

Higher National School of Hydraulic

The Library

Digital Repository of ENSH



المدرسة الوطنية العليا للري

المكتبة

المستودع الرقمي للمدرسة العليا للري



The title (العنوان):

**Modélisation mathématique de la cavitation.**

The paper document Shelf mark (الشفرة) : 6-0044-17

APA Citation ( APA توثيق ):

Djama, Hajer (2017). Modélisation mathématique de la cavitation[Thèse de master, ENSH].

The digital repository of the Higher National School for Hydraulics "Digital Repository of ENSH" is a platform for valuing the scientific production of the school's teachers and researchers.

Digital Repository of ENSH aims to limit scientific production, whether published or unpublished (theses, pedagogical publications, periodical articles, books...) and broadcasting it online.

Digital Repository of ENSH is built on the open DSpace software platform and is managed by the Library of the National Higher School for Hydraulics. <http://dspace.ensh.dz/jspui/>

المستودع الرقمي للمدرسة الوطنية العليا للري هو منصة خاصة بتقييم الإنتاج العلمي لأساتذة و باحثي المدرسة.

يهدف المستودع الرقمي للمدرسة إلى حصر الإنتاج العلمي سواء كان منشورا أو غير منشور (أطروحات، مطبوعات بيداغوجية، مقالات الدوريات، كتب....) و بنه على الخط.

المستودع الرقمي للمدرسة مبني على المنصة المفتوحة DSpace و يتم إدارته من طرف مديرية المكتبة للمدرسة العليا للري.

كل الحقوق محفوظة للمدرسة الوطنية العليا للري.



Département Hydraulique Urbaine

## MEMOIRE DE MASTER

*Pour l'obtention du diplôme de Master en Hydraulique*

**OPTION : Système d'Alimentation en Eau Potable.**

**THEME :**

MODILISATION MATÉMATIQUE DE LA CAVITATION

**Présenté par :**

M<sup>me</sup> : DJAMA Hadjer.

**DEVANT LES MEMBRES DU JURY**

| Nom et Prénom                        | Grade | Qualité      |
|--------------------------------------|-------|--------------|
| M <sup>me</sup> MEDDI Hind           | M.C.A | Présidente   |
| M <sup>r</sup> AMMARI Abdelhadi      | M.C.B | Examineur    |
| M <sup>r</sup> BOUFEKANE Abdelmadjid | M.A.A | Examineur    |
| M <sup>me</sup> HOULI Samia          | M.A.A | Examinatrice |
| M <sup>me</sup> MOKRANE WAHIBA.      | M.A.A | Promotrice   |

Septembre 2017

## *Remerciements*

*Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.*

*En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Mme W.MOKRANE pour ses appréciations compétentes, ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.*

*Nous remercions vivement ma famille DJAMA et mon fiancé LANABI Houssem pour leur aide matérielle et morale durant toute la période de ma vie.*

*Je tiens également à exprimer mon gratitude envers tous les Enseignants et le personnel administratif de l'ENSH qui ont contribué à notre formation et à l'élaboration de ce présent travail.*

*Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail*

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

DEDICACE

*Je dédie ce modeste mémoire en premier lieu à :*

*À ma très chère mère LOUIZA à qui je dois beaucoup pour ces sacrifices, son amour, son aide et son soutien.*

*À mon père ABD-ELHAMID qui m'a soutenu et à su me donner courage au moment venu.*

*À mes SŒURS et mon FRÈRE.*

*À mon fiancé Housseem eddin .*

*À tous mes collègues et mes amis*

DJAMA HADJER

## ملخص

ظاهرة التجويف الهيدروليكي تتجلى من خلال إنشاء فقاعات، لها تأثير سلبي وإيجابي في مجالات مختلفة.

بحثنا الببليوغرافي يسمح لنا بالتمييز بين ثلاثة نماذج رياضية تحاكي التجويف.

نموذج رايلي-بليسيت يستند على كروية الفقاعة، نموذج النشر يستند على تفاضلية تركيز الهواء في السائل والنموذج الثالث يعتبر حركة فقاعة مماثلة لحركة النواس.

## RESUME

La cavitation phénomène hydraulique se manifestant par la création de bulles, ayant un impact négatif et positif pour différents domaines.

Notre recherche bibliographique a permis de faire une distinction entre trois modèles mathématique simulant la cavitation.

Le modèle de Rayleigh-plesset est basé sur la sphéricité de la bulle, le modèle de diffusion est basé sur le différentiel de concentration d'air en liquide et le troisième modèle considérant le mouvement de la bulle similaire à celui d'un pendule.

## ABSTRACT

Cavitation is a hydraulic phenomenon which manifested itself through the creation of bubbles, having a negative and positive impact on different areas. Bibliographic research made it possible to distinguish between three mathematical models that similar cavitation. The Rayleigh-plesset model is based on the sphericity of the bubble, the diffusion model is based on the liquid air concentration differential and the third model considers the movement of the bubble similar to that of a pendulum.

Mots clés : cavitation, bulle d'air, modèle mathématique, Rayleigh-plesset, modèle de diffusion, modèle harmonique, application, bibliographie.



# SOMMAIRE

## Introduction générale

### Chapitre 1

#### Généralités sur les écoulements et la cavitation

|  |    |
|--|----|
| Introduction générale.....   | 1  |
| I.1. Introduction .....  | 2  |
| I.2.Définition de la cavitation .....                                | 2  |
| I.3.Paramètres de la cavitation.....                                 | 4  |
| I.3.1. NPSH requis la condition de non cavitation.....               | 4  |
| I.3.2. Tension de vapeur : origine de la cavitation.....             | 7  |
| I.3.3. Coefficient de Thoma (nombre de cavitation $\sigma_c$ ) ..... | 8  |
| I.4.Phases de la cavitation.....                                     | 8  |
| I.4.1 Ecoulement diphasique.....                                     | 9  |
| I.4.2.Classification des écoulements diphasiques .....               | 9  |
| I.5.Impact de la cavitation .....                                    | 12 |
| I.6.Conclusion .....   | 14 |

### Chapitre 2

#### Chronologie bibliographique

|   |    |
|---|----|
| II.1. Introduction .....                                      | 15 |
| II.2. Chronologie des études de la dynamique des bulles ..... | 15 |
| II.2.1.Contexte général .....                                 | 18 |
| II.2.2.Contexte français .....                                | 23 |
| II.3.Conclusion.....  | 24 |

## Chapitre 3

### Modélisation mathématique

|  |    |
|--|----|
| III.1.Introduction .....   | 25 |
| III.2.Classique par Rayleigh-plesset.....                              | 25 |
| III.2.1.Formulation .....  | 25 |
| III.3.Modèle de diffusion .....  | 28 |
| III.3.1.Formulation .....  | 28 |
| III.4. Modèle harmonique.....  | 29 |
| III.4.1.Modes propres radiaux d'une seule bulle d'air dans l'eau ..... | 29 |
| III.4.2.Couplage de deux bulles .....                                  | 36 |
| III.5.Conclusion .....   | 41 |

## Chapitre 4

### Discussions et perspectives

|   |    |
|---|----|
| VI.1. Introduction.....                           | 42 |
| VI.2.Présentation du logiciel utilisé .....       | 42 |
| VI.3.Application .....                            | 42 |
| VI.3.1. Modèle Reiligh plesset.....               | 42 |
| VI.3.1.1.Application .....                        | 42 |
| VI.3.1.2.Interprétation.....                      | 43 |
| VI.3.2. Modèle de diffusion .....                 | 43 |
| VI.3.2.1.Application .....                        | 43 |
| VI.3.2.2.Solution numérique .....                 | 44 |
| VI.3.2.3.Interprétation modèle de diffusion ..... | 46 |
| VI.3.3.Modèle harmonique .....                    | 46 |
| VI.4. Perspectives .....                          | 46 |
| VI.5.Conclusion .....                             | 48 |
| Conclusion générale                               |    |

# LISTE DES FIGURES

|  |    |
|--|----|
| <b>Figure I.1:</b> La constitution de la bulle de cavitation .....   | 3  |
| <b>Figure. I.2 :</b> Variation du NPSH requis avec le débit circulé par la pompe.....                          | 5  |
| <b>Figure.I.3 :</b> Influence du diamètre de la roue.....  | 6  |
| <b>Figure I.4. :</b> Variation du NPSH requis et NPSH disponible.....  | 7  |
| <b>Figure 1.5 :</b> Écoulement à bulles.....   | 10 |
| <b>Figure 1.6 :</b> Écoulement à poches .....  | 10 |
| <b>Figure 1.7 :</b> Écoulement stratifié.....  | 10 |
| <b>Figure 1.8 :</b> Écoulement à vagues .....  | 11 |
| <b>Figure 1.9 :</b> Écoulement à bouchons de gaz.....  | 11 |
| <b>Figure 1.10 :</b> Écoulement annulaire .....  | 11 |
| <b>Figure 1.11 :</b> Écoulement dispersé .....   | 12 |
| <b>Figure III.2.1 :</b> Représentation de la bulle à l'instant t.....  | 25 |
| <b>Figure VI.1 :</b> Evolution des champs de pression .....  | 43 |
| <b>Figure.VI.2 :</b> Solution analytique de l'équation de diffusion de l'air pour plusieurs pas de temps ..... | 44 |
| <b>Figure.VI.3 :</b> Solution numérique de l'équation de diffusion de l'air. ....                              | 45 |
| <b>Figure.VI.4 :</b> Solution numérique de l'équation de diffusion de l'air avec le maillage.....              | 45 |

# LISTE DE TABLEAU

|  |   |
|--|---|
| <b>Tableau I.1 :</b> Température d'ébullition d'eau en fonction de la pression ..... | 8 |
|--|---|

# Introduction générale

La cavitation fait aujourd'hui l'objet de nombreuses recherches fondamentales. Elles mettent en œuvre une instrumentation de plus en plus performante et coûteuse : cinématographie, micro capteurs, holographie, laser etc..... Mais le phénomène lui-même, comme ses principales conséquences (érosions, bruits) sont encore loin d'être parfaitement compris et nécessitera encore des investissements très importants.

Avec tous les champs d'applications dans lesquelles la cavitation se développe son étude est du domaine de la recherche fondamentale. Sa modélisation va continuer à susciter beaucoup d'intérêt. Notre travail se place dans ce contexte.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres :

L'introduction générale

Le premier chapitre est consacré à donner des généralités sur ce phénomène

Le deuxième chapitre présente une chronologie sommaire ou une bibliographie des études de la dynamique des bulles.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation mathématique : on cite les différents modèles sur les modélisations mathématiques de la cavitation.

Le quatrième chapitre a pour objectif de faire une synthèse par la discussion des modèles présentés.

En fin une conclusion générale permettra d'achever ce travail.

## **Chapitre I**

### **Généralités sur les écoulements et la cavitation**

#### **I.1. Introduction**

La cavitation a lieu dans les écoulements liquides lorsque la pression du milieu descend suffisamment pour engendrer un changement de phase et la formation de bulles de vapeur.

Parsons (1906) [1] a été le premier à identifier le phénomène de la cavitation, comme étant la résultante de la vaporisation au sein même de l'écoulement.

Le présent chapitre est consacré à des généralités sur ce phénomène

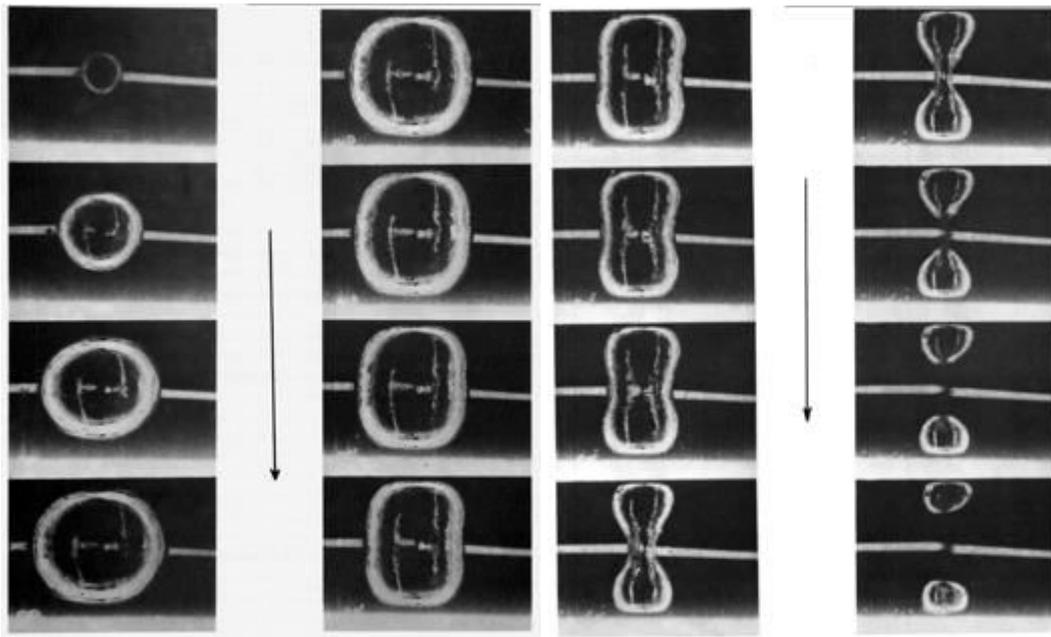
#### **I.2. Définition de la cavitation**

Mécaniquement, on peut définir la cavitation par la rupture du milieu continu de liquide sous l'effet de contraintes excessives. Physiquement, La cavitation est la vaporisation d'un fluide soumis à une pression inférieure à sa pression de vapeur. Ce phénomène se manifeste par la formation au sein de l'écoulement, de bulles, de poches, de tourbillons ou de torches de vapeur. Dans notre étude on s'intéresse à la cavitation par bulles.

En d'autre terme, C'est la formation de bulles de vapeur au sein d'un milieu liquidien initialement homogène lors d'une baisse brutale de la pression, à température constante.

Exemple :

Aspiration de liquide dans une seringue.



Constitution et déformation de la bulle de cavitation

Déformation, fragmentation et disparition de la bulle de cavitation: Le bruit est contemporain du choc des parois

**Figure I.1** : Constitution et déformation de la bulle de cavitation [2]

La constitution de la bulle de cavitation est due à une baisse de pression au sein du milieu liquidien mais cet état est instable

**a) Cavitation en écoulement en charge**

Dans des réseaux d'eau potable sous pression, des réseaux d'irrigation sous pression...

