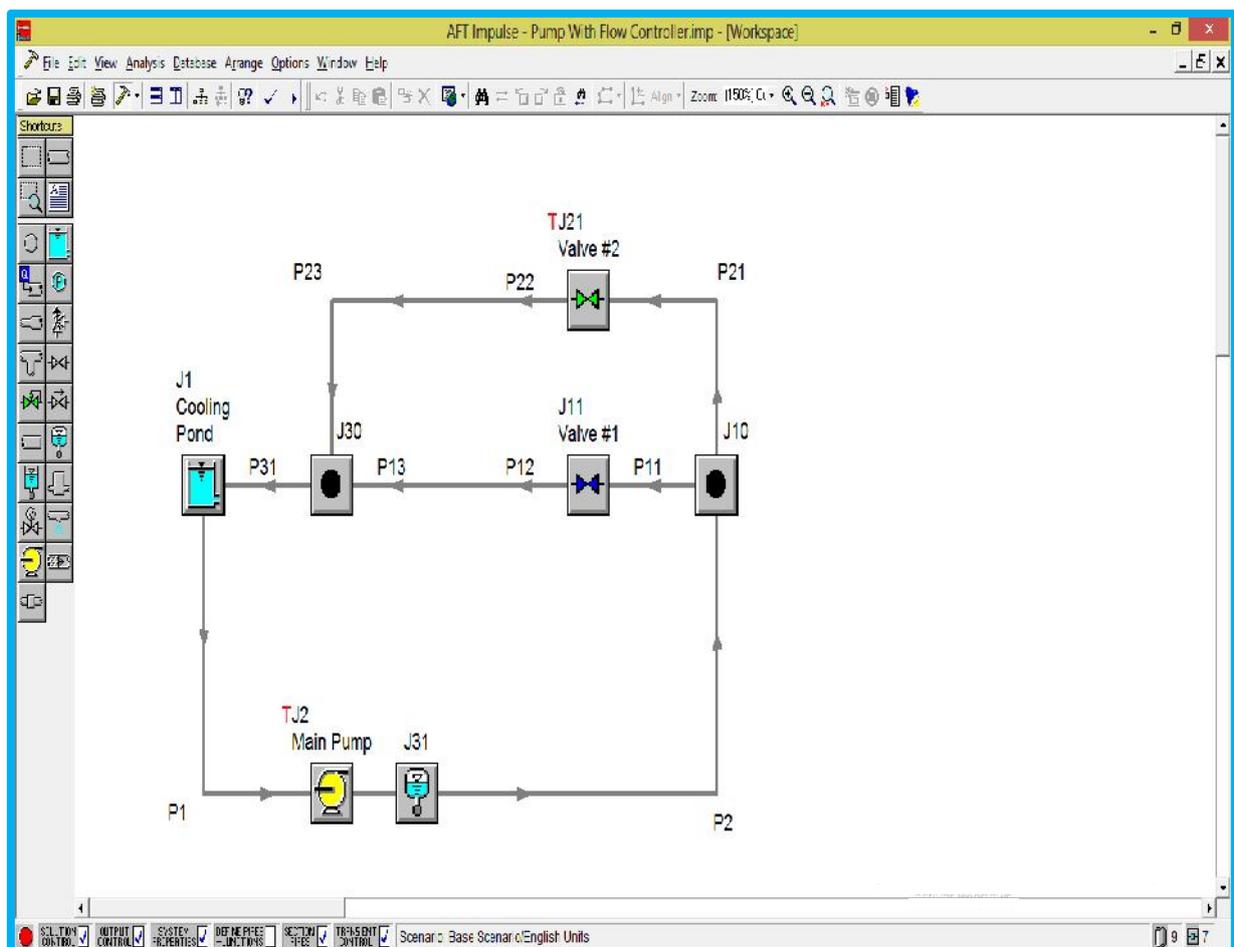
IV.2.3. Les composants et Accessoires dans le logiciel (AFT Impulse)

- Il permet le branchement d'un maximum de 25 tuyauteries par nœud, sans limitation du nombre de nœuds.
- Il peut modéliser des phénomènes transitoires dans l'alimentation ou dans l'égout.
- Il permet de définir des conditions de contour par pression ou débit, celles-là pouvant varier dans le temps.
- Pompe :
 - À vitesse variable.
 - Effets d'inertie de la pompe.
 - Il modèle n'importe quel type de pompe.
 - Il permet de réaliser des corrections par viscosité.
 - Il permet de définir des pompes en parallèle ou en série.
- Il permet de définir et de simuler le comportement des vannes de contrôle, des soupapes de sécurité ou de décharge, des vannes casse-vide, des vannes de purge d'air, etc.

- Il permet de définir et simuler le comportement de n'importe quel dispositif anti-bélier
- Il permet de définir tous types de soupape (à guillotine, à clapet, à ballon, etc.) et de simuler leur comportement
- Il permet de définir des composants et accessoires dont les courbes caractéristiques suivent une expression polynomiale.

IV.2.4. Résultats donnée par le logiciel AFT Impulse

- Les résultats obtenus sont présentés sous la forme de tableau par exemple dans un conduit lié à un régime transitoire ($H_{max}, H_{min}, Q_{max}, Q_{min}, V_{max}, \dots$) .
- L'utilisateur peut obtenir des graphiques de tous les paramètres calculés.
- L'utilisateur peut obtenir des schémas du modèle, colorés suivant des paramètres définis voir la figure (IV.1).



Figure(IV.1) : Schema du modèle dans le logiciel (AFT Impulse)

- L'utilisateur peut personnaliser les champs des tableaux de résultats, les graphiques et les schémas colorés.

- Toutes les données, les résultats, les graphiques et les schémas peuvent être exportés sur MS-Office.

IV.3. Les différentes étapes fonctionnement d'utilisation du logiciel (AFT Impulse)

1-Construction du modèle (conduites, vannes, réservoirs,...) dans la première apparaît au démarrage qui est la fenêtre espace de travail ;

2-Spécification de contrôle de la solution stationnaire ;

3- Entrée des données des conduites, des réservoirs, des vannes ;

4-Discretisation des conduites (nombre de tronçons), pour cela chaque conduite doit avoir sa longueur et sa célérité pour effectuer la relation précédente $n_i = L_i / a_i \cdot \Delta t$;

5-Spécification du contrôle transitoire, c'est-à-dire le temps où commence et où fini le régime transitoire ;

6-Enregistrement du modèle ;

7-Lancement du solveur ; on peut choisir deux types de solveurs comme cité auparavant (solveur du régime stationnaire et solveur du régime transitoire) ;

8-Revue des résultats ou sortie ; où on peut choisir le type de résultats à afficher avec la deuxième condition de la liste de contrôle « spécification de contrôle de sortie » et l'utilisation de la fenêtre de sortie comme par exemple :

- Affichage des résultats stationnaires et transitoires ;
- Affichage des données du régime transitoire à chaque pas de temps ;
- Affichage des valeurs minimales et maximales lors du régime transitoire ;

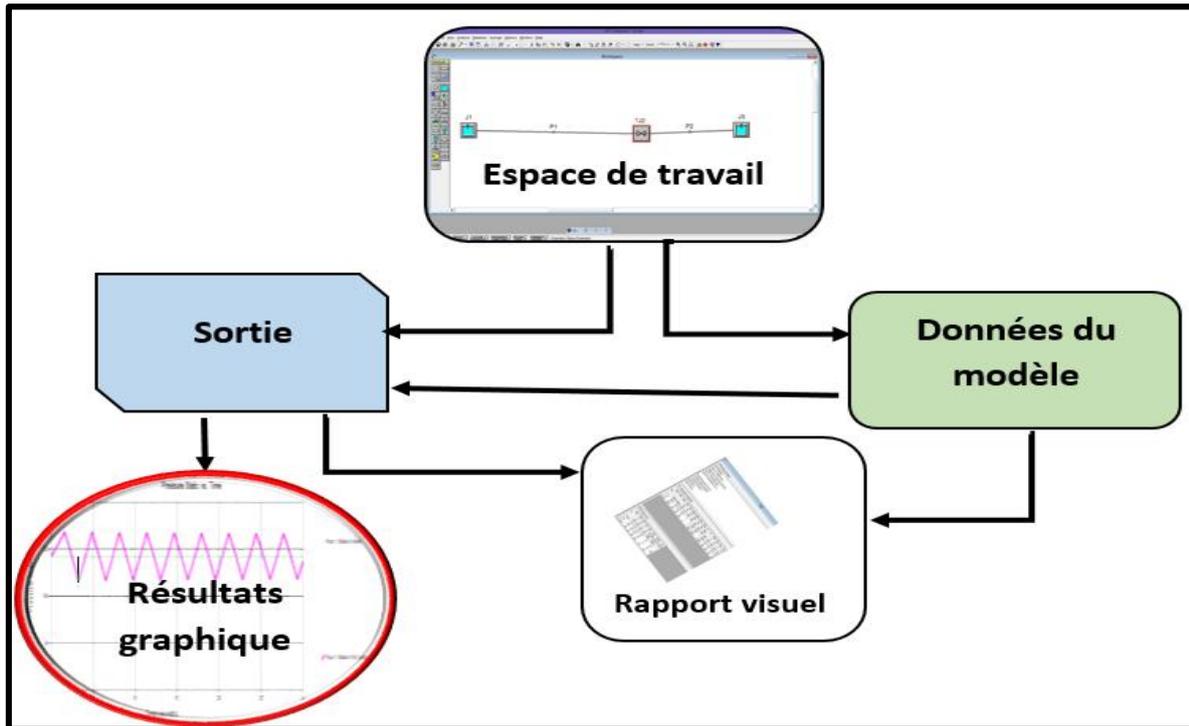
9-Visualisation graphique ;

10-Rapport visuel.

IV.4. Les fenêtres du logiciel AFT Impulse

Le logiciel est constitué de cinq sous-fenêtres ou fenêtres primaires qui travaillent en mode intégrée et nous on travaille avec l'un des fenêtres à toute heure. C'est pour cette raison qu'ils sont référencés comme fenêtres primaires.