**b) Cavitation en écoulement a surface libre**

Dans les écoulements dans les coursiers des évacuateurs de crue et dans le ressaut hydraulique.

**c) Cavitation dans les machines hydrauliques**

La cavitation est un phénomène qu'on retrouve dans les machines et dispositifs qui fonctionnent avec des fluides à l'état liquide tels que les pompes, les inducteurs, les injecteurs et les hélices de bateaux ou de sous-marins.

## I.3. Paramètres de la cavitation

### I.3.1. NPSH requis la condition de non cavitation

NPSH est l'abréviation anglo-saxonne de «Net Positive Suction Head», ce qui se traduit en français par : «Charge Totale Nette à l'Aspiration». D'une manière plus concrète, cela représente la pression qui existera à l'aspiration de la pompe, uniquement du fait du réseau et du liquide pompé (quel que soit la pompe utilisée). Définition du NPSH : C'est la pression totale en [m] de colonne liquide pompée déterminée à la bride d'aspiration de la pompe, moins la  $P_v$  du liquide à la température de fonctionnement

Mathématiquement :

$$\text{NPSH} = H_a - \frac{P_v}{\rho g} = \frac{P_a}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} + Z_a - \frac{P_v}{\rho g}$$

Avec :

$P_v$  : pression de vapeur du liquide.

$P_a$  : pression d'aspiration de la pompe.

$H_a$  : hauteur  
 $V_a$  : vitesse  
 $Z_a$  : altitude

} Côte aspiration

$g$  : accélération due à la pesanteur

$\rho$  : masse volumique,

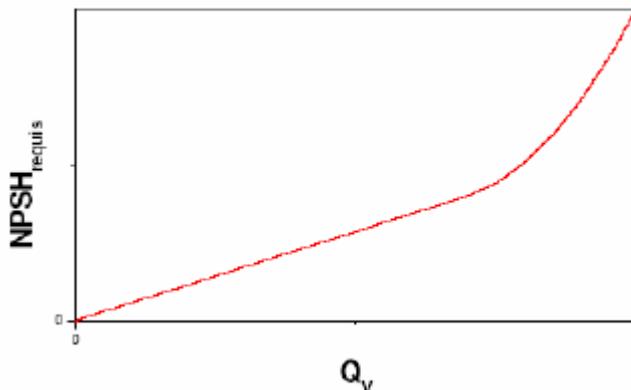
Dans l'étude des systèmes avec pompe, on définit deux types de NPSH.

- ✓ Le NPSHd (disponible)
- ✓ Le NPSHr (requis)

### I.3.1.1. NPSH

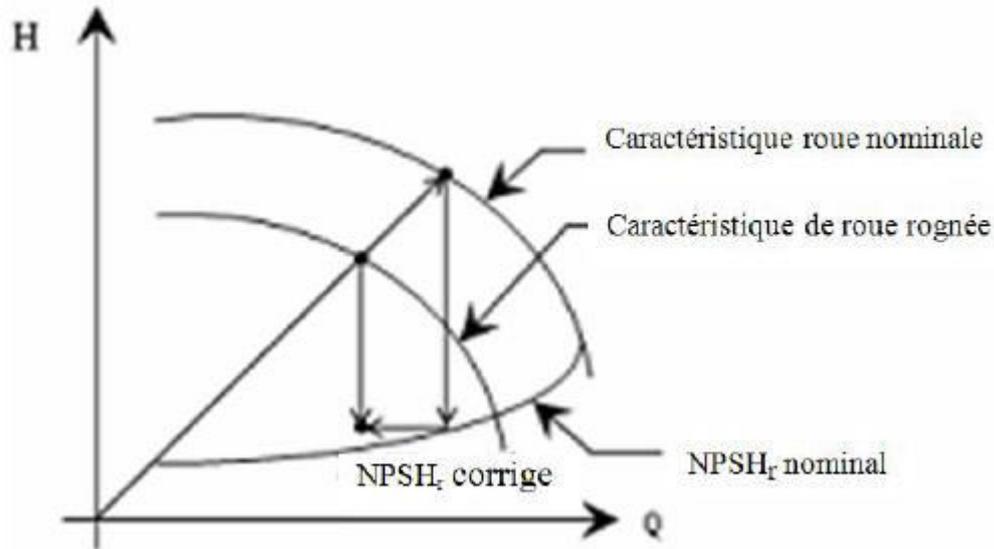
NPSHr requis, C'est la valeur minimale de NPSH à partir de laquelle la pompe fonctionne sans cavitation, cette valeur sera donnée par le constructeur.

Expérimentalement, comme le montre la Figure I.2 :



**Figure. I.2** : Variation du NPSH requis avec le débit circulé par la pompe. [3]

Le NPSH requis augmente avec le débit  $Q_v$ . Le constructeur des pompes donne la courbe caractéristique du NPSHr [ $NPSHr=f(Q)$ ] correspondant au diamètre nominal de la roue. Si la roue est rognée le NPSHr est modifié. Sa nouvelle valeur peut être approchée graphiquement, comme l'indique la figure suivante



**Figure. I.3 :** Influence du diamètre de la roue sur le NPSHr [3]

Au-dessus d'un certain débit, le phénomène de cavitation est presque inévitable

### I.3.1.2. NPSH disponible

Suivant la configuration de montage et du produit véhiculé, il y a une pression  $P_a$  à l'aspiration de la pompe. En conséquence seule la quantité de pression supérieure à  $P_v$  sera utile (si cette pression arrive à la  $P_v$  on aura du gaz à l'entrée de la pompe). NPSH disponible ou d'installation Il s'agit de la pression à l'aspiration régnant effectivement à l'entrée d'une pompe, Et que l'utilisateur doit définir pour choisir correctement sa pompe. Il est donc toujours défini.

$$NPSH_d = \frac{P_a}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} - \frac{P_v}{\rho g} \quad (Z_a = 0 \text{ côte aspiration})$$

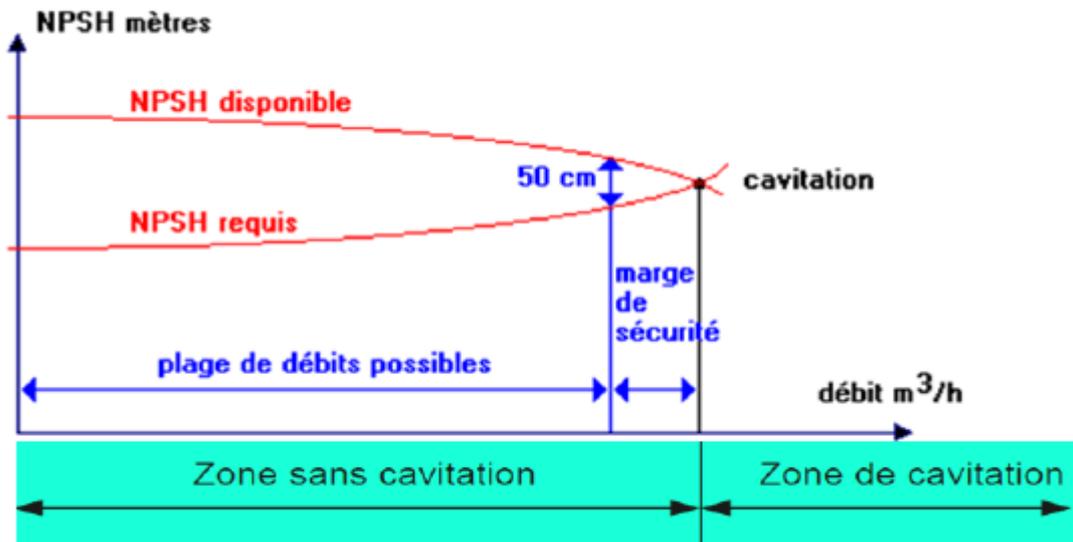
En pratique, pour qu'une pompe puisse fonctionner normalement (sans CAVITATION), il faut calculer le NPSH disponible et vérifier qu'il est bien supérieur au NPSH requis (qu'on aura déterminé à l'aide de la courbe fournie par le constructeur). On a donc:

$NPSH \text{ disponible} > NPSH \text{ requis} \rightarrow$  sans cavitation.

$NPSH \text{ disponible} \leq NPSH \text{ requis} \rightarrow$  avec cavitation.

## Chapitre I : Généralités sur les écoulements et la cavitation

Une pompe fonctionne dans des conditions d'aspiration d'autant meilleures que la différence  $NPSH_d - NPSH_r$  est grande. On estime nécessaire de se réserver une marge de sécurité d'au moins 0,5 [m] et donc d'avoir :  $NPSH_d > NPSH_r + 0,5$



**Figure I.4.** : Variation du NPSH requis et NPSH disponible avec le débit circulé par la pompe

### I.3.2. Tension de vapeur : origine de la cavitation

Pour une température donnée tout liquide à une pression d'ébullition bien déterminée dite tension de vapeur  $T_v$ , donc pour tout liquide quand on atteint la pression de vapeur  $T_v$ , le liquide commence à se vaporiser (exemple au niveau de la mer l'eau bout à 100°C, au sommet d'une haute montagne, l'eau va bouillir avant d'attendre 100°C car la pression aura baissé par rapport à celle du niveau de la mer. Si on considère le cas de l'eau par exemple, on sait que l'eau à la pression atmosphérique boue à une température de 100 °C. Toutefois, si la pression qui règne au-dessus du liquide est différente de la pression atmosphérique, la température d'ébullition sera modifiée

Ainsi, lorsque la pression augmente, la température d'ébullition augmente (et lorsque la pression diminue, la température d'ébullition diminue).

## Chapitre I : Généralités sur les écoulements et la cavitation

---

Le tableau ci-dessous donne la température d'ébullition de l'eau sous différentes pressions. On constate donc que si de l'eau à 20 °C voit sa pression passer sous la valeur de 0,023 bar, alors l'eau va se mettre à bouillir [3]

**Tableau I.1** : Température d'ébullition d'eau en fonction de la pression

|                                      |     |     |     |     |     |       |      |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|------|
| <b>Pression (bar)</b>                | 50  | 6   | 2   | 1   | 0.5 | 0.023 | 0.2  |
| <b>Température d'ébullition (°C)</b> | 264 | 159 | 120 | 100 | 81  | 20    | 17.5 |

Il existe des abaques température-pression permettant de déterminer graphiquement de façon approchée la température d'ébullition d'un liquide sous pression réduite à partir de sa température d'ébullition normale. (Voir annexe)

### I.3.3. Coefficient de Thoma (nombre de cavitation $\sigma_c$ )

Le nombre de cavitation  $\sigma_c$  est un nombre sans dimension qui caractérise la tendance à la formation de la cavitation dans un écoulement. Ce nombre introduit par Thoma représente le rapport entre la pression locale et la pression dynamique. Il est défini par la relation suivante :

$$\sigma_c = \frac{P - P_v}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

Où  $P_v$  représente la pression de saturation vapeur représente la pression du milieu et  $U$  c'est l'énergie cinétique, La valeur de  $\sigma_c$  pour laquelle un écoulement cavite varie selon la géométrie qui induit une accélération et donc une dépression plus ou moins grande du liquide, et selon la composition du liquide en terme de gaz dissous.

On note que lorsque la pression dans l'écoulement diminue, le nombre de cavitation augmente. Ainsi, un grand nombre de cavitation indique un écart important entre la pression de l'écoulement et la pression de saturation, et correspond à un faible risque de cavitation. Inversement, plus le nombre de cavitation est petit, et plus le risque que l'écoulement soit cavitant est important.

## I.4. Phases de la cavitation

La cavitation est un phénomène générant de 2 phases d'écoulements

- ✓ Phase air
- ✓ Phase eau

### I.4.1 Ecoulement diphasique

L'écoulement diphasique est un écoulement présentant deux phases non miscibles ayant des caractéristiques dynamiques non identiques. Exemple : écoulement d'eau avec des bulles de gaz ou avec des particules de sédiment, écoulement de gaz avec des particules ou des gouttes de liquide.

Les écoulements diphasiques peuvent être classés selon les phases en présence (liquide, solide, gaz ou plasma (gaz ionisé)) comme suit :

- mélange de 2 liquides non miscibles.
- mélange solide liquide.
- mélange gaz solide.
- mélange gaz liquide

Phase : il peut s'agir d'un même fluide présent en deux phases différentes (eau et vapeur par exemple), de deux liquides différents dans une même phase (eau et huile liquides par exemple : cela intéresse particulièrement l'industrie pétrolière) ou encore deux fluides différents dans une phase différente (eau et air par exemple)...

Le comportement de l'écoulement diffère beaucoup en fonction de divers paramètres :

Les différents fluides (mélange liquide/gaz ou liquide/liquide)

La géométrie du système (réservoir, tube horizontal, tube vertical, ...)

Le chauffage ou non du système et le type de chauffage utilisé (uniforme/non uniforme, par une paroi chauffée/de façon volumique). Lorsque l'on parle d'écoulement chauffé, on suppose que le chauffage induit l'état diphasique du système par évaporation (eau bouillante par exemple)

### I.4.2. Classification des écoulements diphasiques

Lorsque le débit de gaz augmente dans un écoulement diphasique, on constate les configurations suivantes

## Chapitre I : Généralités sur les écoulements et la cavitation

---

### 1) Ecoulement à bulles ( bubble flow ) :

Les bulles se déplacent à la partie supérieure à la même vitesse que le liquide.



**Fig 1.5** Ecoulement à bulles

### 2) Ecoulement à poches ( plug flow ) :

Des poches de liquide et de gaz se déplacent alternativement à la partie supérieure du tube.



**Fig.1.6** Ecoulement à poches

### 3) Ecoulement stratifié (Stratified flow) :

Le liquide s'écoule à la partie inférieure du tube et le gaz au-dessus.



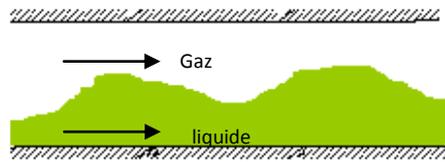
4)

5)

**Fig 1.7.** Ecoulement stratifié

### 4) Ecoulement à vagues (wavy flow) :

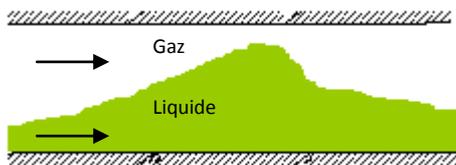
C'est le même que le précédent mais avec une interface perturbée.



**Fig1.8** Ecoulement à vagues

### 5) Ecoulement à bouchons de gaz (slug flow) :

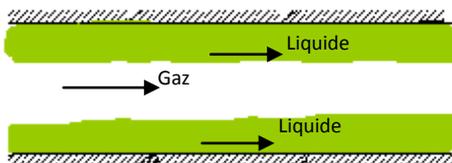
Des bouchons de gaz circulent plus vite que la vitesse moyenne du liquide.



**Fig 1.9.** Ecoulement à bouchons de gaz

### 6) Ecoulement annulaire ( annular flow ):

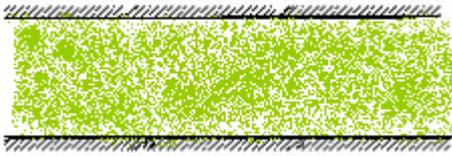
Un film se forme sur la paroi du tube.



**Fig 1.10** Ecoulement annulaire

### 7) Ecoulement dispersé ( spray flow ) :

Le liquide forme un brouillard dans le gaz.



**Fig1.11.** Ecoulement dispersé

## I.5.Impact de la cavitation

### Négatif

- 1) dégradation des matériaux dans le cas des systèmes de conduite d'hydraulique
- 2) la chute des performances
- 3) Perte de rendement
- 4) Bruit
- 5) Lors de l'utilisation de la cavitation et ces biens faits la prédiction des effets de la cavitation présente des difficultés dues à la complexité du problème ou un grand nombre de facteurs dont on ne maîtrise pas les effets entrant en jeu:
  - Influence de l'évolution de bulles voisines
  - Existence d'ondes de choc
  - Vitesse et turbulence de l'écoulement
  - Influence de la nature des matériaux

### Positif

- 1) utilisation par certaines créatures sous-marine (le crevette) pour d'autres espaces.
  - 2) des applications dans certains procédés industriels qui nécessitent la concentration d'énergie sur de petits domaines afin de produire localement des pics de pressions élevés.
  - 3) Générateur de microbulles
  - 4) Le nettoyage des surfaces par jets cavitants
  - 5) Le massage thérapeutique
  - 6) création de jets d'encre Notons aussi que la super cavitation est utilisée en marine (hélices marines, pompes de fusée, petites turbines)
  - 7) Le dégazage des liquides
  - 8) Application chez l'homme par l'utilisation en imagerie médicale [2]
  - 9) Décoaptation des surfaces articulaires lors d'une traction axiale manuelle instantanée
- absence de cavite aérique

### **I.6.Conclusion**

La cavitation est donc un phénomène complexe et loin d'être parfaitement compris. Néfaste à de nombreux systèmes industriels, elle est en outre difficilement prévisible et donc maîtrisée. Cependant, elle peut être utilisée dans certains procédés nécessitant un fort débit ou de très hautes pressions.

Dans ce chapitre, nous avons essayé de connaître le phénomène de cavitation.

Nous allons donc, procéder dans le second chapitre à une chronologie qu'on cite les différents travaux que les chercheurs ont effectués.

### Chapitre II

### Chronologie bibliographique

#### II.1. Introduction

La présentation d'une chronologie sommaire ou une bibliographie des études de la dynamique des bulles permet de voir comment des modélisations aussi sommaires ont pu céder la place à des théories plus élaborées prenant à chaque fois en compte un élément nouveau.

Dans ce chapitre on cite les différents travaux que les chercheurs ont effectués.

#### II.2. Chronologie des études de la dynamique des bulles

##### II.2.1. Contexte général

-La première approche théorique connue remonte à 1859 et est due à BESANT [4.]. RAYLEIGH [5], ayant repris en 1917 cette étude, a vu depuis son nom associé à toute' approche théorique de la cavitation. Un intérêt croissant a valu, particulièrement après -1940, un nombre très important de publications.

-L'ouvrage de KNAPP,DAILY et HAMMIIT (1970) [6], ainsi que l'article de synthèse de PLESSET et PROSPEREITI (1977) [7], ne donnent qu'une idée des travaux connus.

- ROBERTSON [8] estime en 1969 à plus de dix mille le nombre des publications concernant la cavitation. En se limitant à l'aspect fondamental du phénomène la chronologie suivante peut être indiquée.

-RAYLEIGH (1917) [5], étudie le champ de pression crée, dans un fluide parfait, incompressible, au repos, par la disparition d'une cavité sphérique vide, sous l'effet d'une pression hydrostatique constante donnée. Il recherche ensuite l'influence de la présence d'un gaz dans la cavité.

-COOK et PARSONS (1919) [9], abandonnent l'hypothèse de l'incompressibilité du liquide vers la fin de l'implosion, mais supposent que le champ de pression produit est celui qui est créé par l'implosion de la bulle sur une sphère solide fictive concentrique et de rayon donné très faible. Cette hypothèse permet le calcul d'une pression caractéristique de l'implosion,

## Chapitre II : Chronologie bibliographique

---

appelée par les auteurs « pression marteau ». Il faut attendre plus de vingt ans pour que ces études soient poursuivies.

-HERRING (1941) [10], s'intéressant aux explosions sous-marines, étudie les pulsations de la bulle créée par ces explosions et l'influence sur ces pulsations de la présence du fond, de la surface libre ainsi que l'effet de la gravité.

-BEECHING (1942) [11], reprend les équations de RAYLEIGH et y ajoute les termes correspondants à la tension superficielle et à la présence des gaz dans la bulle.

-SILVER (1942) [12], effectue de son côté des calculs élaborés tenant compte des effets thermodynamiques associés à l'échauffement dû à la compression de la vapeur et aux transferts de chaleur.

Tous ces modèles, comme on le constate, admettent la symétrie sphérique du problème, imputant implicitement l'érosion à une surpression ou à des ondes de chocs au sein du fluide.

-KORNFELD ET SUVOROV (1944) [13], vont cependant les premiers suggérer l'existence d'un jet rentrant durant l'implosion pour expliquer l'érosion de paroi.

-COLE (1948) [14], écrit les équations de la dynamique du grossissement des bulles aussi bien dans un fluide incompressible que dans un fluide compressible. Utilisant ensuite la méthode des images, il étudie l'influence des parois solides ou des surfaces libres voisines.

-PLESSET (1948) [15], étudie les variations du rayon d'une bulle dans un champ de pression donné, en tenant compte de la viscosité, et établit une équation connue sous le nom d'équation de RAYLEIGH-PLESSET. L'application de sa théorie au cas d'un germe transporté dans un écoulement se fait en considérant que la bulle suit une ligne de courant. Il admet que l'évolution du rayon est directement liée à l'évolution de la pression sur cette ligne de courant, la bulle ne perturbant pas l'écoulement global en première approximation.

-KNAPP et HOLLANDER (1948) [16], effectuent la même année le premier travail expérimental important. L'utilisation de la cinématographie ultra-rapide leur permet de mettre en évidence l'existence de vitesses et d'accélération radiales importantes, lors de l'implosion.

-NOLTINGK et NEPPIRAS ([1950] [17]), font les premiers calculs numériques à partir de l'équation de RAY-LEIGH-PLESSET [15] dans le cas d'un champ de pression sinusoïdal.

Ils montrent alors que le rayon de la bulle passe par un maximum avant que l'implosion ne se produise. Pour certains rayons de bulle, ils constatent que le grossissement et l'implosion se produisent au cours d'un seul cycle acoustique.

-TRILLING (1952) [18], étudie l'implosion et le rebondissement d'une bulle contenant un gaz parfait se comprimant adiabatiquement. Il admet que les perturbations de pression se

## Chapitre II : Chronologie bibliographique

---

propagent dans le liquide à la vitesse du son et considère une onde de compression à l'intérieur de la bulle et une onde de détente dans le liquide.

-GILMORE (1952) [19], ne néglige pas comme TRILLING les vitesses locales du liquide devant la célérité du son et, considérant une compression isentropique, il réécrit les équations de RAYLEIGH en tenant compte de la compressibilité.

-NAUDE et ELLIS (1961) [20], développent en harmoniques sphériques l'écart par rapport à la forme sphérique et prévoient la formation d'un jet rentrant. Ils visualisent pour la première fois, à l'aide de la cinématographie ultra-rapide, la formation de ce jet.

Depuis les années 60, l'étude de la cavitation s'accélère avec l'intérêt croissant que commencent à lui porter ceux qui s'intéressent aux ultrasons et aux écoulements diphasiques. De même l'essor de l'informatique va permettre aux chercheurs d'aborder numériquement le problème des déformations de la surface de la bulle au voisinage de parois.

-FLYNN (1964) [21], montre qu'une bulle peut entrer en résonance avec le champ de pression sinusoïdal imposé et grossir pendant plusieurs cycles pour imploser ensuite.

-FLORSCHUETZ et CHAO (1965) [22], cherchent à déterminer dans quelles conditions on peut négliger les transferts de chaleur pour l'étude de la dynamique des bulles. Ils établissent un critère de prédominance des effets d'inertie sur les effets des transferts thermiques.

-PLESSET et CHAPMAN (1969) [23], utilisant une méthode de différences finies, étudient numériquement, dans un fluide parfait, l'implosion d'une bulle au voisinage d'une paroi solide. Ils mettent ainsi en évidence l'apparition et le développement d'un jet rentrant.

-MITCHELL et HAMMIIT (1970) [24], étudient de leur côté le cas d'un fluide visqueux. Le cas de l'implosion dans un gradient de pression est également considéré, et la naissance du jet est mise en évidence.

-AKULICHEV (1971) [25], montre que les équations qui gouvernent le mouvement radial des bulles sphériques, en cavitation ultrasonore, présentent des « zones d'instabilité » : des variations très faibles de certains paramètres produisent des variations très brutales des solutions numériques.

-HSIEH (1972) [26], présente une nouvelle approche théorique de la dynamique des bulles non sphériques. Il écrit une formulation variationnelle du problème ouvrant ainsi la voie à des nouveaux développements. Il considère de plus les effets de transferts de masse et de chaleur ainsi que les effets de compressibilité pour les bulles quasi sphériques.

## **Chapitre II : Chronologie bibliographique**

---

### **II.2.2.Contexte français**

Les recherches sur la cavitation, en France, sont le fait de laboratoires de type universitaire, de grands organismes comme le Commissariat à l'Énergie Atomique ou Électricité de France et d'industriels comme, par exemple, la Société NEYRTEC. De plus, des études à vocation militaire sont menées dans des organismes comme le Bassin des Carènes. Enfin, la Direction des Recherches Études et Techniques (D.R.E.T.) finance de nombreux travaux sur la cavitation.

Notons également que le Centre National de la Recherche Scientifique (C.N.R.S.) participe à l'effort général par le biais d'une Recherche Coopérative sur Programme (R.c'P.) qui fédère les cinq laboratoires dont les travaux sont évoqués ci-après.

#### **1-Ecole nationale supérieure de techniques avancées (ENSTA)**

L'ENSTA est une école d'applications appartenant au Ministère de la Défense et reçoit, à ce titre, des anciens élèves' de l'École Polytechnique. Son Laboratoire de mécanique des fluides est commun aux deux écoles. Le Groupe de recherche sur les phénomènes d'interface (GPI) développe au sein de l'ENSTA des travaux dans le domaine de la cavitation en vue de résoudre certains problèmes entrant dans le cadre du génie maritime et du génie industriel.

#### **2-Institut de mécanique de Grenoble**

Les premières études effectuées à l'LM.G. ont concerné principalement les écoulements supercavitants et, parmi ceux-ci, les écoulements autour d'ailes à base tronquée, extrados noyé et cavité créée artificiellement par ventilation (études menées en liaison avec le Bassin d'essais des carènes et la S.N.L.A.S. - Marignane), dans le cadre du projet de la Marine nationale de se doter d'hydroptères rapides. Ces études ont permis de définir des formes optimales de profils et de caractériser leurs performances en diverses circonstances de fonctionnement, aussi bien sur le plan de l'analyse théorique que sur le plan expérimental(mesure des efforts subis par une aile, détermination des angles d'incidence exempts de cavitation au bord d'attaque).

Elles ont été menées d'abord en configuration bidimensionnelle, puis sur des ailes Tridimensionnelles.

Elles ont abouti à la proposition de profils mixtes (subcavitants à basse vitesse, supercavitants à grande vitesse).

## Chapitre II : Chronologie bibliographique

---

Sur le plan théorique, le schéma fondamental est celui de la théorie classique des sillages en fluide non visqueux, rendu plus maniable cependant soit par la procédure de linéarisation, soit par la méthode des singularités discrétisées.

Parallèlement à ces recherches orientées vers les applications, une autre voie a été explorée dans laquelle on s'intéresse fondamentalement à l'aspect physique des écoulements. Ici, l'expérience joue un rôle prépondérant encore que, dans de nombreux cas, elle soit rendue difficile puisque l'introduction de sondes dans l'écoulement est interdit par l'état quasi instable du liquide proche des conditions de vaporisation. Dans ce cadre, se situent les études suivantes :

- caractères généraux des écoulements à cavités ventilées, étude du mécanisme de pulsation ;
- étude de la configuration d'écoulement dite « en demi-cavité » dans laquelle un jet d'eau plan, initialement horizontal, franchit un seuil, se courbe sous l'action de l'influence de la pesanteur et de la différence de pression appliquée sur ses deux frontières libres, puis vient lécher une paroi solide plane peu inclinée sur l'horizontale, déterminant ainsi un espace libre dans lequel l'air est injecté ;
- développement de la cavitation dans le sillage de corps épais : cylindres circulaires, coins triangulaires... et modification des caractéristiques du sillage par l'effet de la cavitation ;
- étude du détachement d'une cavité largement développée à partir d'une paroi à courbure continue et interaction entre l'état de la couche limite sur la paroi et la cavitation.

Dans les études entreprises plus récemment, qui ont plus spécialement les hélices marines classiques comme champ d'application, on peut noter des travaux concernant la cavitation développée en écoulement instationnaire ou l'érosion de cavitation.

*Calcul d'une hélice marine en écoulement instationnaire, avec prise en compte d'une cavitation partiellement développée :*

Le but de cette étude est de prévoir les efforts instationnaires appliqués sur une hélice marine travaillant dans un champ non uniforme dû au sillage de la carène du navire, avec prise en compte d'une cavitation plus ou moins développée à partir du bord d'attaque des pales.