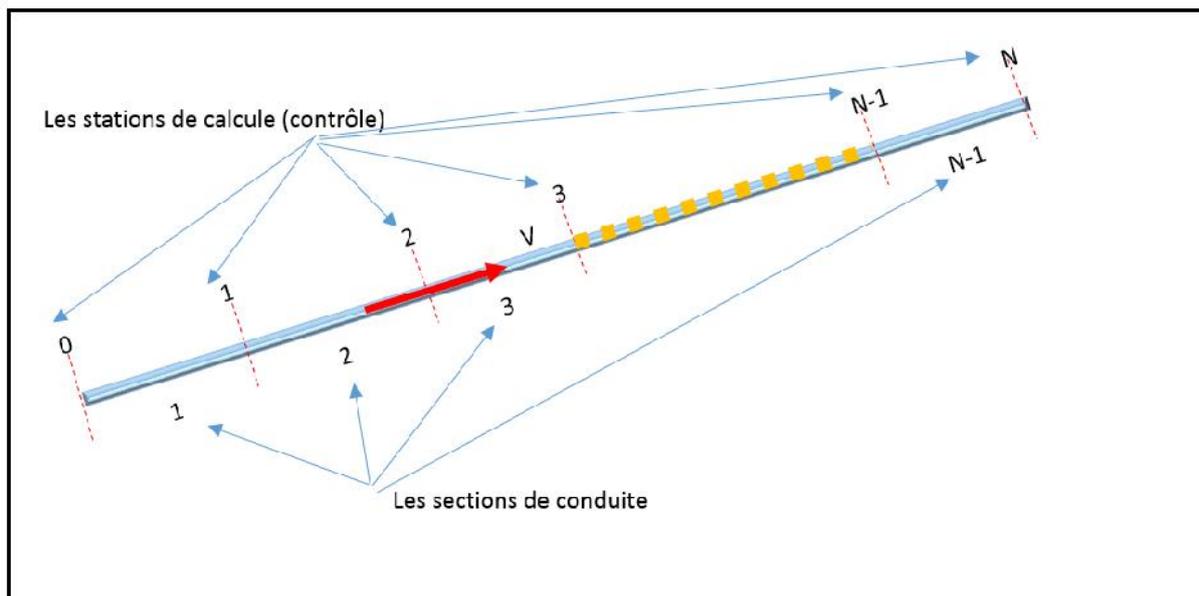
Dans les cinq fenêtres primaires deux sont des fenêtres d'entrées, deux sont des fenêtres de sorties et un qui affiche les informations d'entrée et de sortie. Le schéma de la figure(IV.2) montre la relation qui existe entre ces fenêtres primaires.



Figure(IV.2) : Les fenêtres primaires dans le logiciel AFT Impulse.

IV.5. Discrétisation des conduites

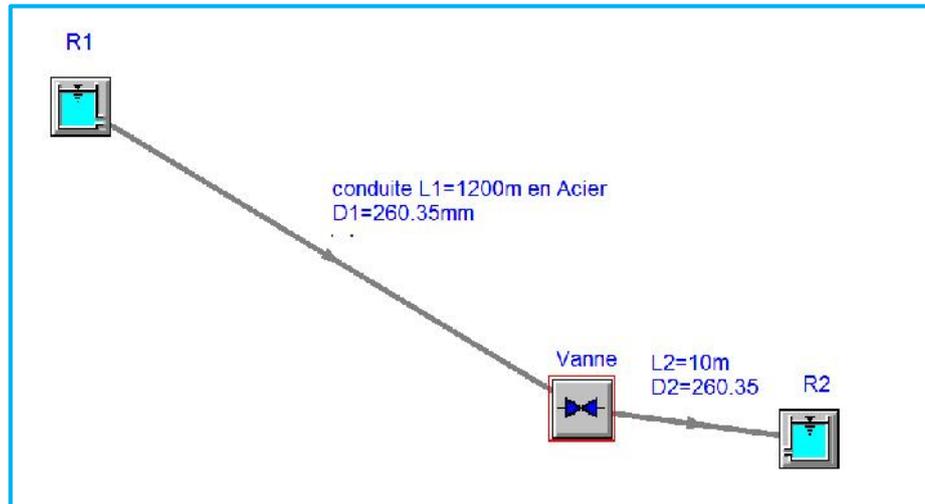
Une fois que la conduite est divisée en sections, le calcul se fera au point où les sections se joignent, celles-ci s'appellent les stations de la conduite, le nombre de stations est égal au nombre de sections plus un. La station qui est au début de la conduite prend le nombre zéro. Voir la figure (IV.3) :



Figure(IV.3) : Les stations de calculs.

IV.6. Modèle d'application :

Cas d'un écoulement gravitaire à partir d'un réservoir R₁ vers un réservoir R₂ passant par une vanne pour un temps de fermeture rapide ($0 < T_f < 2L/a$) et même système pour un temps de fermeture lente ($T_f \geq 2L/a$).



Figure(IV.4) : Schéma du modèle d'application dans AFT Impulse

IV.6.1. Données de la simulation

IV.6.1.1. Les caractéristiques du système

- R1 à une hauteur de 160 m, R2 à une hauteur de 0m,
- La conduite à une longueur de : $L_1 = 1200\text{mL}$.
- La conduite à une longueur de : $L_2 = 10\text{mL}$.
- Le diamètre de la conduite : $D = 260.35\text{ mm}$.
- La module d'élasticité du matériau de la conduite : $E_0 = 2,030997 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$.
- La rugosité absolue du matériau de la conduite est de : $0,04572\text{ mm}$.
- L'épaisseur des parois de la conduite : $e = 9,27099\text{ mm}$.

IV.6.1.2. Les caractéristiques thermo-hydrauliques du fluide :

- La température initiale est :
 $T_0 = 25\text{ (}^\circ\text{C)} = 273,15 + 25\text{ (}^\circ\text{K)}$
- La masse volumique de l'eau :
 $\rho_0 = 997,1701\text{ (Kg/m}^3\text{)}$
- Viscosité dynamique :
 $\mu = 8,872061 \cdot 10^{-4}\text{ kg/m.s}$

IV.6.1.3. Options de simulation :

- La simulation dure 50 secondes.
- Le pas de temps « Δt » :

$$\Delta t = \frac{L}{a.n}$$

- Les résultats de simulation sont donnés à chaque pas de temps.
- Les résultats de simulation sont donnés pour :

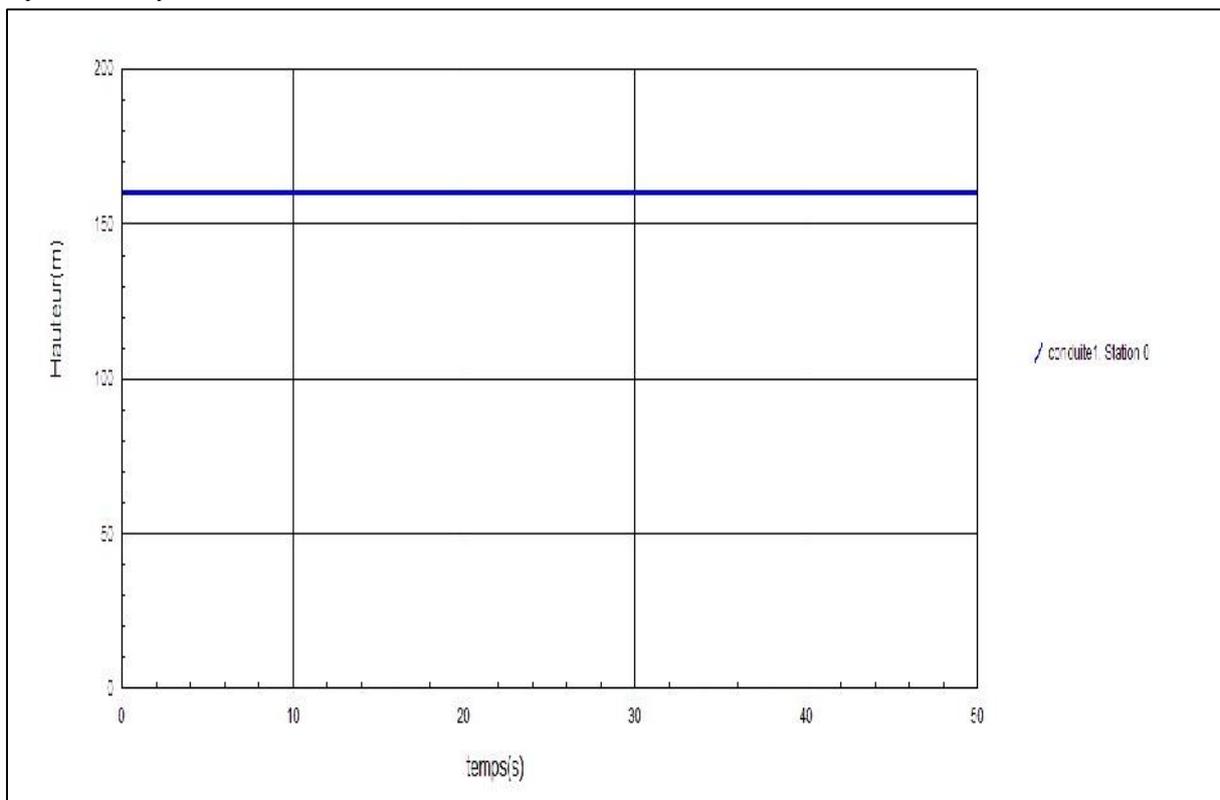
La hauteur H (m) et la vitesse v (m/s) pour chaque station