*Érosion de cavitation :* On utilise l'érosion de cavitation dans la phase d'incubation (sans arrachement de matériau solide) pour qualifier l'écoulement de liquide quant à sa capacité à produire des structures érosives (bulles, microjets, tourbillons cavitants) à l'arrière d'une poche de cavitation développée. Le comptage du nombre d'impacts produits sur des éprouvettes en écoulement de mercure (L.M.G.) et en écoulement d'eau à échelle 3 pour des vitesses plus grandes (NEYRTEC) permet de tester la validité d'hypothèses de similitude concernant la cinématique des écoulements et leur agressivité.

## **Chapitre II : Chronologie bibliographique**

---

Par ailleurs, un modèle a été développé sur l'étude de la réponse d'un matériau solide à un impact de pression.

### **3-Institut de mécanique des fluides de Strasbourg**

Les travaux effectués sur la cavitation à l'Institut de mécanique des fluides de Strasbourg concernent l'influence des polymères sur les écoulements cavitants sur des obstacles cylindriques et plans à tête cylindrique.

L'adjonction d'un polymère au fluide cavitant se traduit par un retard à l'apparition de la cavitation, par une diminution de l'intensité de la cavitation et par une réduction du bruit de cavitation. L'effet réducteur de la cavitation est attribué pour une grande partie à la modification globale du champ d'écoulement par le polymère. Ceci présente une certaine analogie avec l'effet réducteur de frottement. Les premiers travaux, à caractère technique, avaient pour objectif l'optimisation de la réduction de cavitation sur différents obstacles aussi bien en écoulement homogène qu'en injection pariétale sur l'obstacle.

Les recherches se sont ensuite concentrées sur la corrélation étroite entre la réduction de la cavitation et la réduction de traînée dans le cas d'un cylindre circulaire en écoulement non-newtonien homogène.

Les résultats significatifs qui se dégagent de ces recherches sont le retard à l'apparition de la cavitation, la réduction du bruit de cavitation signifiant une diminution de l'intensité de la cavitation et une étroite corrélation entre la réduction de la cavitation et la réduction de traînée. En particulier, le mécanisme de la réduction de cavitation sur un cylindre est essentiellement une conséquence de la modification par le fluide non-newtonien,

D'une part de l'écoulement autour du cylindre et d'autre part de la structure des tourbillons du sillage.

### **4-Laboratoire de génie électrique de Paris**

Initialement, le groupe « Cavitation » du LGEP s'était donné comme objectif l'étude des effets électriques consécutifs à la cavitation, notamment par le biais du « microjet » qui suit une bulle mobile en implosion rapide.

## Chapitre II : Chronologie bibliographique

---

Celui-ci a deux caractéristiques particulières, sa vitesse (plusieurs centaines de mètres par seconde) et son énergie cinétique de translation conduisant à des pressions d'impact sur une paroi de l'ordre de 10 000 bars.

Si Ton admet que le microjet, très rapide, est susceptible de transporter des charges électriques, on pouvait espérer les détecter lors d'un impact sur un capteur. Les essais qui ont été réalisés ont bien fait apparaître des impulsions de courant de faible durée (inférieure à la microseconde) mais la nature de ces charges n'a pas encore été définie. C'est un travail intéressant qui sera repris plus tard.

Parallèlement, on a vérifié que, par son énergie cinétique, la bulle pouvait éroder une surface d'acier inoxydable (par exemple) ce qui se traduit par une variation de différence de potentiel entre cet acier et une électrode de référence. Il se produit vraisemblablement une destruction partielle ou totale de la couche protectrice passivante (oxydes ou autres composés), suivie de sa reconstitution rapide. La loi qui régit ce phénomène est illustrée par une courbe « intensité-potentiel ». Celle-ci est tracée en imposant un courant à travers l'électrode de travail, appelée capteur, et en mesurant son potentiel par rapport à l'électrode de référence.

Ces travaux se sont concrétisés par la conception et la réalisation d'un détecteur de cavitation érosive (DCE) qui doit mesurer l'intensité de l'érosion en un point d'une surface et afficher la vitesse de cette érosion en mm/an. Il faut noter que l'étalonnage du détecteur est actuellement réalisé avec des érosions produites par meulage ou sablage.

### 5-Laboratoire de traitement du signal et ultrasons

Dans le domaine de la cavitation, le LTSU s'intéresse aux impulsions de pression (ondes de choc) et aux impulsions de pression sont détectées par des capteurs piézoélectriques puis enregistrées.

Ces impulsions sont ensuite classées suivant leur amplitude pour obtenir un histogramme d'amplitude. Un histogramme résulte de l'analyse d'environ  $2 \times 10^5$  impulsions. Son intérêt est double. Du point de vue des applications, on sait que l'histogramme d'amplitude est corrélé aux pertes de masse d'un échantillon métallique substitué au capteur. Il faut souligner que l'établissement d'un histogramme nécessite quelques dizaines de seconde tandis que la mesure d'une perte de masse réclame des durées de plusieurs dizaines de minutes voire de plusieurs heures.

## Chapitre II : Chronologie bibliographique

---

L'analyse des histogrammes d'amplitude a également un intérêt pour la modélisation. En effet, cet histogramme présente des zones où les amplitudes des impulsions sont regroupées préférentiellement (pics). Ces pics sont interprétables théoriquement car ils découlent de particularités du mouvement radial. De ce fait, la confrontation des résultats expérimentaux aux prévisions théoriques permet d'avoir une idée sur la valeur de certains paramètres comme, par exemple, la valeur du rayon initial des bulles qui implosent.

D'autres recherches concernent l'étude simultanée des impulsions de pression et des impulsions de lumière consécutives aux implosions des bulles. Là encore, les résultats permettent de préciser la valeur de certains paramètres.

Un autre thème de recherche résulte de la difficulté constatée de la comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux dans le cas de l'implosion de bulles isolées.

Cette difficulté provient pour une très grande part du fait qu'un grand nombre de bulles implosent en même temps et au même endroit dans une expérience de cavitation.

Dans les dispositifs où c'est une bulle unique qui implose (cavitation provoquée par un faisceau laser, bulle produite par la décharge d'une batterie de condensateurs dans des électrodes immergées), le champ de pression n'est pas connu. C'est pourquoi nous avons planifié, depuis longtemps déjà, une série de travaux devant conduire à l'étude de l'implosion d'une bulle unique dans un champ ultrasonore.

-La première étape consistait en la réalisation d'un générateur de bulles calibrées. Ce générateur est à présent opérationnel. Il combine la production de bulle par soufflage dans un tube capillaire avec le détachement anticipé de ces bulles par un mouvement mécanique.

-Actuellement, le rayon des plus petites bulles produites est de l'ordre d'une dizaine de microns. La taille de ces bulles est parfaitement reproductible. Dans l'avenir, on utilisera ce générateur pour produire des bulles de rayon initial connu dont on étudiera le mouvement radial quand elles sont soumises à une onde pression.

### 6-Société Neyrtec

La Société Neyrtec, établissement de Grenoble d'Alstom Atlantique, dispose de sept tunnels de cavitation dont les débits vont de 8  $m^3/s$  à 3  $l/s$ . Entre 1970 et 1980, l'essentiel des recherches réalisées a consisté à effectuer une étude de l'influence des germes sur la cavitation. Analyse théorique, établissement des règles de similitude à appliquer (concentrations en germes proportionnelles au cube de l'échelle géométrique, en particulier), réalisation des matériels spécifiques nécessaires, telles des méthodes de mesure et de création

## Chapitre II : Chronologie bibliographique

---

de germes artificiels, vérification des règles de similitude sur profils et sur hélices de dimensions très différentes.

Les recherches actuellement en cours, relatives au phénomène d'érosion par cavitation, sont effectuées dans un but identique, à savoir la mise en œuvre d'une méthodologie de prévision des risques d'érosion à partir d'essais en modèles réduits, utilisant éventuellement des liquides ou des matériaux différents.

Les recherches actuellement en cours, relatives au phénomène d'érosion par cavitation, sont effectuées dans un but identique, à savoir la mise en œuvre d'une méthodologie de prévision des risques d'érosion à partir d'essais en modèles réduits, utilisant éventuellement des liquides ou des matériaux différents. Ces recherches sont effectuées en collaboration avec plusieurs autres instituts dont l'ENSTA, l'IMG et le Laboratoire de Matériaux de la DTCN.

Parmi les réalisations de Neyrtec, il faut citer le générateur de tourbillons cavitants dit « veine-tourbillon H. Cet appareil avait initialement été réalisé pour montrer que l'érosion de cavitation peut être la conséquence de tourbillons cavitants présentant des noyaux de vapeur (comme ceux produits par la cavitation en lame par exemple).

L'appareil comporte une section d'essai dans laquelle on crée un écoulement tourbillonnaire (entrée tangentielle, sortie axiale). Cet écoulement n'est pas cavitant. A un moment donné, on ferme brusquement une vanne amont. Il s'ensuit une onde de pression négative qui rend le tourbillon cavitant.

Quand l'onde se réfléchit en aval, elle revient sous la forme d'une onde de pression positive qui provoque l'implosion. Chaque implosion produit un enlèvement de matière (trou). En modifiant les conditions expérimentales, on peut jouer sur l'intensité des implosions.

### 7-Autres centres de recherche

D'autres équipes conduisent des recherches sur la cavitation, de manière régulière ou non. C'est ainsi qu'il faut citer le Laboratoire de mécanique des fluides de Poitiers qui dispose d'un tunnel de cavitation à décharge et qui a réalisé diverses expérimentations et analyses théoriques sur des profils tridimensionnels ventilés oscillants ou non. De même, la Société Bertin a étudié certains aspects du bruit de cavitation, en particulier dans le but de développer des sources acoustiques puissantes. [27]

## **Chapitre II : Chronologie bibliographique**

---

### **II.3.Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons une bibliographie ou bien d'une chronologie sommaire qui résume les différents travaux menés sur la cavitation donc un essai de synthèse des recherches sur la cavitation

## Chapitre III

### Modélisation mathématique

#### III.1.Introduction

Le phénomène de cavitation a fait l'objet d'étude dès le début du siècle. On peut citer le travail de Rayleigh-plesset ' le modèle classique' puis le modèle de diffusion et en fin le modèle harmonique.

#### III.2.Classique par Rayleigh-plesset

L'équation de Rayleigh-plesset permet de décrire le mouvement de bulles sphériques dans un champ de pression variable.

##### III.2.1.Formulation

On considère un germe de rayon initial.

$R_0$  : plongé dans un liquide au repos ou l'accompagnement dans son mouvement sans vitesse de glissement.

On suppose que le liquide est incompressible. Qu'il occupe un domaine grand par rapport à la dimension de la bulle et que celle-ci se déforme sphériquement (Figure III.1)

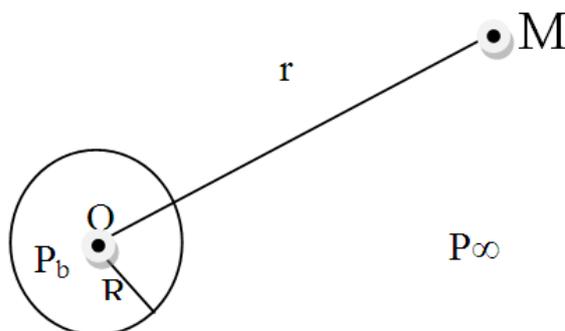


Figure III.2.1. Représentation de la bulle à l'instant t. [28]

### Chapitre III : Modélisation mathématique

---

**R** : Rayon de la bulle à l'instant t.

**R<sub>M</sub>** : Rayon au point M (r < R), r : la distance en le point M et le point à l' instant t.

**P<sub>b</sub>** : Pression dans la bulle.

**P** : Pression à l'infini.

L'équation de continuité en coordonnées sphériques s'écrit

$$4\pi r^2 U_r = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \dots\dots\dots (III .2.1)$$

Avec : U<sub>r</sub> : Vitesse radiale au point M

On déduit donc cette vitesse

$$U_r = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \dots\dots\dots (III.2.2)$$

La conservation de la quantité de mouvement suivant r impose :

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \nu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U_r}{\partial r} - 2 \frac{U_r}{r^2} \right) \right] \dots\dots\dots (III.2.3)$$

Avec :

ν : viscosité cinématique.

P : pression.

ρ : masse volumique du liquide en remplaçant U<sub>r</sub> par son expression et en intégrant entre l'infini et R on obtient

$$P(R) = P_\infty + \rho \left[ R \frac{dR^2}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (III.2.4)$$

Avec

P(R) : pression à l'interface du coté liquide (r=R<sup>+</sup>)

P<sub>∞</sub> : pression à l'infini (r→∞)

### Chapitre III : Modélisation mathématique

Le terme lié à la viscosité s'est annulé en raison de l'incompressibilité du liquide.

La pression dans la bulles est donnée par :

$$P_b = P_v + P_g \dots \dots \dots (III.2.5)$$

$P_b$  : pression dans la bulle.

$P_v$  : pression de vapeur saturante.

$P_g$  : pression partielle du gaz non condensable.

L'équilibre des contraintes normales à l'interface de la bulle se traduit par la relation.

$$P_g + P_v - \frac{2S}{R} = P(R) + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \dots \dots \dots (III.2.6)$$

Avec :  $S$  : tension superficielle.

$\mu$  : viscosité dynamique en combinant les équations (4) et (6) on obtient l'équation de Rayleigh Plesset

$$\rho \left[ R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right] + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} = -P_\infty - \frac{2S}{R} + P_v + P_g \dots \dots \dots (III.2.7)$$

Avec les conditions initiales

$$R(t=0) = R_0 \text{ et } \frac{dR(t=0)}{dt} = 0 \text{ . [30]}$$

Reliant la pression aux dimensions des bulles d'air et sous l'hypothèse d'une forme sphérique de ces dernières, Rayleigh Plesset donne la formulation équationnelle différentielle suivante [29] (J.P.Franc et J.M.Michel, 2005) :

$$\frac{dR}{dt} = - \left[ \left( \frac{2}{3} \left( \frac{P_v - p}{\rho_1} \right) \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (III.2.8)$$

Les champs de pression est ainsi donné par :

$$\frac{P(r,t) - P_0}{P_0 - P_v} = \frac{R}{r} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - 4 \right] - \frac{R^4}{r^4} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right] \dots\dots\dots (III.2.9)$$

**III.3.Modèle de diffusion**

**III.3.1.Formulation**

Ce modèle mathématique représente la distribution d’une matière dans un milieu, il est donné par [30](W.Graf et M.S.Altınakar, 1993) :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d_f \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \dots\dots\dots (III.3.1)$$

Où ‘c’ représente la concentration et’’ d<sub>f</sub> ‘’le coefficient de diffusion.

L’air étant une matière à l’état gazeux diffuse dans un milieu liquide comme le cas des bulles d’air engendrées par le phénomène de cavitation d’où la possibilité de l’application de ce modèle mais en supposant la vitesse du liquide suffisamment faible.

La solution analytique de ce système est donnée par :

$$c(x, t) = \frac{1}{A} \frac{c_0}{\sqrt{4\pi d_f t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4d_f t}\right) \dots\dots\dots (III.3.2)$$

‘C<sub>0</sub>’ étant la concentration initiale de l’air et ‘’A ‘’ la section de la conduite.

### III.4. Modèle harmonique

#### III.4.1. Modes propres radiaux d'une seule bulle d'air dans l'eau

Considérons une bulle d'air de rayon  $R_0$  dans un volume infini d'eau. Ce système possède, de par les compressibilités respectives de l'air et de l'eau, une infinité de degrés de liberté, et compte par conséquent une infinité de modes propres d'oscillation. Certains de ces modes propres, à cause de la cavité que forme la bulle, sont caractérisés par un fort déplacement de la surface de la bulle : on parle de résonance.

Par commodité, on désignera ces résonances sous le terme de "résonances de type Fabry-Pérot", par analogie avec le fonctionnement de l'interféromètre du même nom.

Avec :

$P_0$  : la pression d'équilibre

$T_0$  : la température

$\rho_a$  et  $\rho_e$  : les masses volumiques de l'air et de l'eau sont notées.

On adopte le point de vue lagrangien : on désigne par :

$p = (\vec{r}, t)$  Et  $\vec{u} = (\vec{r}, t)$  la surpression et le déplacement.

$t$  : temps, de l'élément de fluide qui se trouvait à la position :  $r$  à l'équilibre.

La tension superficielle, la viscosité et la gravité sont, dans un premier temps, négligées. Enfin, on suppose que l'air de la bulle ainsi que l'eau subissent des transformations adiabatiques réversibles, de coefficients de compressibilité  $\chi_a$  et  $\chi_e$ .

Avec ces notations et ces hypothèses, les équations constitutives

$$p = -\frac{1}{\chi_{a,e}} \text{div} \vec{u} \text{ Et le principe fondamental de la dynamique}$$

$$\rho_{a,e} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\overline{\text{grad}} p \text{ permettent d'obtenir l'équation de d'Alembert :}$$

$$\frac{1}{c_{a,e}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \dots \dots \dots \text{(III.4.1)}$$

Où  $c_{a,e} = (\rho_{a,e} \chi_{a,e})^{-1/2}$  est la vitesse du son. On recherche les modes propres radiaux sous

la forme :

$$p(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{p}(r)e^{i\omega t}\},$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{u}(r)e^{i\omega t}\}\vec{e}_r,$$

Où  $\omega$ : pulsation considérée,  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire radial et Re désigne la partie réelle. L'équation (1.1) s'écrit alors :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\omega^2}{c_{a,e}^2}\right)r\vec{p}(r) = 0 \dots\dots\dots(\text{III.4.2})$$

Dont une solution est :

$$\vec{p}(r) = \frac{A}{r}e^{iq_a r} + \frac{B}{r}e^{-iq_a r} \quad \text{pour } r \leq R_0 \dots\dots\dots(\text{III.4.3a})$$

$$\vec{p}(r) = \frac{AC}{r}e^{iq_c r} + \frac{D}{r}e^{-iq_c r} \quad \text{pour } r \geq R_0 \dots\dots\dots(\text{III.4.3b})$$

Avec  $q_{a,e} = \frac{\omega}{c_{a,e}}$  et  $A, B, C$  et  $D$  des constantes à déterminer en imposant des conditions aux limites.

La non-divergence de la pression en  $r = 0$  impose que  $B = -A$  ; en définissant  $A_a = 2iA$ ,

La solution (III.4.3a) s'écrit donc :

$$\vec{p}(r) = \frac{A_a}{r} \sin(q_a r) \quad \text{Pour } r \leq R_0 \dots\dots\dots(\text{III.4.4})$$

Les deux termes du membre de droite de l'équation (III.4.3b) s'interprètent comme une onde sphérique incidente et une onde sphérique réfléchie. Puisqu'il n'y a aucune source de dissipation,

Il n'y a pas de perte d'énergie entre l'onde incidente et l'onde réfléchie et on a  $|C| = |D|$ .

### Chapitre III : Modélisation mathématique

L'onde de pression dans l'eau est stationnaire, et on peut l'écrire sous la forme :

$$\vec{p}(r) = \frac{A_e}{r} \sin(q_e(r - R_0 + \varphi_e)) \text{ pour } r \geq R_0 \dots \dots \dots \text{(III.4.5)}$$

Ou  $A_e$  est une constante fixé par l'amplitude de l'onde incidente et  $\varphi_e$  un déphasage à déterminer. À ce champ de pression correspond un champ de déplacement qui s'écrit

$$\vec{u}(r) = \frac{A_a}{q_a \omega^2 r} (q_a \cos(q_a \cos(q_a r)) - \frac{\sin(q_a r)}{r}) \dots \dots \dots \text{Pour } r \leq R_0$$

$$\vec{u}(r) = \frac{A_e}{q_e \omega^2 r} (q_e \cos(q_e \cos(q_e r) - R_0) + \varphi_e) - \frac{\sin(q_e(r - R_0) + \varphi_e)}{r} \text{ Pour } r \geq R_0$$

L'expression de la continuité de la pression et du déplacement à la frontière de la bulle permet alors de fixer les valeurs des deux constantes encore indéterminées  $A_a$  et  $\varphi_e$  :

$$A_a \sin(q_a R_0) = A_e \sin(\varphi_e)$$

$$\frac{A_a}{\rho_a} (q_a R_0 \cos(q_a R_0) - \sin(q_a R_0)) = \frac{A_e}{\rho_e} (q_a R_0 \cos(\varphi_e) - \sin(\varphi_e))$$

Système qui a pour solution :

$$A_a = \frac{A_e \sin(\varphi_e)}{\sin(q_a R_0)} \dots \dots \dots \text{(III.4.6a)}$$

$$\sin(\varphi_e) = \left( 1 + \left( \frac{1 + \frac{\rho_e}{\rho_a} (q_a R_0 \cotan(q_a R_0) - 1)}{q_e R_0} \right)^2 \right)^{-1/2} \dots \dots \dots \text{(III.4.6b)}$$

Pour chaque mode propre, les équations (III.4.4), (III.4.5) et (III.4.6) donnent donc le champ de pression dans l'air et dans l'eau.

La fréquence de Minnaert  $c'$  est la fréquence de résonance. on la notera  $\omega_M \cdot \gamma$ . Et le rapport des chaleurs spécifiques de l'air, elle se met sous la forme :

$$\omega_M = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_e}} \dots \dots \dots (III.4.7)$$

**1. Modèle d'oscillateur harmonique**

La résonance de Minnaert n'est pas une résonance de type Fabry-Pérot. On va voir en revanche qu'elle est bien décrite par un modèle d'oscillateur harmonique. Pour les raisons détaillées ci-dessus, on considère que la bulle n'a qu'un seul degré de liberté et qu'elle oscille en gardant la symétrie sphérique. Notons  $R(t) = R_0 + \xi(t)$  son rayon à l'instant  $t$ . La variable dynamique décrivant le mouvement de la bulle est donc  $\xi$ .

**2. Sphère pulsante**

Décrivons tout d'abord la bulle comme une sphère pulsante : supposons que la variation de rayon  $\xi(t)$  est imposée

on notera  $c$  et  $\rho$ , sans indices, la vitesse du son dans l'eau et la masse volumique de l'eau. Étant donné la symétrie radiale du système, l'équation de d'Alembert (III.4.1) s'écrit sous la forme :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(r, t) = 0$$

Puisque le milieu est infini, on ne considère que les ondes sortantes et on cherche une solution sous la forme :

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r - R_0}{c}\right) \text{ pour } r \geq R_0$$

Où  $f$  est une fonction quelconque. Le principe fondamental de la dynamique au niveau de la surface de la sphère (en  $r = R_0$ ) s'écrit alors :

$$\rho \ddot{\xi}(t) = -\frac{\partial p}{\partial r}(r = R_0) = \frac{1}{R_0^2} f(t) + \frac{1}{R_0 c} f'(t)$$

Une méthode par variation de la constante conduit à chercher une solution de la forme

$f(t) = A(t) \exp\left(-\frac{ct}{R_0}\right)$ , où  $A(t)$  doit vérifier :

$$\dot{A}(t) = R_0 c \rho \ddot{\xi} \exp\left(\frac{ct}{R_0}\right).$$

En choisissant  $A(-\infty) = 0$ , on obtient :

$$A(t) = \int_{-\infty}^t R_0 c p \ddot{\xi}(u) \exp\left(\frac{cu}{R_0}\right) du$$

$$= R_0^2 \rho \exp\left(\frac{ct}{R_0}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-R_0}{c}\right)^k \xi^{(2+k)}(t)$$

Ce qui donne :

$$p(r, t) = \frac{R_0^2 \rho}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-R_0}{c}\right)^k \xi^{(2+k)}\left(t - \frac{r-R_0}{c}\right) \text{ pour } r \geq R_0 \dots\dots (III.4.8)$$

L'équation (III.8) donne donc le champ de pression créé en tout point de l'eau pour des variations  $\xi(t)$  quelconques du rayon de la bulle. Remarquons que cette solution est exacte.

Intéressons-nous à la pression au niveau de la surface de la sphère pulsante :

$$p(R_0, t) = R_0 \rho \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-R_0}{c}\right)^k \xi^{(2+k)}(t) \dots\dots\dots (III.4.9)$$

En multipliant cette pression par la vitesse de déplacement  $\dot{\xi}$ , on forme l'expression de la puissance instantanée fournie par la sphère pulsante. Ainsi, tous les termes en dérivées paires de  $\xi$  dans l'équation (III.9) donneront une puissance moyenne nulle (puissance réactive), tandis que les termes en dérivées impaires contribueront à une puissance moyenne non nulle (puissance active). Pour la bulle, ces puissances réactive et active correspondront respectivement à l'inertie et à l'amortissement par rayonnement acoustique.

On va maintenant obtenir les expressions des équations (III.4.8) et (III.4.9) dans le cas d'oscillations sinusoïdales :

$$\xi(t) = \text{Re}\{\xi_0 e^{i\omega t}\}$$

Où  $\xi_0$  est une amplitude a priori complexe et  $\omega$  une pulsation réelle, et où la notation Re signifie que l'on considère la partie réelle de la quantité complexe. Afin d'alléger les

équations, le Re sera dorénavant sous-entendu. La surpression engendrée par la sphère pulsante s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 p(r, t) &= -\frac{R_0^2 \rho}{R} \omega^2 \xi_0 e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} \frac{e^{i\omega\frac{R_0}{c}}}{1 + i\frac{\omega R_0}{c}} \\
 &= -3\gamma P_0 \left(\frac{\omega}{\omega_M}\right)^2 \frac{\xi_0}{r} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r-R_0}{c})}}{1+i\frac{\omega R_0}{c}} \dots\dots\dots(\text{III.4.10})
 \end{aligned}$$

Où on a introduit la pulsation de Minnaert  $\omega_M$ (équation (1.7)) pour obtenir une écriture plus élégante. La surpression à la surface de la sphère pulsante est alors :

$$p(R_0, t) = -3\gamma P_0 \left(\frac{\omega}{\omega_M}\right)^2 \frac{1}{1+i\frac{\omega R_0}{c}} \frac{\xi_0}{R_0} e^{i\omega t} \dots\dots\dots(\text{III.4.11})$$

**3. Thermodynamique**

Redonnons à la sphère pulsante son statut de bulle :  $\xi(t)$  n'est plus imposée (mais toujours supposée monochromatique). Le comportement de l'air à l'intérieur de la bulle va alors donner une relation entre la surpression  $p$  et la variation de rayon  $\xi$ .

**-Modèle adiabatique**

Supposons dans un premier temps que l'air de la bulle subit des transformations adiabatiques. Notons  $\check{P}(t) = \check{P}_0 + \check{p}(t)$  la pression, toujours supposée uniforme, de l'air dans la bulle.

On a alors :

$$(\check{P}_0 + \check{p}(t)) \left(\frac{4}{3} \pi (R_0 + \xi(t))^3\right)^\gamma = \check{P}_0 \left(\frac{4}{3} \pi R_0^3\right)^\gamma$$

Où  $\gamma$  désigne le rapport des capacités calorifiques de l'air. Au premier ordre en  $\xi/R_0$ , on obtient la relation :

$$\check{p}(t) = -\frac{3\gamma \check{P}_0}{R_0} \xi(t) \dots\dots\dots(\text{III.4.12})$$

**-Au-delà du modèle adiabatique**

Le paramètre pour évaluer l'importance des phénomènes thermiques est le rapport du rayon de la bulle et de la longueur de pénétration thermique dans l'air  $l_D$ . La capacité calorifique de

### Chapitre III : Modélisation mathématique

l'eau étant élevée, on considérera que sa température durant les oscillations de la bulle reste constante.

Voyons comment l'équation (III.4.12) est modifiée. L'équation de la chaleur, alinéatisée, s'écrit :

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{K}{T} \Delta T$$

Où  $s$  désigne l'entropie par unité de masse et  $K$  la conductivité thermique du gaz. On a, en outre, la relation thermodynamique :

$$T ds = C_p dT + h dP$$

Avec  $h = -\frac{\alpha T}{\rho}$ , et  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T}$  pour un gaz parfait. On obtient alors une équation différentielle sur la température :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(r, t) - D \Delta T(r, t) = \frac{1}{\rho C_p} \frac{d\tilde{P}}{dt} \dots \dots \dots \text{(III.4.13)}$$

Avec  $D = \frac{K}{\rho C_p}$ , le coefficient de diffusion thermique. Aux fréquences qui nous intéressent, on peut considérer que la pression dans les bulles est uniforme. Notons la forme  $\tilde{P}(t) = \tilde{P}_0 + \tilde{p} e^{i\omega t}$

On cherche alors une solution de l'équation (III.4.13) de la forme :  $T(r, t) = T_0 + T_1(r) e^{i\omega t}$

Où  $T_0$  désigne la température à l'équation vérifiée par  $T_1(r)$  est :

$$\frac{i\omega}{D} T_1 - \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r T_1) = \frac{i\omega}{D \rho C_p} \tilde{p}$$

Dont une solution particulière s'écrit  $T_1 = \frac{\tilde{p}}{\rho C_p}$  et dont l'équation homogène associée admet

pour solution  $T_1(r) = A \frac{\sin h(\sqrt{i\omega/D} r)}{r}$  ou  $A$  est une constante. Ainsi, en imposant la condition  $T_1(r = R_0) = 0$  on obtient :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\tilde{p}}{\rho C_p} e^{i\omega t} \left( 1 - \frac{R_0}{r} \frac{\sin h(r \sqrt{i\omega/D})}{\sin h(R_0 \sqrt{i\omega/D})} \right)$$

On adopte la notion  $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$

### Chapitre III : Modélisation mathématique

Chaque pellicule de gaz de température  $T(r, t)$  et à  $\tilde{P}(t)$  doit vérifier la loi des gaz parfaits .