Tel que la vitesse de l'onde (célérité) : $a=1238.965$ m/s

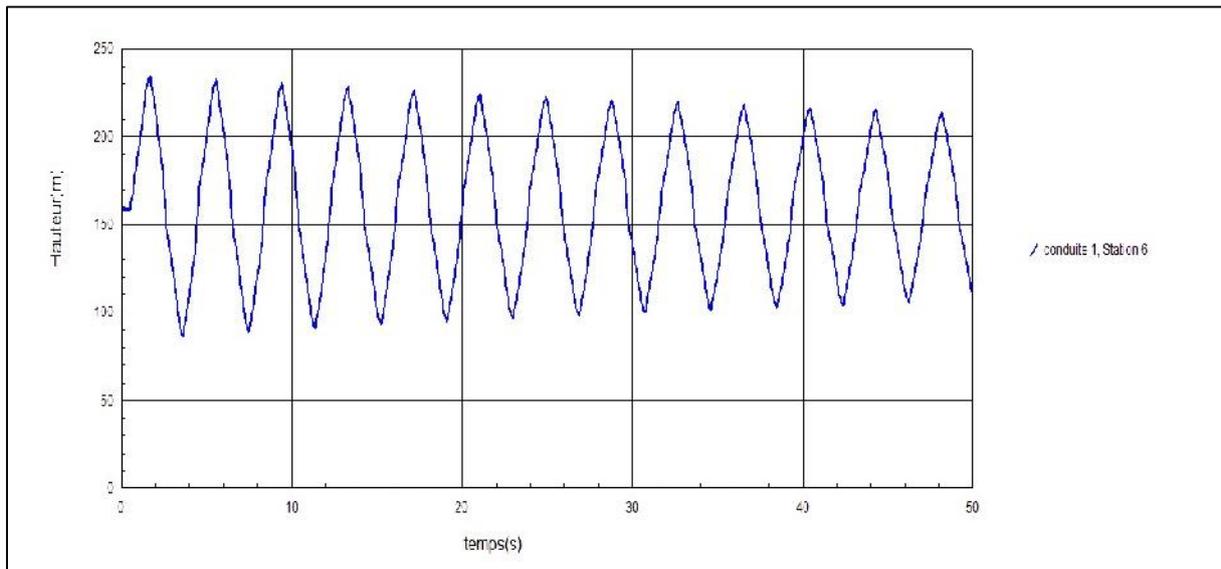
IV.6.2. Les résultats graphiques pour un temps de fermeture rapide ($0 < T_f < 2L/a$)

Le temps de réflexion (aller-retour) : $T_r = \frac{2L}{a} = 1,94$ s on prend un temps de fermeture

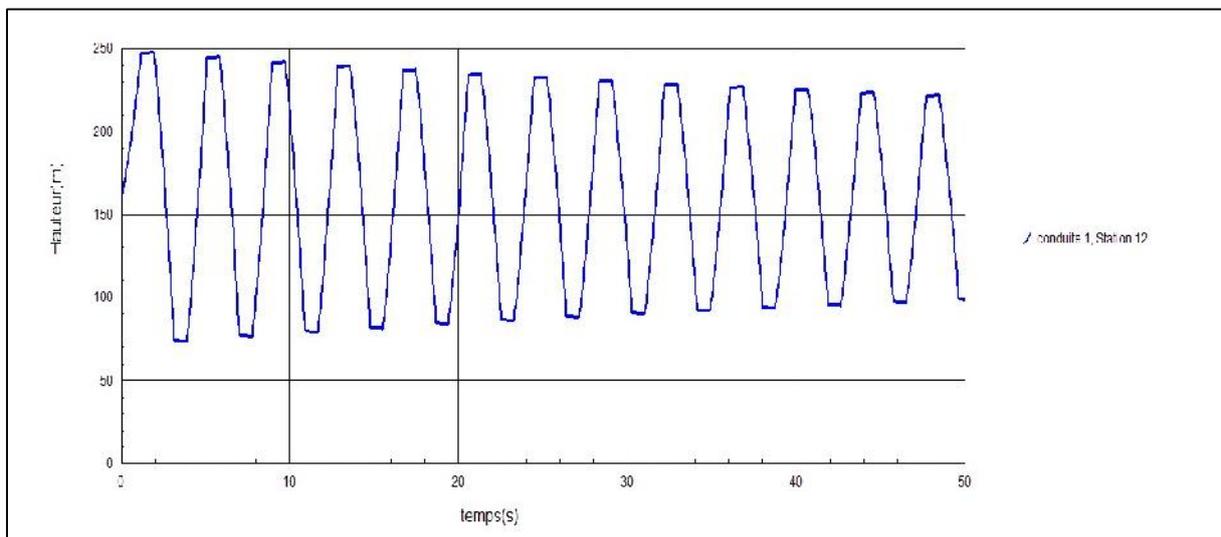
$$T_f = 1,1s < T_r$$



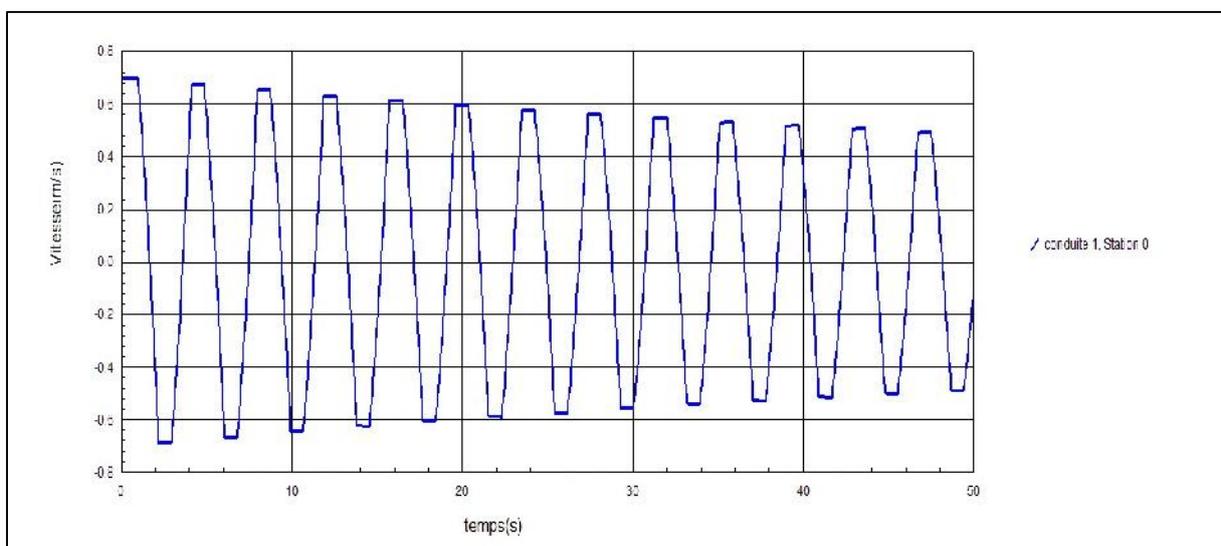
Figure(IV.5) : Variation de la hauteur dans le réservoir 1



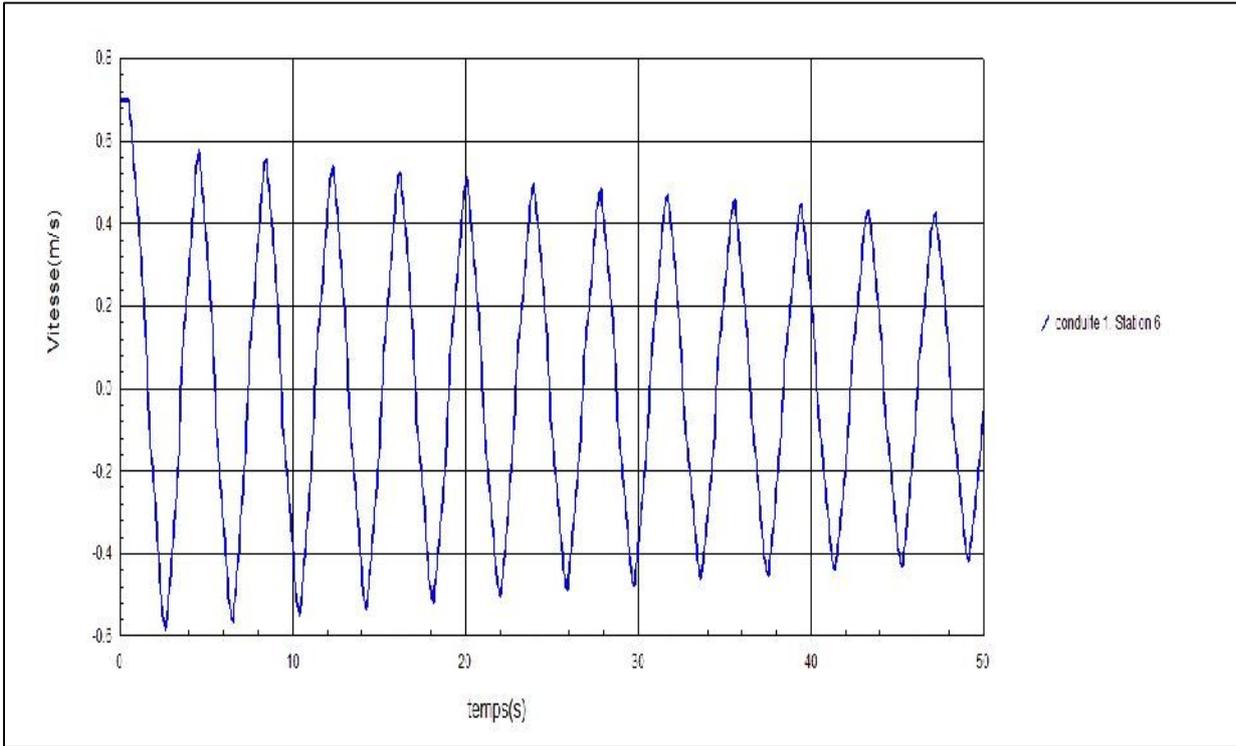
Figure(IV.6) : Variation de la hauteur au point médian de la conduite 1