On a donc :

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \left[ 1 - \frac{\tilde{p}}{\gamma \tilde{P}_0} \exp(i\omega t) \left[ 1 + 3(\gamma - 1) i \left( \frac{l_D}{R_0} \right)^2 \left( 1 - \sqrt{i} \frac{R_0}{l_D} \coth\left(\sqrt{i} \frac{R_0}{l_D}\right) \right) \right] \right]$$

Où  $l_D = \sqrt{D/\omega}$  est la longueur de pénétration thermique. L'équation (III .4.12)) devient donc

$$\tilde{p}(t) = -\rho R_0 \left( \omega_0^2(\omega) + i\omega \Gamma^{th}(\omega) \right) \xi_0 e^{-i\omega t} \dots\dots\dots \text{(III.4.14)}$$

Avec les notations suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{\tilde{P}_0}{\rho R_0^2} R_e \Phi$$

$$\Gamma^{th}(\omega) = \frac{\tilde{P}_0}{\omega \rho R_0^2} Im \Phi$$

$$\text{Ou } \Phi(\omega, R_0) = \frac{3\gamma}{1 + 3(\gamma - 1) i \left( \frac{l_D}{R_0} \right)^2 \left( 1 - \sqrt{i} \frac{R_0}{l_D} \coth\left(\sqrt{i} \frac{R_0}{l_D}\right) \right)}$$

On définit l'exposant poly tropique  $K$  par :

$$K = \frac{R_e \Phi}{3}$$

#### III.4.2. Couplage de deux bulles

On a obtenu l'équation de la dynamique d'une bulle en écrivant la continuité de la pression à la surface de la bulle. On emploie la même démarche pour deux bulles. Mais cette fois, le bilan des surpressions s'enrichit pour chaque bulle de la contribution de la bulle voisine.

Rappelons la formule de la surpression  $p(r, t)$  engendrée par une bulle animée d'oscillations

$\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega t}$ , à une distance  $r$  et au temps  $t$  (voir équation III.4.10) :

$$p(r, t) = -3\gamma P_0 \left(\frac{\omega}{\omega_M}\right)^2 \frac{\xi_0}{r} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r-R_0}{c})}}{1+i\frac{\omega R_0}{c}} \dots\dots\dots(III.4.15)$$

Rappelons-nous que la longueur d'onde acoustique. Dans la gamme de fréquence qui nous occupe, est grande devant la taille de la bulle, l'équation (III.4.15) prend alors, en négligeant les termes du deuxième ordre en  $\frac{R_0}{c}$ , la forme :

$$p(r, t) = -3\gamma P_0 \left(\frac{\omega}{\omega_M}\right)^2 \frac{\xi_0}{r} e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega r}{c}} \dots\dots\dots(III.4.16)$$

Pour la surpression  $\tilde{p}$  dans une bulle, on avait l'expression (voir équation III.4.14)

$$\tilde{p}(t) = -\rho R_0 (\omega_0^2 + i\omega \Gamma^{th}) \xi_0$$

Pour deux bulles de rayons  $R_0$  séparées par une distance  $e$ , animées d'oscillations  $\xi_{0i} e^{i\omega t}$  ( $i = 1, 2$ ) et soumises à des pressions extérieures  $p_{ei} e^{i\omega t}$ , la continuité de la pression conduit alors au système d'équations :

$$\left(\omega_{01}^2 - \omega^2 e^{-i\frac{\omega R_{01}}{c}} + i\omega \Gamma_1^{th}\right) \xi_{01} - \frac{R_{02}^2}{d R_{01}} \omega^2 e^{-i\frac{\omega d}{c}} \xi_{02} = -\frac{p_{e1}}{\rho R_{01}} \dots\dots\dots(III.4.17a)$$

$$-\frac{R_{01}}{R_{02}} \left(\frac{R_{01}}{d} \omega^2 + i\omega \Gamma_1^{rad}\right) \xi_{01} + \left(\omega_{02}^2 - \omega^2 + i\omega (\Gamma_2^{th} + \Gamma_2^{rad})\right) \xi_{02} = -\frac{p_{e2}}{\rho R_{02}} \dots(III.4.17b)$$

On peut encore simplifier cette expression dans le cas où  $\omega d/c \ll 1$ . Ce cas est courant : à la fréquence de Minnaert d'une bulle de rayon  $R_0$  par exemple, on a  $\omega R_0/c \sim 1/80$ . Pour deux bulles séparées par une distance inférieure à  $80R_0$ , on peut donc considérer que les interactions sont quasi-instantanées. Le développement au premier ordre en  $d/c$  (ainsi qu'en  $\omega R_0/c$ ) des équations (III.4.18) donne :

$$\left(\omega_{01}^2 - \omega^2 + i\omega (\Gamma_1^{rad} + \Gamma_1^{rad})\right) \xi_{01} - \frac{R_{02}}{R_{01}} \left(\frac{R_{02}}{d} \omega^2 + i\omega \Gamma_2^{rad}\right) \xi_{02} = -\frac{p_{e1}}{\rho R_{01}} \dots(III.4.18a)$$

$$-\frac{R_{01}}{R_{02}} \left(\frac{R_{01}}{d} \omega^2 + i\omega \Gamma_1^{rad}\right) \xi_{01} + \left(\omega_{02}^2 - \omega^2 + i\omega (\Gamma_2^{th} + \Gamma_2^{rad})\right) \xi_{02} = -\frac{p_{e2}}{\rho R_{02}} \dots(III.4.18b)$$

**1. Deux bulles identiques**

Dans le cas de 2 bulles identiques, le système (III.4.18) se découple en introduisant les variables  $\Phi_s = \xi_1 + \xi_2$  et  $\Phi_a = \xi_1 - \xi_2$ . On obtient les deux équations découplées :

$$[\omega_0^2 - \omega^2(1 + \beta) + i\omega(\Gamma^{th} + 2\Gamma^{rad})]\Phi_{0s} = -\left(\frac{p_{e1} + p_{e2}}{\rho R_0}\right)$$

$$[\omega_0^2 - \omega^2(1 - \beta) + i\omega\Gamma^{th}]\Phi_{0a} = -\left(\frac{p_{e1} - p_{e2}}{\rho R_0}\right) \dots\dots\dots(III.4.19)$$

Où  $\beta = \frac{R_0}{d}$  est le paramètre de couplage. Le système a donc deux modes propres dont les pulsations propres vérifient :

$$\frac{1}{\omega_{a,s}^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (1 \mp \beta)$$

Le mode symétrique, avec deux bulles oscillant en phase, est à la pulsation propre  $\omega_s < \omega_0$ , et le mode antisymétrique, avec deux bulles oscillant en opposition de phase, à la pulsation propre  $\omega_a > \omega_0$ . Remarquons que les variations des pulsations propres par rapport à la pulsation propre d'une bulle seule s'interprètent en analysant l'inertie de chacun des modes. Dans le mode symétrique, les deux bulles déplacent beaucoup d'eau et l'inertie du mode est importante. Dans le mode antisymétrique au contraire, les deux bulles déplacent peu d'eau et l'inertie est moindre. Du point de vue de l'amortissement, le mode symétrique possède un taux d'amortissement radiatif double de celui d'une bulle (on parle de super-radiance), tandis que le mode antisymétrique possède un taux d'amortissement radiatif nul.

Cette différence s'explique par les interférences entre les pressions rayonnées par les bulles, qui sont constructives pour le mode symétrique et destructives pour l'antisymétrique. Ce système de deux bulles identiques permet également de résoudre un autre problème. Dans le plan-miroir entre les deux bulles, la composante du déplacement de l'eau normale au plan est nulle dans le cas symétrique ; tandis que la pression y est nulle dans le cas antisymétrique. Ce sont exactement les conditions aux limites qu'il faut imposer pour résoudre le problème d'une bulle à une distance  $d/2$  d'une surface rigide (mode symétrique), ou d'une surface libre (mode antisymétrique).

**2. Deux bulles différentes**

Le système (III.18) se met sous la forme matricielle :

$$\Xi - \omega^2 M \Xi = P,$$

$$\text{Avec } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{01}^2} & \frac{R_{02}^2}{dR_{01}} \frac{1}{\omega_{01}^2} \\ \frac{R_{01}^2}{dR_{02}} \frac{1}{\omega_{02}^2} & \frac{1}{\omega_{02}^2} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_1^{th} + \Gamma_1^{rad}}{\omega \omega_{01}^2} & \frac{\Gamma_2^{rad} R_{02}}{\omega \omega_{01}^2 R_{01}} \\ \frac{\Gamma_1^{rad} R_{01}}{\omega \omega_{02}^2 R_{02}} & \frac{\Gamma_2^{th} + \Gamma_2^{rad}}{\omega \omega_{02}^2} \end{pmatrix}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_{e1} \\ \frac{\rho R_{01} \omega_{01}^2}{\rho R_{02} \omega_{02}^2} p_{e2} \end{bmatrix}.$$

On pourrait diagonaliser directement la matrice M. Mais il convient d'attirer l'attention sur un point que le système de deux bulles identiques ne laissait pas apparaître, du fait de sa symétrie. La partie imaginaire de la matrice M n'est pas indépendante de la pulsation. Si l'on cherche les vecteurs propres de cette matrice, on va obtenir des vecteurs dont les composantes dépendent de la fréquence : ce ne seront donc pas des modes propres du système. Ce problème est dû à notre volonté de prendre en compte les effets d'amortissement. On a en effet couplé notre système de N bulles à un continuum (les phonons thermiques pour le terme  $\Gamma^{th}$  et les phonons acoustiques pour  $\Gamma^{rad}$ ), rendant nos N variables insuffisantes à décrire exactement le système.

Mais heureusement les bulles sont des oscillateurs harmoniques faiblement amortis.

Les termes d'amortissement ne vont donc pas avoir une grande influence sur les valeurs propres et les vecteurs propres de M. On se propose donc de chercher les modes propres du système en négligeant les termes imaginaires. La partie réelle de M ne faisant pas intervenir  $\omega$ , nos vecteurs propres seront bien indépendants de la pulsation à laquelle on force le système.

En posant le changement de variable  $\vartheta_{0i} = \sqrt{R_{0i}} \xi_{0i}$ , on obtient alors :

$$\gamma - \omega^2 N \gamma = Q \dots \dots \dots \text{(III.4.20)}$$

Ou on utilise les notations :

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{01}^2} & \frac{\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} \\ \frac{\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} & \frac{1}{\omega_{02}^2} \end{pmatrix}, \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \vartheta_{01} \\ \vartheta_{02} \end{bmatrix} \text{ et } Q = - \begin{bmatrix} \frac{pe_1}{\rho\omega_{01}^2\sqrt{R_{01}}} \\ \frac{pe_2}{\rho\omega_{02}^2\sqrt{R_{02}}} \end{bmatrix}.$$

Et avec la généralisation du paramètre de couplage :  $\beta = \sqrt{\frac{R_{01}R_{02}}{d}}$  . Le changement de variable a permis d'obtenir une matrice N symétrique. Ainsi, on peut la décomposer à l'aide de la matrice identité et des matrices de Pauli, dont on rappelle les définitions :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} \right] \mathbf{I} + \frac{\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} \sigma_x + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2} \right] \sigma_z \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} \right] \mathbf{I} + A (\sin \Phi \sigma_x + \cos \Phi \sigma_z), \end{aligned}$$

Avec

$$A = \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2} \right]^2 + \frac{\beta^2}{\omega_{01}^2\omega_{02}^2}}, \cos \Phi = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2}}{A}, \sin \Phi = \frac{\beta}{\omega_{01}\omega_{02}A}$$

Les valeurs propres de  $(\sin \Phi \sigma_x + \cos \Phi \sigma_z)$  sont +1 et -1, et les vecteurs propres sont donnés par la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Phi}{2} & -\sin \frac{\Phi}{2} \\ \sin \frac{\Phi}{2} & \cos \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix}$$

On a donc un mode "symétrique" à la pulsation  $\omega_s$  et avec le vecteur propre  $\vartheta_s$  :

$$\frac{1}{\omega_s^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2} \right)^2 + \left( \frac{2\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} \right)^2}$$

$$\vartheta_s = \cos \frac{\Phi}{2} \sqrt{R_{01}} \xi_{01} + \sin \frac{\Phi}{2} \sqrt{R_{02}} \xi_{02}$$

Et un mode “antisymétrique” à la pulsation propre  $\omega_s$  et avec le vecteur propre  $\vartheta_s$  :

$$\frac{1}{\omega_a^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2} \right)^2 + \left( \frac{2\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} \right)^2} \dots\dots\dots \text{(III.4.21a)}$$

$$\vartheta_s = -\sin \frac{\Phi}{2} \sqrt{R_{01}} \xi_{01} + \cos \frac{\Phi}{2} \sqrt{R_{02}} \xi_{02} \dots\dots\dots \text{(III.4.21.b)}$$

### III.5.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents modèles mathématiques de la cavitation, le modèle classique de Rayleigh-plesset, le modèle de diffusion et le modèle harmonique.

# Chapitre VI

## Applications et Discussions

### VI.1. Introduction

Le présent chapitre est le fruit du travail, vue qu'il présente l'application des modèles cités dans le chapitre précédent sur notre zone d'étude, et il illustre les différents résultats obtenues, il met également en valeurs les interprétations et les conclusions résultantes.