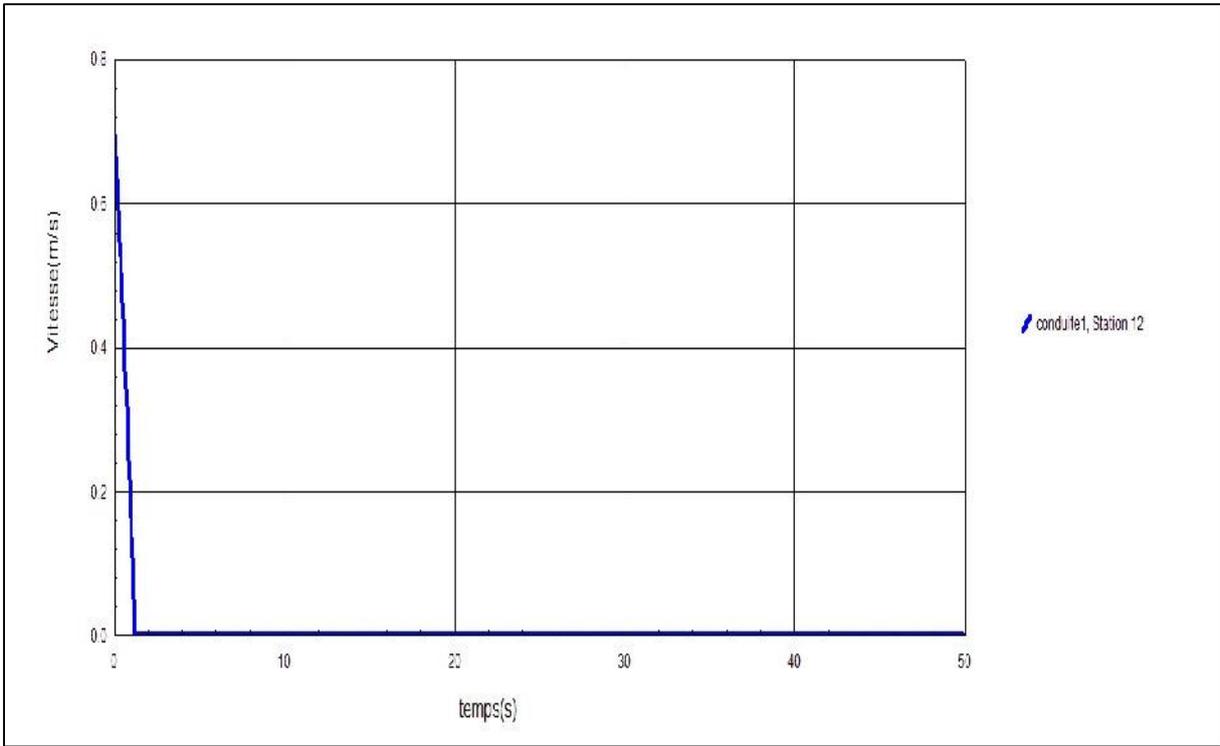
Figure(IV.7) : Variation de la hauteur dans la conduite 1 à la vanne



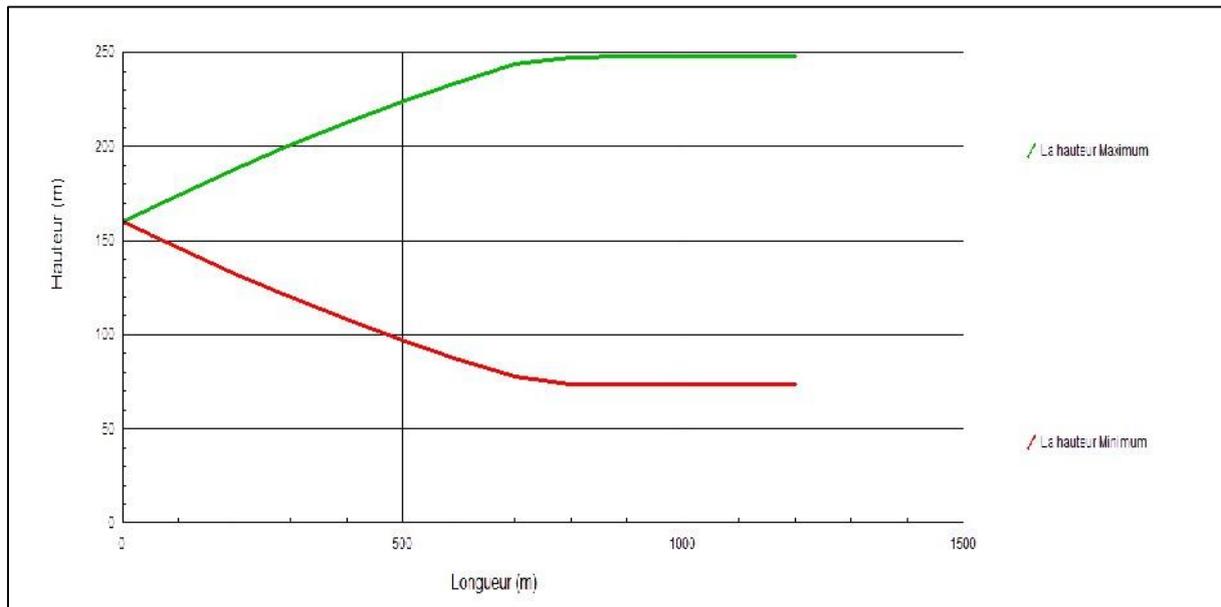
Figure(IV.8) : Variation de la vitesse dans le réservoir 1



Figure(IV.9) : Variation de la vitesse au point médian de la conduite 1



Figure(IV.10) : Variation de la vitesse dans la conduite 1 à la vanne



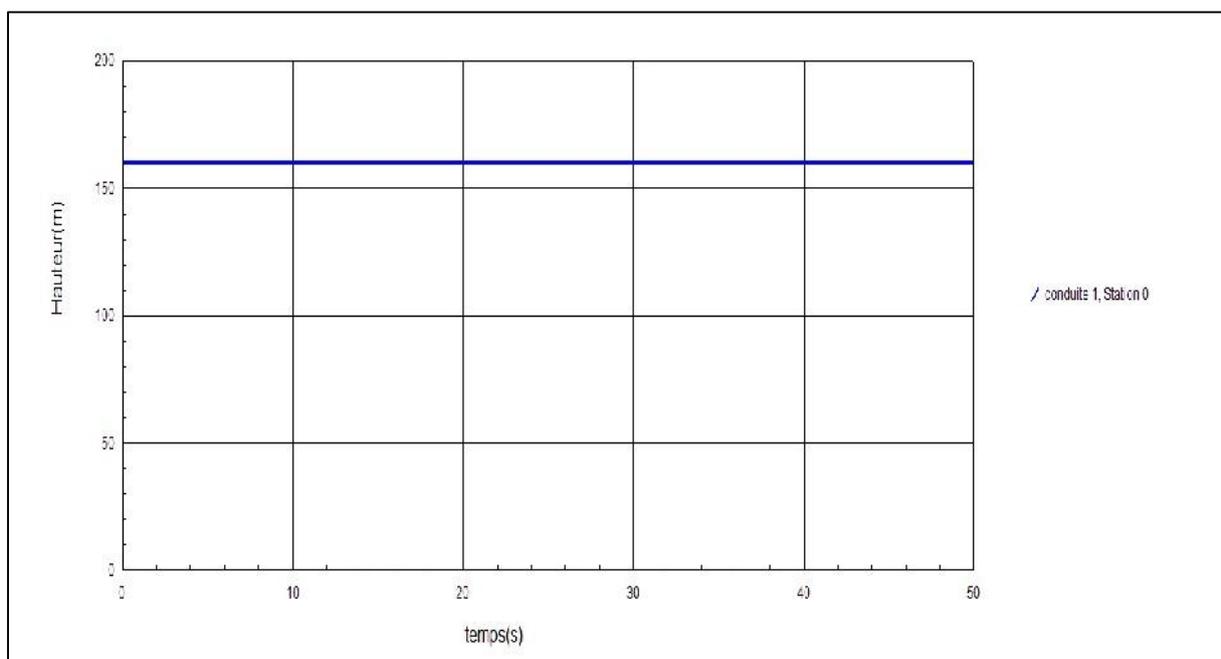
Figure(IV.11) : la hauteur max et min le long de la conduite

- La variation de la hauteur dans les trois stations (la vanne, le réservoir 1, point médian de la conduite) sur même figure pour un temps de fermeture rapide, voir L'ANNEXE II.

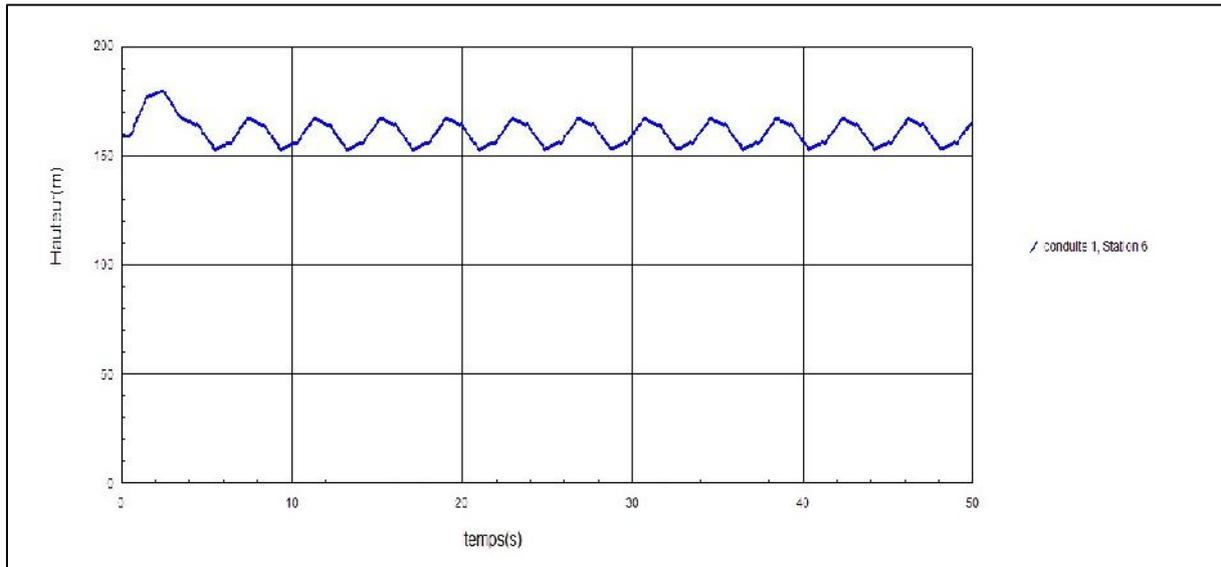
IV.6.3. Les résultats graphiques pour un temps de fermeture lente ($T_f > 2L/a$)