### VI.2. Présentation du logiciel utilisé

**MATLAB** (« *matrix laboratory* ») est un langage de programmation de quatrième génération émulé par un environnement de développement du même nom

C'est un outil très utilisé, dans les universités comme dans le monde industriel, qui intègre des centaines de fonctions mathématiques et d'analyse numérique (calcul matriciel le MAT de Matlab, traitement de signal, traitement d'images, visualisations graphiques)

### VI.3. Applications

#### VI.3.1. Modèle Reilagh-plesset

##### VI.3.1.1. Application

En considérant 'r' la dimension de la phase liquide, 'R' le rayon de la bulle et 'R<sub>0</sub>' son rayon initial et pour différentes valeurs du rapport 'R<sub>0</sub>/R', nous représentons les champs de pression dans la figure suivante.

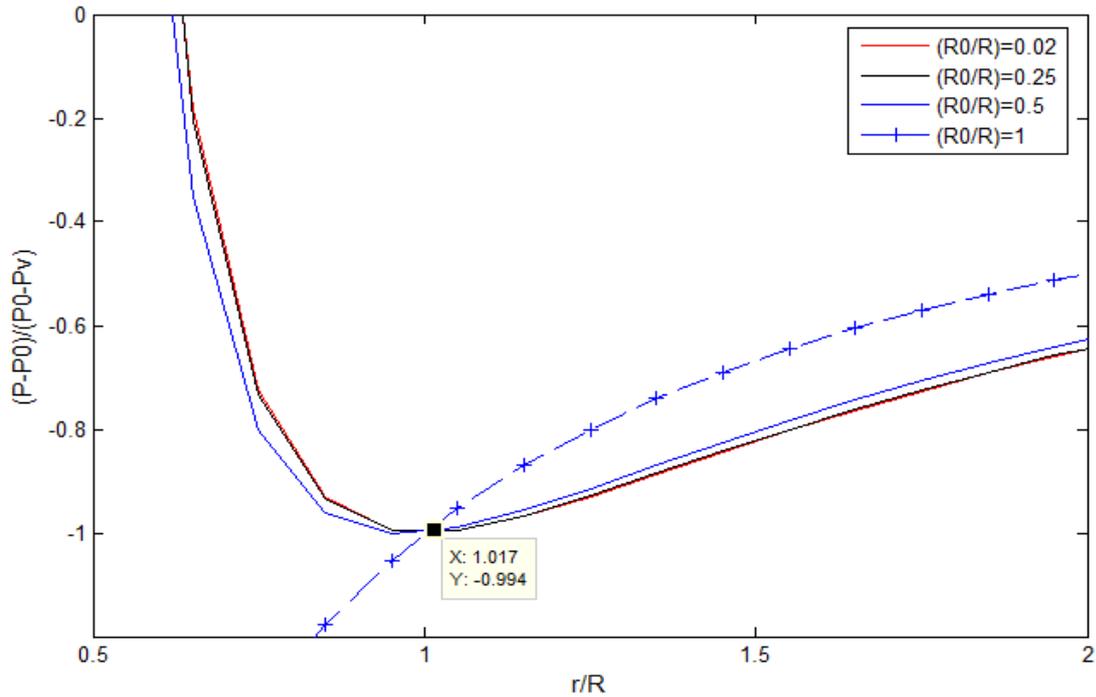


Figure VI.1. Évolution des champs de pression :  $0.02 \leq (R_0/R) \leq 1$

### VI.3.1.2. Interprétation

Pour des valeurs des rapports de  $R_0/R$  de 0.02, 0.25, et 0.5 les courbes de champs de pression sont adjacentes et présentent une chute jusqu'au point de coordonnées (1,-1) ce qui signifie que la pression est égale à la pression de vapeur. Pour des valeurs du rapport dimensionnel entre la phase liquide et la phase air supérieur à '1', le champ de pression se stabilise avec remontée des courbes.

### VI.3.2. Modèle de diffusion

#### VI.3.2.1. Application

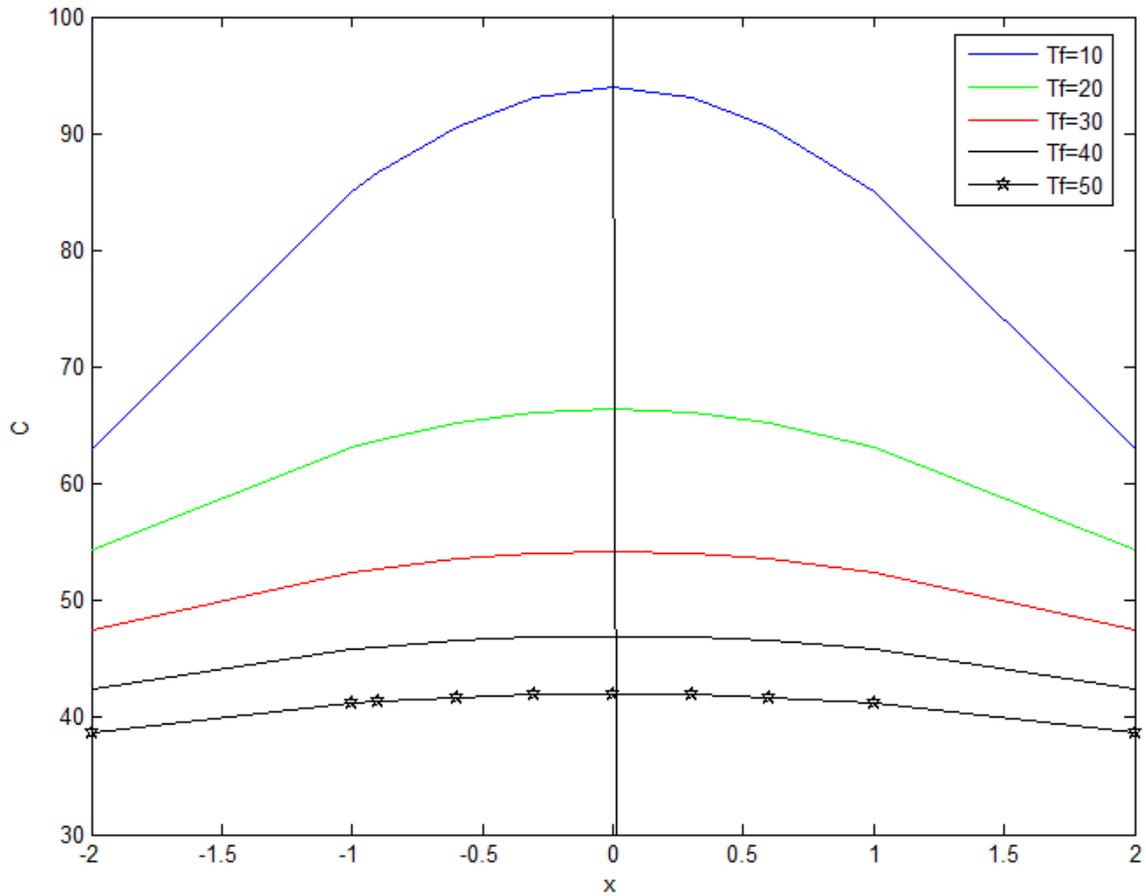
Pour les données suivantes :

$$d_f \approx 2.10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$A = 0.0019 \text{ m}^2$$

En posant "  $4d_f t = T_f$

Le résultat obtenu est montré dans la figure suivante :



**Figure.VI.2.Solution analytique de l'équation de diffusion de l'air pour plusieurs pas de temps**

### VI.3.2.2.Solution numérique

En admettant que la section circulaire se décompose de mailles triangulaire, nous utilisons le logiciel Matlab pour résoudre l'équation ci-dessus, avec la méthode des éléments finis comme outil de résolution, ou la variable 'u' représente la concentration 'c'.

Pour un temps ' $t \geq 0$ ', la solution de l'équation aux dérivées partielles est fonction de x.

En considérant les mêmes données de l'application précédente et en imposant une condition type Dirichlet en  $(x=0, y=0)$  et une condition type Newman en  $(x=0, y=0.05)$  en concordance avec une concentration élevée en haut et concentration nulle en air en bas de la section circulaire ; la solution est représentée par la figure ci-après.

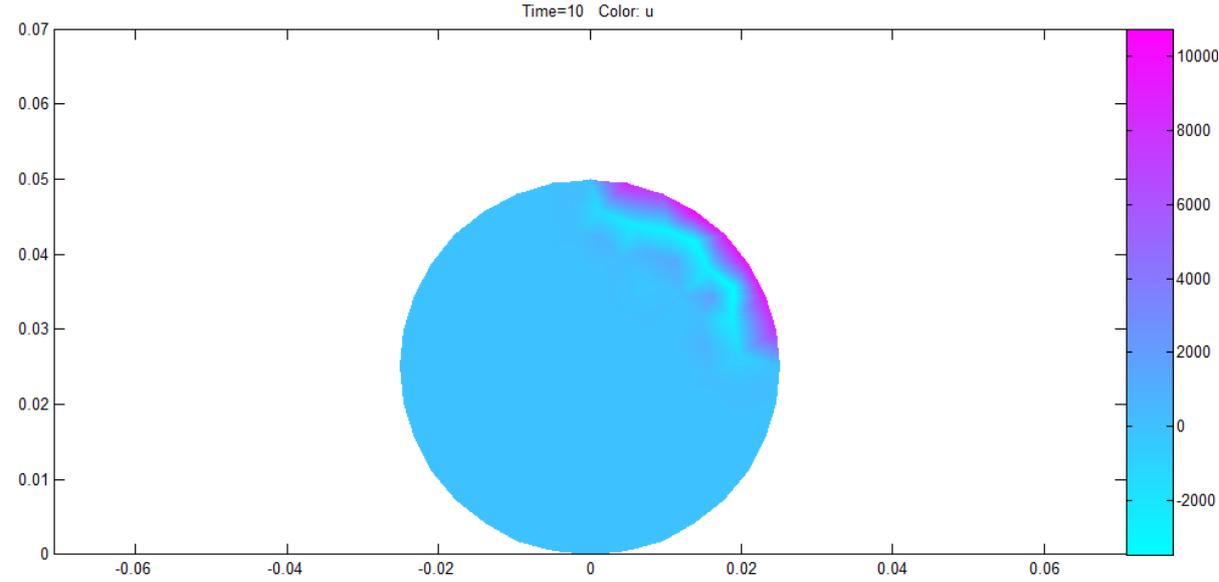


Figure.VI.3. Solution numérique de l'équation de diffusion de l'air.

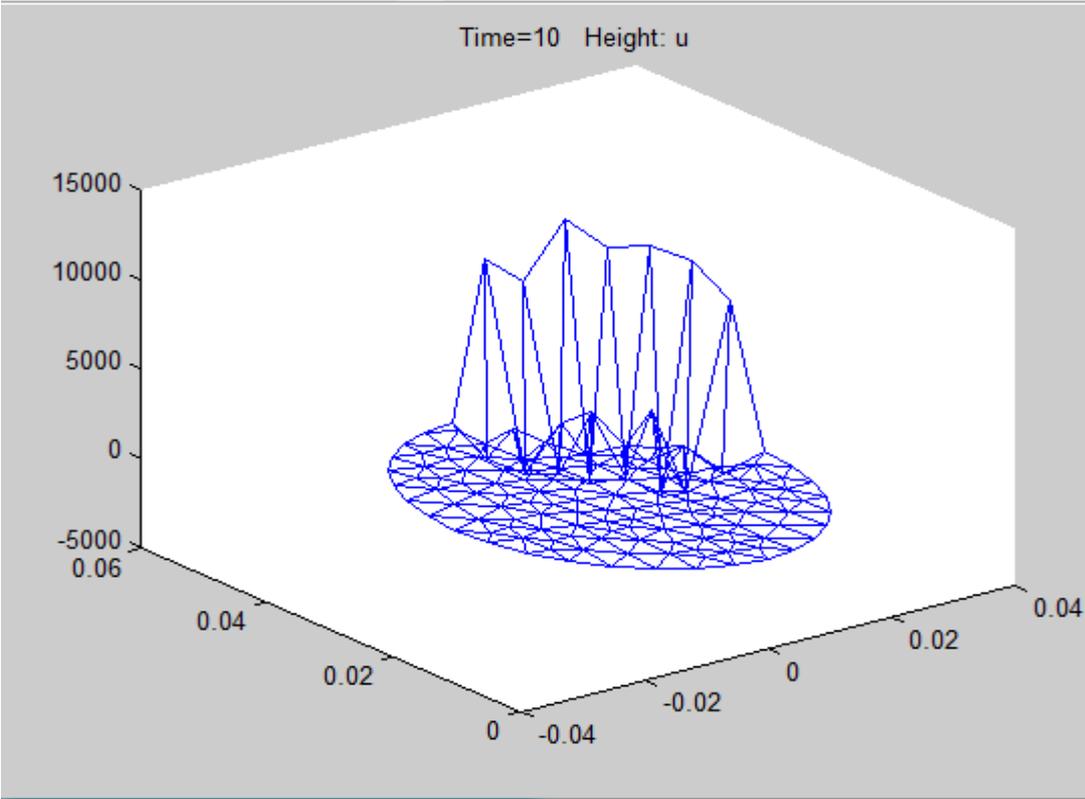


Figure.VI.4. Solution numérique de l'équation de diffusion de l'air avec le maillage.

### VI.3.2.3. Interprétation modèle de diffusion

Nous remarquons que la solution analytique est une courbe cloche .les différentes courbes correspondantes à des pas de temps élevés ( $T_f=10, 20, 30, 40,50$ ) sachant que  $T_f=4.t.d_f$ . Les valeurs maximales de concentrations sont observées en milieu de distance pour tous les pas de temps .nous pouvons déduire ainsi que ce phénomène de diffusion est très lent.

Par contre la solution numérique, basée sur une décomposition en éléments finis sous forme de triangles montre, en un temps court, que la distribution de l'air sur le côté en partie haute de la conduite .Ceci se rapproche de la réalité physique vu la masse volumique de l'air.