Le temps de réflexion (aller-retour) : $T_r = \frac{2L}{a} = 1,94s$ on prend un temps de fermeture

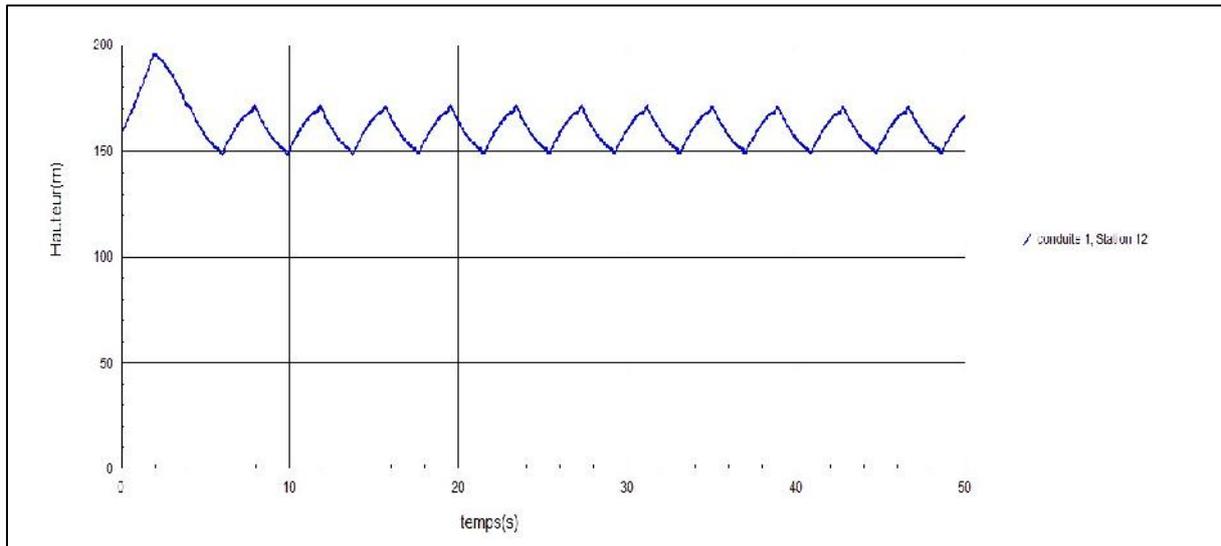
$$T_f = 4s > T_r$$



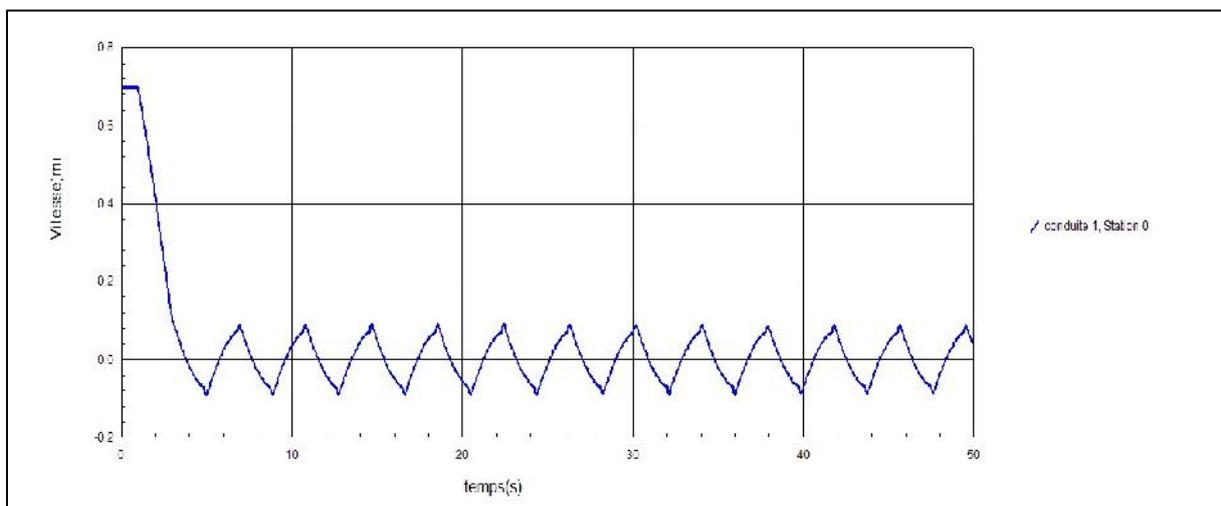
Figure(IV.12) : Variation de la hauteur dans le réservoir 1



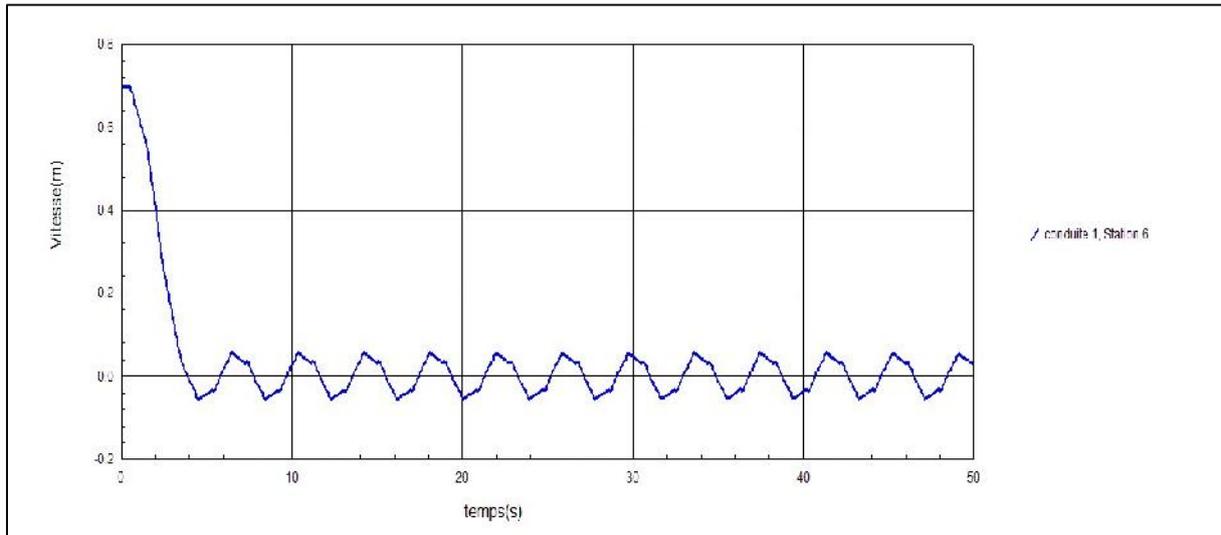
Figure(IV.13) : Variation de la hauteur au point médian de la conduite 1



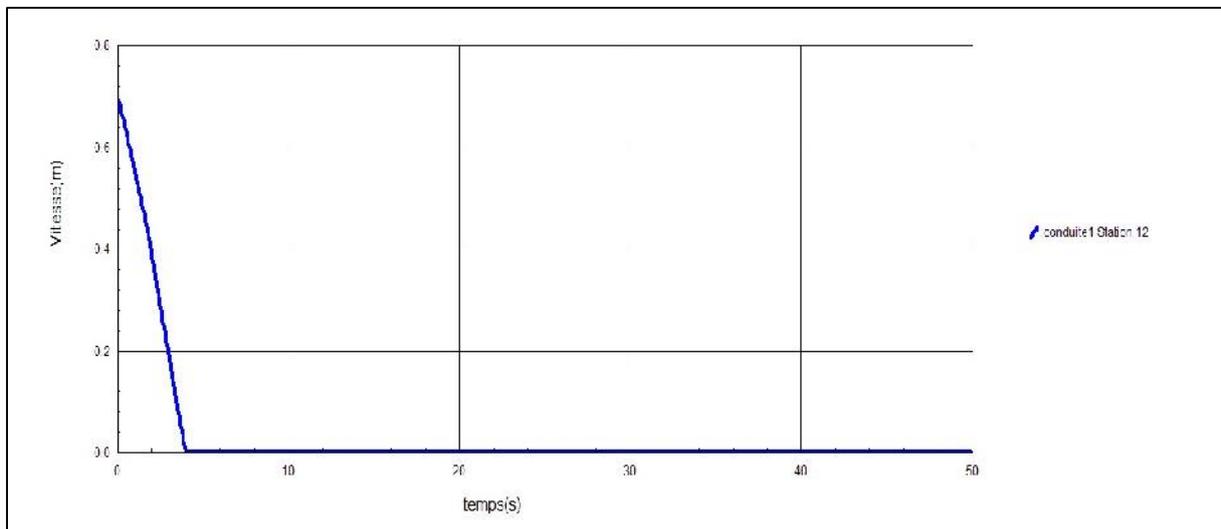
Figure(IV.14) : Variation de la hauteur dans la conduite 1 à la vanne