### VI.3.3. Modèle harmonique

Considérons N bulles d'air. La bulle i ( $1 \leq i \leq N$ ) à un rayon  $R_{0i}$ , se trouve en  $\vec{r}_i$  et est soumise à une pression extérieure  $p_{ei}e^{i\omega t}$ . En exprimant la continuité de la pression à la surface de chaque bulle du nuage, on obtient un système d'équations analogue à celui établi pour deux bulles (voir l'équation (III.4.20)) :

$$\gamma - \omega^2 N \gamma = Q \quad \text{III.4.22}$$

Avec :

$$(N_N)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{0i}^2} \left(1 - i \frac{\Gamma_i^{tot}}{\omega}\right) p_{oi} & \text{pour } i = j \\ \frac{1}{\omega_{0i}\omega_{0j}} \frac{\sqrt{R_{0i}R_{0j}}}{d_{ij}} e^{-i \frac{\omega d_{ij}}{c}} p_{oj} & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad \text{(III.23)}$$

$$(\gamma)_i = \sqrt{R_{0i}} \xi_{oi}, \quad (Q)_i = -\frac{p_{ei}}{\rho \omega_{0i}^2 \sqrt{R_{0i}}} \quad \text{et } d_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|.$$

## VI.4. Discussions

Depuis le dix-huitième siècle, la cavitation a attiré l'intention de plusieurs chercheurs. Comme phénomène ayant des impacts négatifs ainsi que positifs dans divers domaines, elle a impliqué des investigations visant une meilleure connaissance pour aboutir à des recommandations préventives rapides ou pour une utilisation adéquate.

- ✓ Parmi les premiers chercheurs qui se sont intéressés à l'étude de la cavitation c'est RAYLEIGHT qui a donné une représentation significative à la formation des bulles en

posant l'hypothèse de la sphéricité et en proposant son fameux modelé reliant la dimension de la bulle au champ de pression face à l'hypothèse de COOK et PARSONS qui donne un aspect solide à la bulle pour exprimer sa pression d'implosion .

- ✓ . Par contre Herring étudie les pulsations de la bulle créée par ces explosions sous-marines et l'influence sur ces pulsations de la présence du fond, de la surface libre ainsi que l'effet de la gravité qui peut être confirmé par le résultat de l'application du modèle de diffusion utilisant le package MATLAB ..
- ✓ En suivant PLESSET qui a étudié les variations du rayon d'une bulle dans un champ de pression donné, en tenant compte de la viscosité, et en établissant l' équation connue sous le nom d'équation de RAYLEIGH-PLESSET. Le début de formation de la zone de bulle est confirmé par la baisse de pression à la pression de vapeur. Mais il faut signaler que nous avons négligé l'effet de la tension interfaciale air-eau.
- ✓ D'après ce qui précède et d'après W.GRAF et M.S.ALTINAKAR , le modèle de diffusion qui représente la distribution de l'air dans un milieu liquide ,le cas des bulles d'air engendrées par le phénomène de cavitation
  - en supposant la vitesse du liquide suffisamment faible.
  - Et en utilisant le coefficient de diffusion de l'air  $c_f$

Le modèle de parabolique de diffusion est le plus consistant.

- ✓ Concernant le modèle harmonique : les chercheurs ont visé des exemples originaux d'oscillateurs harmoniques, pour sortir des éternels exemples de pendules, systèmes masse-ressort et autres circuits RLC. Parmi les systèmes retenus figurait la bulle de gaz dans un liquide et il s'est avéré que ce qui n'était initialement qu'un simple exemple pédagogique méritait tout à fait une étude approfondie.

Ainsi une bulle d'air dans l'eau peut être modélisée par un oscillateur harmonique dont la raideur est déterminée par la compressibilité ; La deuxième partie présentera le passage à plusieurs bulles. Négligeant les degrés de liberté associés à l'eau, on considérera N bulles comme N oscillateurs harmoniques couplés

- Dans ce modèle on rencontre une complexité de calculs jusqu'à N bulles de l'air dans l'eau
- ✓ Les équations des modèles de cavitation existants sont plus ou moins tous de la même forme.

- ✓ Les modèles n'ont pas fondamentalement évolué depuis ces dernières années, à la fois par manque de possibilité de validation fine des résultats et également à cause de l'interaction avec les modèles de turbulence
- ✓ Le modèle de RAYLEIGHT-PLESSET est basé sur la sphéricité de la bulle, le modèle de diffusion est basé sur le différentiel de concentration d'air en liquide et le troisième modèle considérant le mouvement de la bulle similaire à celui d'un pendule.
- ✓ Ces diversités engendrent donc des écarts par rapport à la réalité. En outre, une autre limitation des modèles de cavitation récents est qu'aucune considération n'est donnée au glissement à l'interface entre les phases liquide et vapeur.

### VI.5. Conclusion

Les modèles de cavitation étudiés dans ce chapitre et sont basés sur un aspect empirique avec des coefficients de vaporisation et de condensation qui sont calibrés en se basant sur les expériences. Les résultats des modèles numériques dépendent directement de ces coefficients. Le développement des modèles de cavitation plus avancés, non-empiriques est alors bien nécessaire.

## CONCLUSION GENERALE

En effet, la cavitation présentée par la formation des bulles est un phénomène dynamique complexe (nucléation, non linéarité, interaction entre bulles...) dépendant de très nombreux paramètres physiques et comportant un caractère aléatoire très marqué, qui rend son utilisation extrêmement délicate dans l'élaboration de thérapies efficaces et reproductibles.

Accompagné d'impact négatif tels que le bruit et l'érosion des matériaux, de même que positif tel que l'amélioration du contraste en imagerie médicale, ce phénomène a incité et incite toujours les investigateurs à lui donner un important intérêt malgré son interaction avec beaucoup d'autres phénomènes complexes de la mécanique des fluides.

S'intéressant à la modélisation de la cavitation par bulles d'air, nous avons présenté une chronologie sommaire ou une bibliographie des études de la dynamique des bulles basés sur diverses hypothèses et approches tels que la compressibilité, solidité ou du point de vue forme de la sphéricité de la bulle.

Dans le but de se rapprocher de plus en plus d'une représentation adéquate et réelle de la phase blanche ou dite bulles d'air qui représente le phénomène de la cavitation, nous avons retenu comme modèles celui de Raigle Plesset, de diffusion et d'harmonisation. Or nous reprochons au premier l'hypothèse de la forme sphérique des bulles ainsi que l'interaction interfaciale air-eau que nous avons négligé et aux deux autres le fait qu'ils s'appuient sur des coefficients empiriques.

# ANNEXE



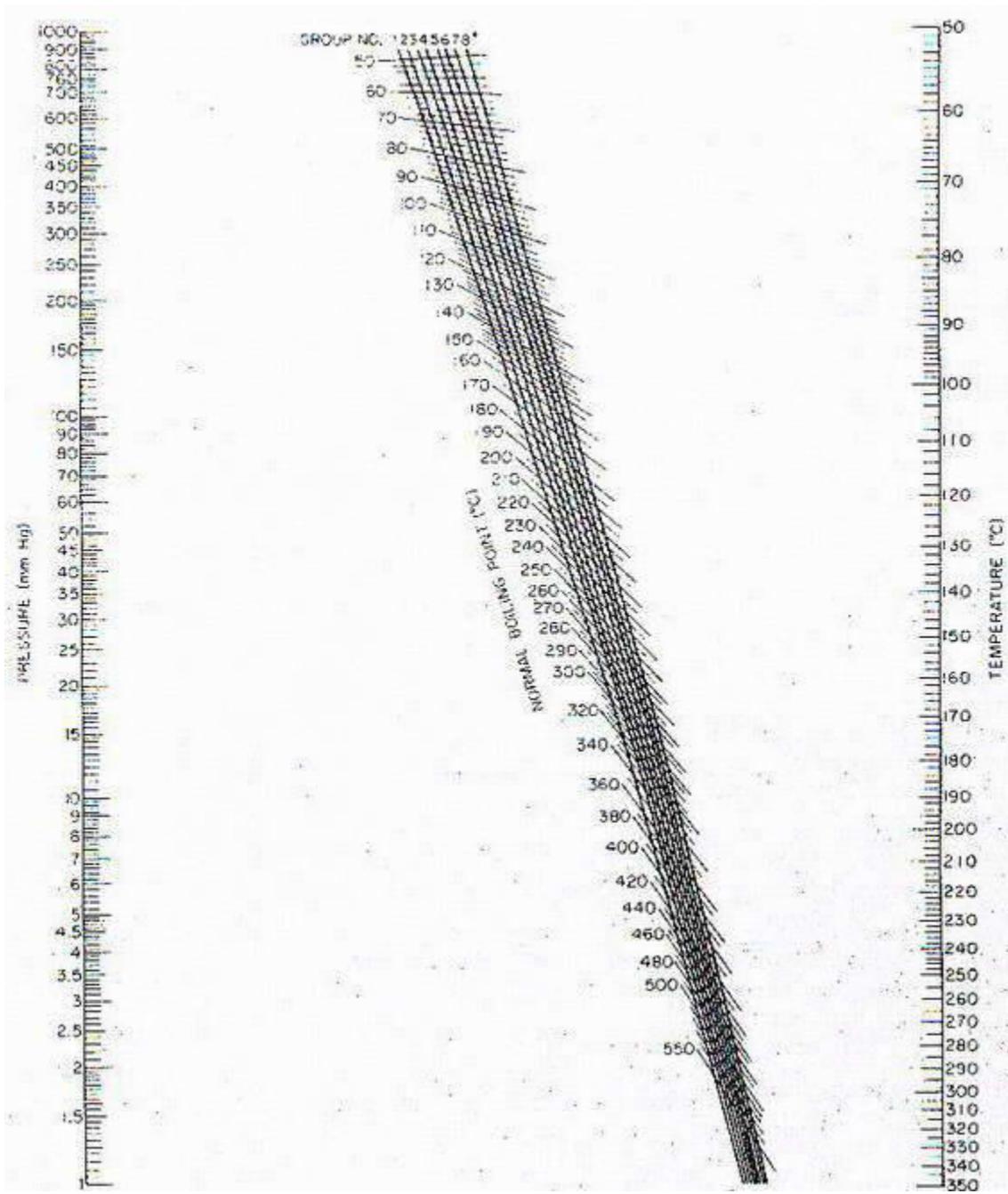


Figure: Exemple d'abaque température – pression.

## Bibliographie

- [1] LIONEL BERGERAT, Développement d'une méthode numérique compressible pour la Simulation de la cavitation en géométrie complexe. Thèse doctorat de L'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Paris .soutenue publiquement 2012.
- [2] LE PHÉNOMÈNE DE CAVITATION SAMM 2011 *Kavitationsphänomen* Dominique BONNEAU MD - Ph D
- [3] "Les Pompes", TOTAL Manuel de Formation : EXP-PR-EQ070 Révision 0.1 Dernière Révision le 13/04/2007
- [4] W.BESANT. - *A Treatise On Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1859) p. 198.
- [5] Lord RAYLEIGH. - *Phil. Mag.* 34, 94-98 (1917).
- [6] R.T.KNAPP, J.W. DAILY et F.G. HAMMITT. – *Cavitation* (Mc Graw Hill, New-York, 1970)
- [7] M.S. PLESSET et A. PROSPERETTI. -*Annu Rev. FluidMech.*9, pp. 145-185 (1977).
- [8] J.M. ROBERTSON. - dans « Cavitation state of knowledge », *A.S.M.E.*, pp. 1-9 (1969).
- [9] S.S. COOK et S.A. PARSONS. - *Trans. Inst. Nav. Arch.* 61,pp. 233-240, (1919).
- [10] C. HERRING. - *Columbia Univ. NDRC Report C-4 SR20-010* (1941).
- [11] R. BEECHING. - *Trans. Inst. Engr. Shipbuilders Scot.* 85,pp. 210-276 (1942).
- [12] R.S. SILVER. - *Engineering* 154, p. 501 (1942).
- [13] M. KORNFELD et L. SUVOROV. - *J. Appl. Phys.* 15,pp. 495-506 (1944).
- [14] R.H. COLE. - *Underwater explosions* (Princeton Univ.Press, 1948, reprinted by Dover Publications New-York).
- [15] M.S. PLESSET. - *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* 16, pp.228-231 (1948).
- [16] R.T. KNAPP et A. HOLLANDER. - *Trans. ASME* 70, pp. 419-435 (1948).
- [17] B.E. NOLTINGK et E.A. NEPPIRAS. - *Proc. Phys. Soc(London)* B.63, pp. 674-685 (1950).
- [18] L. TRILLING. - *J. Appl. Phys.* 23, pp. 14-17 (1952).
- [19] F.R. GILMORE, *Calif. Inst. of Techn. Hydro. Lab. Report* 26-4 (1952).
- [20] C.F. NAUDE et A.T. ELLIS. - *Trans. ASME* 83, *Ser. D:J. Basic Eng.*, pp. 648-656 (1961).
- [21] H.G. FLYNN. - Physics of acoustic cavitation in liquids, dans *Physical acoustics*, édité par W.P. Mason (Academie Press, New-York), Vol I, part. B, pp. 57-172 (1964).

- [22] L.W. FLORSCHUETZ et B.T. CHAO. - *Trans. ASME 87,Ser. C: J. Heat Transfer*, pp. 209-220 (1965).
- [23] M.S. PLESSET et R.B. CHAPMAN. - *California Inst. Of Techn. Div., of Eng. and Appl. Sc. Report 85-48* (1969).
- [24] J.M. MITCHELL et F.G. HAMMITT. - Collapse of a spherical bubble in a pressure gradient, *ASME Cavitation Fomm*, (1970).
- [25] V.A. AKULICHEV. - Pulsations of cavitation voids, in *High intensity ultrasonic fields*, édité par L.D. ROZEN-BERG (Plenum Press, New-York, 1971), Part. IV.
- [26] D.Y. HSIEH. - *Trans. ASME: J. Basic Eng.*, 655-665( 1972).
- [27] Essai de synthèse des recherches sur la cavitation *A summary of research work on cavitation* G. Gimenez Laboratoire de traitement du signal et ultrasons INSA 502 - 69621 Villeurbanne Cedex.
- [28] Kadi Omar .mémoire de fin d'étude *Etude de l'écoulement par photographe cas de cavitation et endommagement mécanique d'une pompe centrifuge sous l'effet de l'érosion abrasive 10/2001 ENSH BLIDA page 35.*
- [29] J P. Franc and J M. Michel, *Fundamentals of Cavitation*, Kluwer academic publishers, 2005
- [30] W .Graf et M.S.Altinakar.Hydraulique fluviale.Tome 1 .presses polytechniques et universitaires Romandes.1993.
- [31] Valentin Leroy. *Bulles d'air dans l'eau: couplage d'oscillateurs harmoniques et excitation aramétrique* thèse de docteur de l'université Paris 7 Spécialité : Champs, Particules, Matières le 29 octobre 2004.