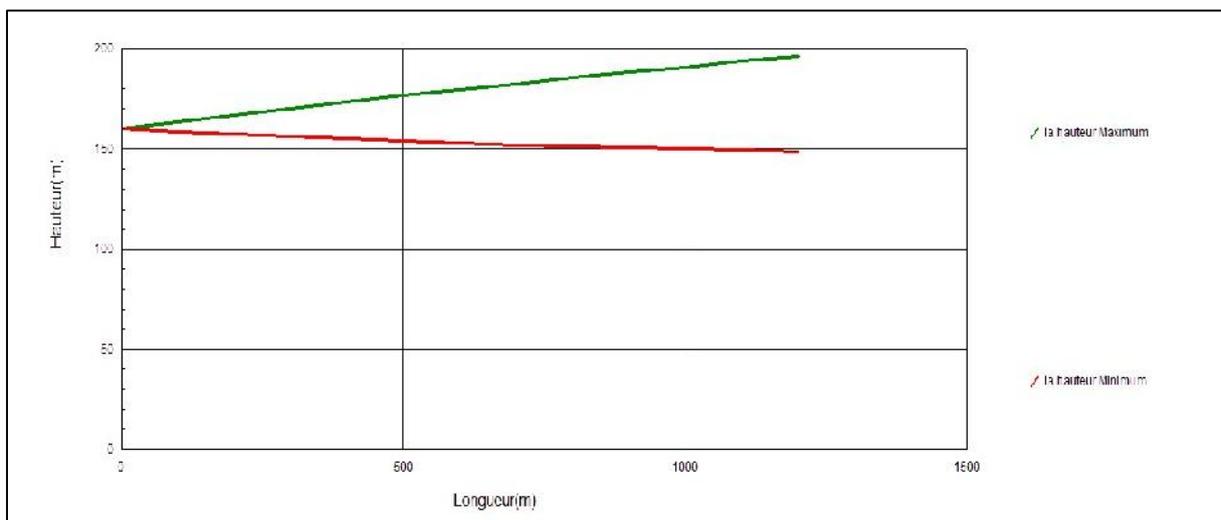
Figure(IV.15) : Variation de la vitesse dans le réservoir 1



Figure(IV.16) : Variation de la vitesse au point médian de la conduite 1



Figure(IV.17) : Variation de la vitesse dans la conduite 1 à la vanne



Figure(IV.18) : la hauteur max et min le long de la conduite

- Variation de la hauteur dans les trois stations (la vanne, le réservoir 1, point médian de la conduite) sur même figure pour un temps de fermeture lente, voir L'ANNEXE III.

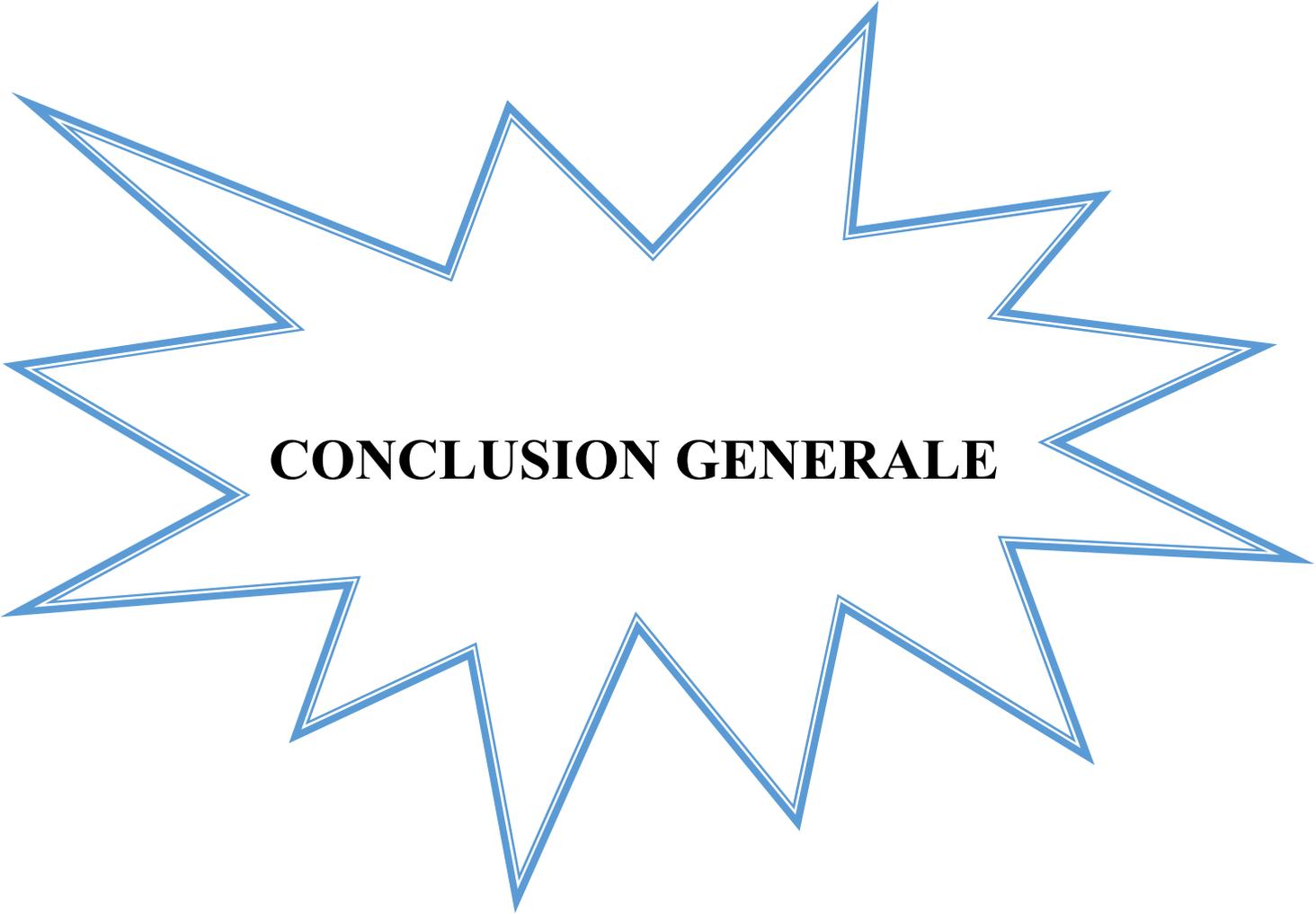
IV.6.4. Interprétation des résultats graphiques

- On remarque que l'amplitude diminue après chaque oscillation à cause de l'effet des pertes par frottement entre l'eau et les parois de la conduite (oscillation amorti), donc Les pertes de charge induisent un amortissement du phénomène coup de bélier.
- On constate des fluctuations atteignent des valeurs maximales et minimales ce qu'on appelle surpressions et dépressions, et l'alternance des fluctuations de la vitesse entre les valeurs positives et les valeurs négatives ce qui explique le mouvement du liquide dans les deux sens d'écoulement en provoquant des cas du coup de bélier.
- L'amplitude de fluctuation de la hauteur augmente au point médian et devient maximale au niveau de la vanne avec une hauteur constante dans le réservoir.
- En ce qui concerne la vitesse, nous enregistrons la diminution de sa valeur jusqu'à son annulation, l'amplitude des variations de la vitesse diminue du réservoir à la vanne.
- On remarque que les amplitudes de la hauteur sont plus importantes dans la fermeture rapide
- Augmentation de la pression due à la fermeture rapide à la vanne de la première oscillation presque égale $\left(\frac{a v_0}{g}\right)$, Donc cette valeur ne dépend que de la vitesse d'écoulement v_0 et la célérité d'onde "a".
- On remarque que dans le cas où la fermeture lente l'amplitude de la première oscillation presque égale $\left(\frac{2.v_0L}{gT_f}\right)$ au niveau de la vanne, donc cette valeur est indépendante de (a) et donc du matériau de la conduite.
- Dans le cas d'une fermeture lente, la hauteur à tout moment et en tout point de la conduite se trouve de la même manière.

- Les fluctuations de la vitesse sont plus importantes dans la fermeture rapide
- L'amplitude de fluctuations de la vitesse dans le temps est très importante au niveau de réservoir puis elle diminue le long de la conduite et devient minimale au niveau de la vanne

IV.7. Conclusion

D'après les résultats graphiques obtenus de la variation de la hauteur piézométrique et de la vitesse au cours du temps, il en résulte qu'il est nécessaire d'augmenter toujours le temps de la manœuvre des vannes à condition $T_f > T_r$ pour diminuer l'amplitude des variations de la hauteur piézométrique (valeur de coup de bélier) et de la vitesse durant l'écoulement transitoire.



CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

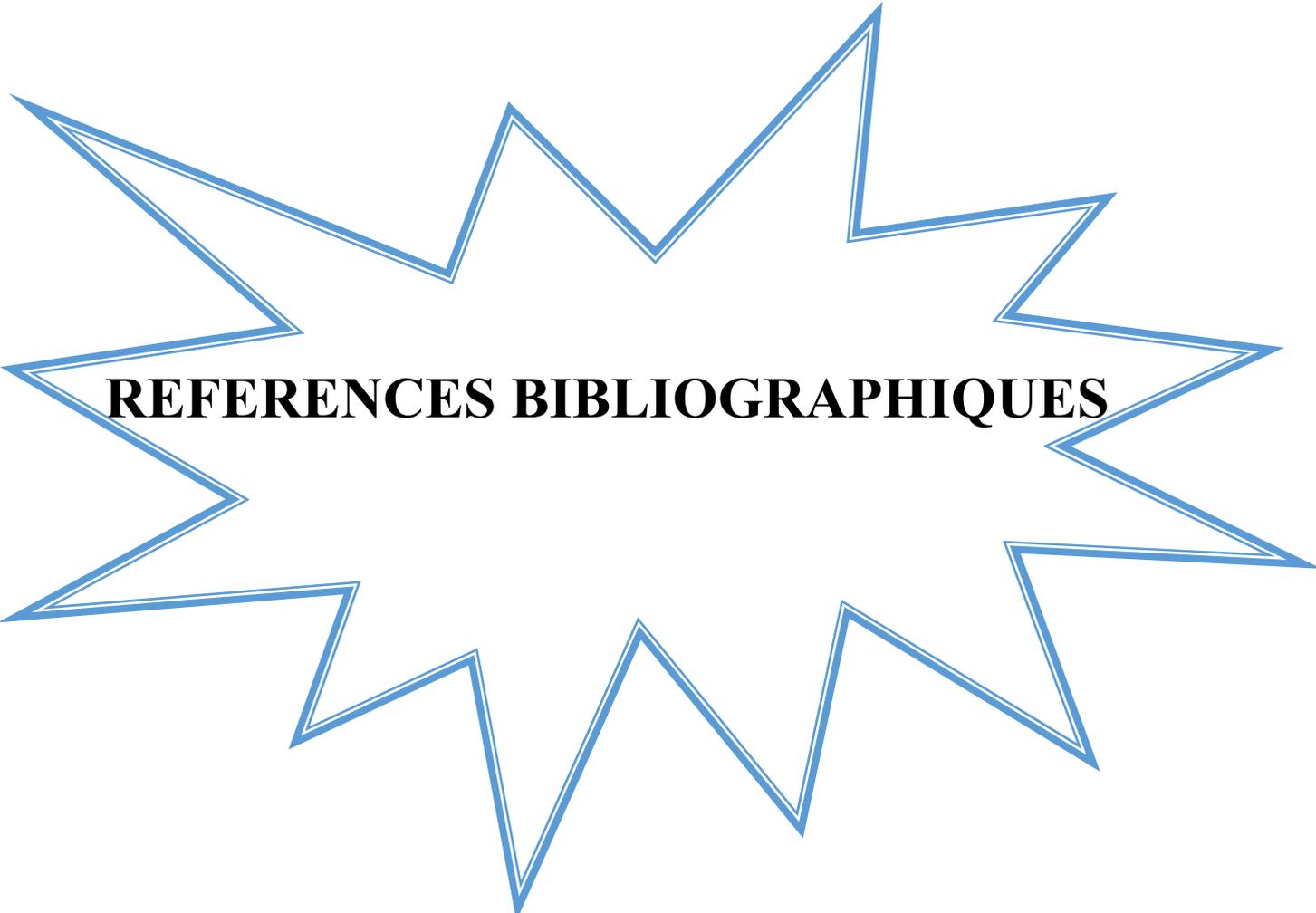
Dans ce travail, nous avons un modèle mathématique et numérique du phénomène d'écoulement instationnaire dans une conduite en matériau élastique.

L'écriture du modèle mathématique de ce phénomène aboutissant à un système d'équations différentielles a été faite à partir des équations de conservation de la masse et la quantité de mouvement.

La résolution du système d'équations final, a été faite en utilisant la méthode des caractéristiques ou des différences finies.

A l'issue de ce travail, nous avons montré que Le coup de bélier est un phénomène cyclique (périodique), Les pertes de charge induisent un amortissement du phénomène en diminuant l'amplitude après chaque oscillation et la fermeture de la vanne doit être à une fermeture lente.

Dans ce travail dont le but est d'approcher le problème numériquement, nous avons utilisé le programme AFT Impulse pour la simulation des phénomènes transitoires dans une modèle d'installation hydraulique en charges. Nous espérons également que les résultats obtenus soient pris en compte dans la conception et l'exploitation des projets hydrauliques.



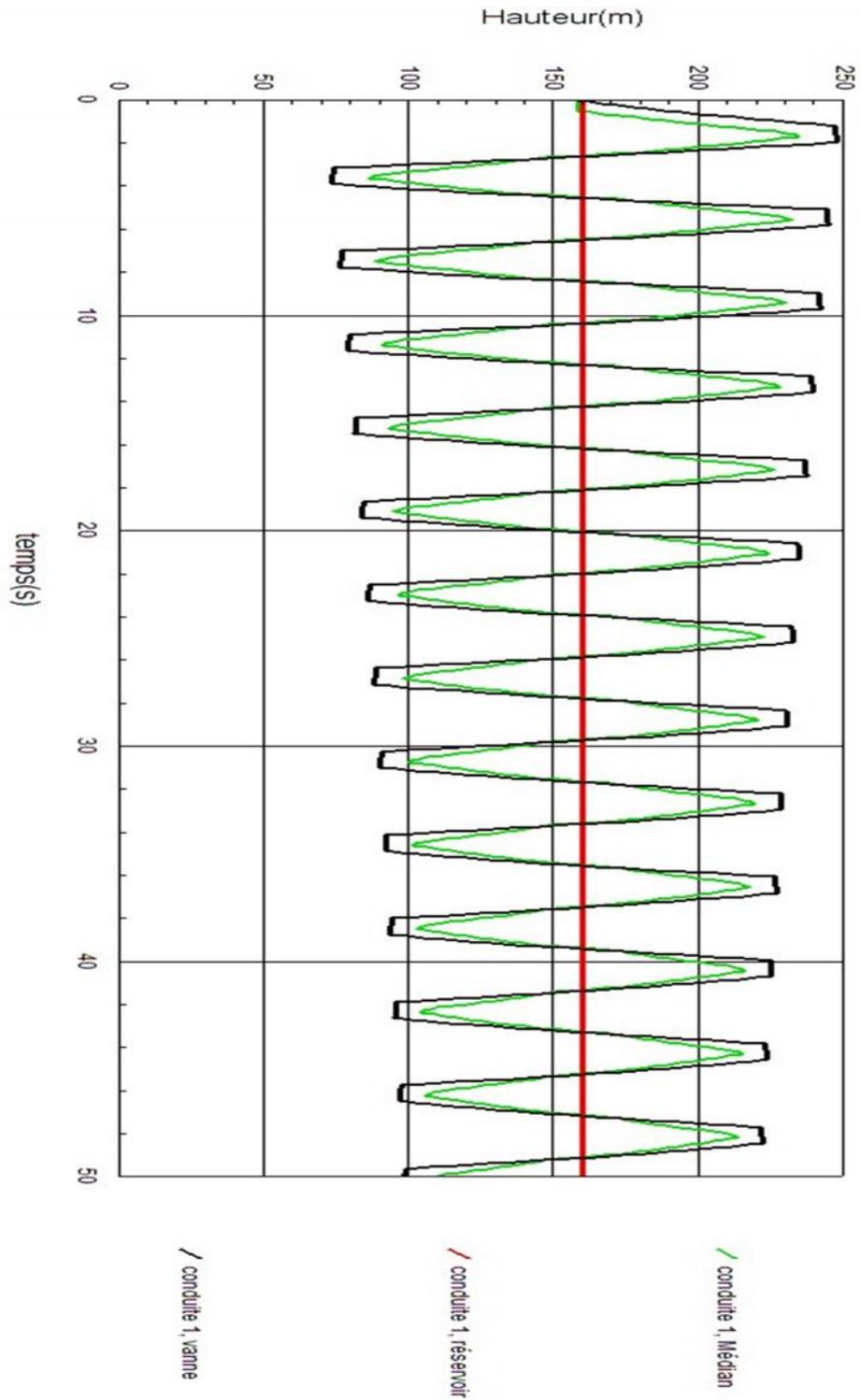
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GODOUNOV S. : Equation de la physique mathématique, Edition Mir, Moscou 1973.
- [2] OURAGH Y. : Ecoulement forcé en hydraulique, Tome 2, Edition O.P.U., Alger 1994.
- [3] A. DUPONT - Hydraulique urbaine. Tome II, édition Eyrolles, Paris 1977.
- [4] COMOLET R. : Mécanique expérimentale des fluides, Tome 1, Edition Masson, Paris 1979.
- [5] CARLIER M. : Hydraulique générale et appliquée, Edition EYROLLES, Paris 1980.
- [6] M.MEUNIER "Les coup de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression", ENGREF, Paris 1980.
- [7] BRUN E.A. : Mécanique des fluides tome 3, Edition Dunod, Paris 1970.
- Site graphique**
- [8] Modélisation des systèmes hydrauliques à écoulements transitoires en charge, (site web :http://infoscience.epfl.ch/record/116165/files/Comm_LCH_16.pdf).
- [9] travailler avec AFT Impulse (site web :<http://coupdebelier.com/aft-impulse/travailler-avec-aft-impulse.html>).
- [10] Applied Flow Technology (site web :<http://www.aft.com/products/impulse>).
- [11] régulation et sécurité d'exploitation, (site web :<http://www.bfe.admin.ch/>).
- [12] Valeurs propres (site web :constantin.vernicos.org/Enfrancais/tds/vecteurp.pdf).
- [13] Rugosité absolue (site web :<http://slideplayer.fr/slide/181113/>).
- [14] la masse volumique de l'eau, (site web :http://fr.wikipedia.org/wiki/Masse_volumique).
- [15] discrétisation par différences finies du laplacien
(site web :http://perso.ensta-paristech.fr/~lunevill/MA261/MA261_cours2_col.pdf).

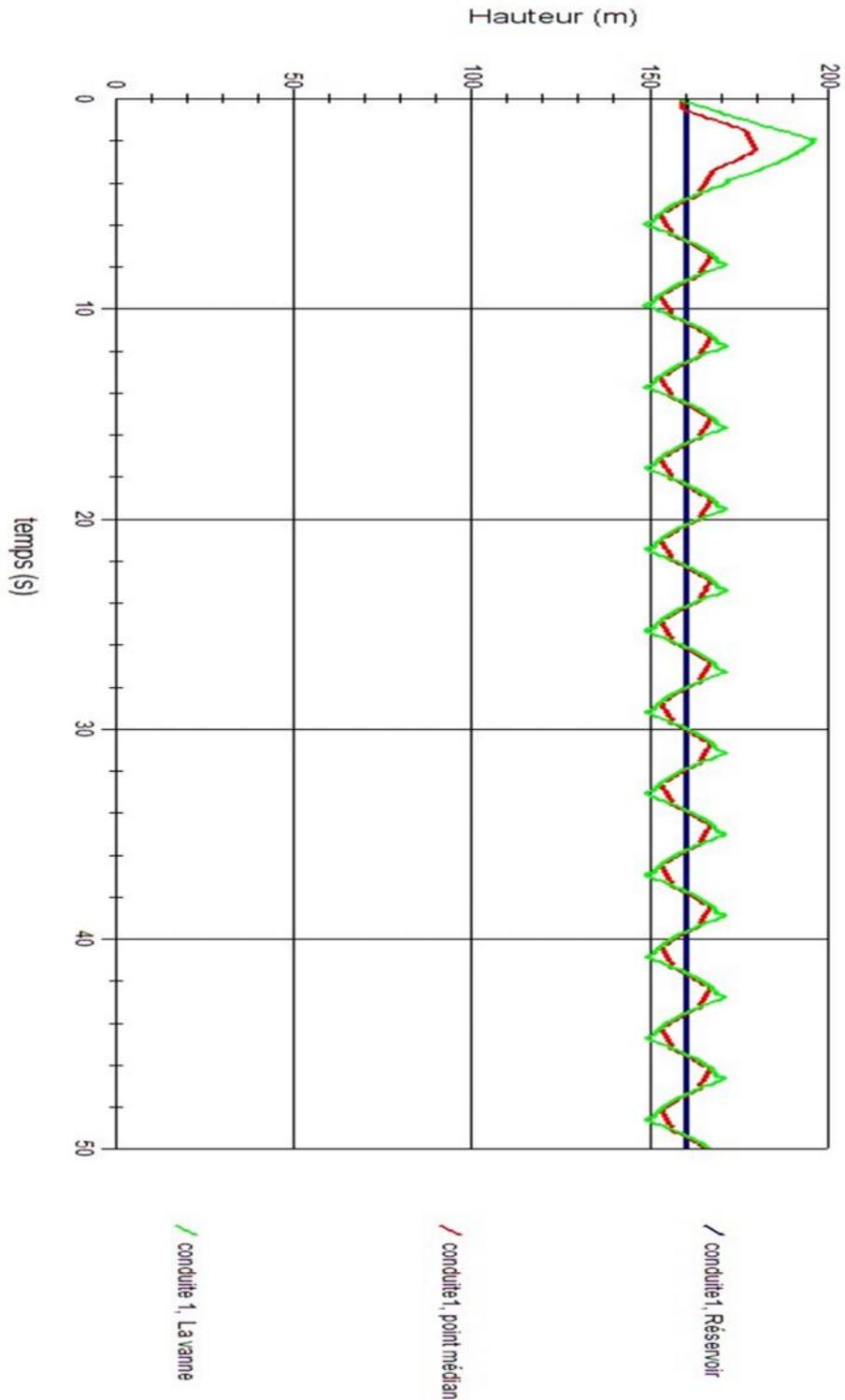
ANNEXE II

Variation de la hauteur dans les trois stations (la vanne, le réservoir 1, point médian de la conduite1) sur même figure pour un temps de fermeture rapide.



ANNEXE III

Variation de la hauteur dans les trois stations (la vanne, le réservoir 1, point médian de la conduite1) sur même figure pour un temps de fermeture lente.



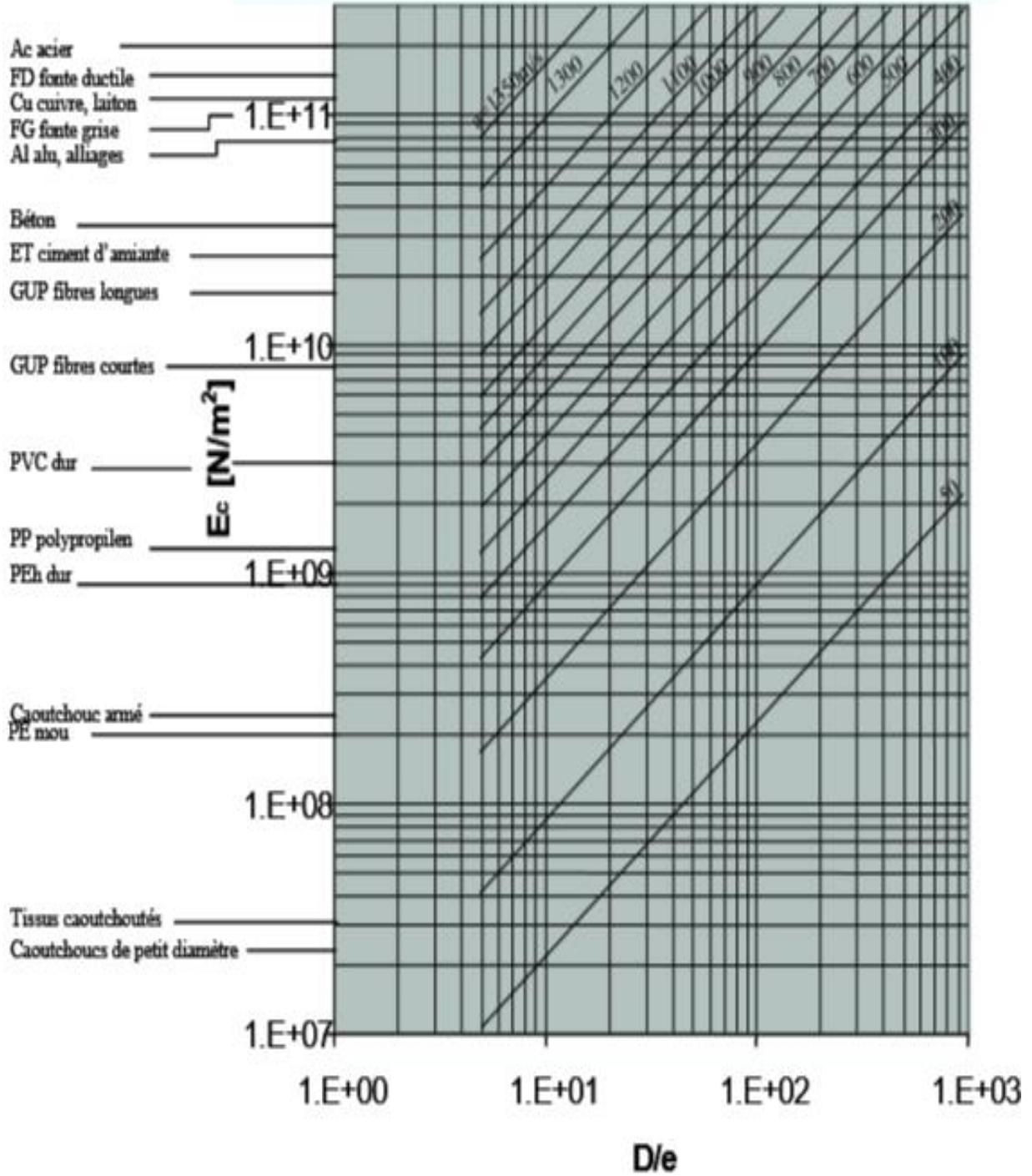
ANNEXE I

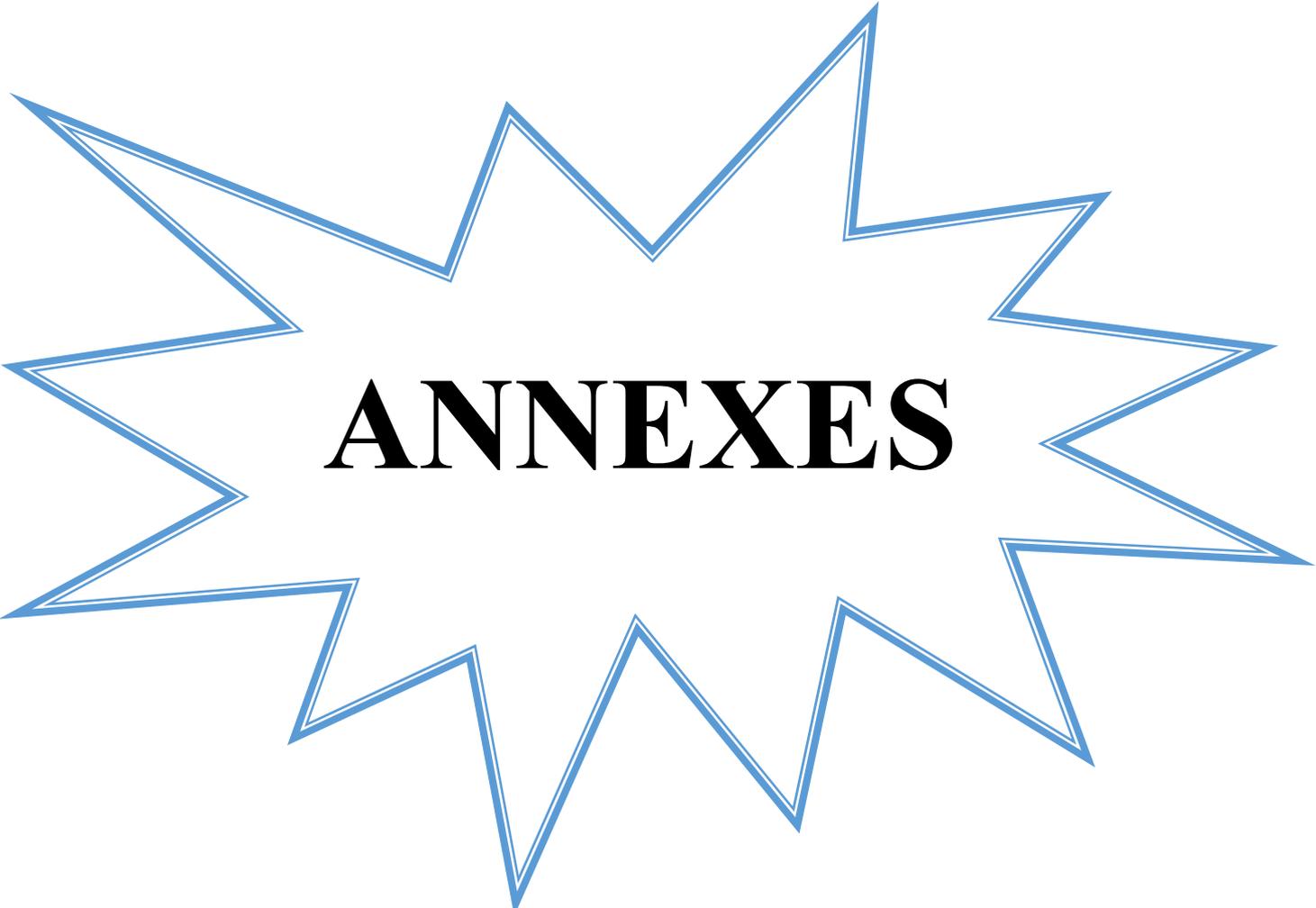
Célérité de l'onde a pour différentes qualités de conduites.

E_a eau à 10°C : $2.06 \cdot 10^9$ [N/m²]

à 20°C : $2.14 \cdot 10^9$ [N/m²]

à 30°C : $2.16 \cdot 10^9$ [N/m²]





ANNEXES