

Higher National School of Hydraulic

The Library

Digital Repository of ENSH



المدرسة الوطنية العليا للري

المكتبة

المستودع الرقمي للمدرسة العليا للري



The title (العنوان):

Introduction à la résistance des matériaux.

The paper document Shelf mark (الشفرة) : P 620.11 HEB

APA Citation (APA توثيق):

Hebbouche, Abdelhamid. (2021). Introduction à la résistance des matériaux [polycopie pédagogique]. ENSH.

The digital repository of the Higher National School for Hydraulics "Digital Repository of ENSH" is a platform for valuing the scientific production of the school's teachers and researchers.

Digital Repository of ENSH aims to limit scientific production, whether published or unpublished (theses, pedagogical publications, periodical articles, books...) and broadcasting it online.

Digital Repository of ENSH is built on the open DSpace software platform and is managed by the Library of the National Higher School for Hydraulics. <http://dspace.ensh.dz/jspui/>

المستودع الرقمي للمدرسة الوطنية العليا للري هو منصة خاصة بتقييم لإنتاج لأساتذة باحثي المدرسة.

يهدف المستودع الرقمي للمدرسة إلى حصر الإنتاج العلمي سواء كان منشورا أو غير منشور (طروحات، مطبوعات، بيداغوجية، مقالات الدوريات، كتب...) بثه على الخط.

المستودع الرقمي للمدرسة مبني على المنصة المفتوحة DSpace و يتم إدارته من طرف مديرية المكتبة للمدرسة العليا .

كل الحقوق محفوظة للمدرسة الوطنية العليا للري.



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Nationale Supérieure d'Hydraulique

Polycopié de

Introduction à la Résistance des Matériaux

Fait Par :

Dr. HEBBOUCHE Abdelhamid

Maître de Conférences

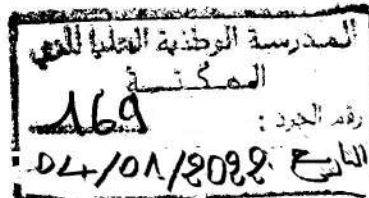


TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION.....	4
CHAPITRE 2 : TRACTION ET COMPRESSION.....	12
CHAPITRE 3 : CARACTERISTIQUE GEOMETRIQUE DES SECTIONS DROITES ..	23
CHAPITRE 4 : ETAT DE CONTRAINTES ET DE DEFORMATION	34
CHAPITRE 5 : CISAILLEMENT.....	50
CHAPITRE 6 : TORSION	56
CHAPITRE 7 : FLEXION.....	64
CHAPITRE 8 : THEORIE DES POUTRES	73
CHAPITRE 9 : DEFORMATION ELASTIQUE EN FLEXION	87
CHAPITRE 10 : SOLLICITATIONS COMPOSEES.....	97
REFERENCES.....	112

INTRODUCTION

I.1 Définition

La Résistance des Matériaux (R.D.M) est la partie de la mécanique appliquée aux corps solides réels (déformables). Elle étudie leur comportement sous l'action des forces extérieures et établit les méthodes de calcul de résistance, de rigidité et de stabilité de ces corps (éléments de machines et des ouvrages).

- La résistance est la capacité d'un corps de supporter, sans se détruire, une charge donnée ;
- La rigidité est la capacité d'un corps de s'opposer à l'action déformatrice des charges extérieures (modification de la forme et des dimensions) ;
- La stabilité est la capacité d'un corps de conserver une forme initiale donnée, correspondant à l'état d'équilibre élastique.

I.2 Classification des éléments de construction

Tous les éléments qu'on rencontre dans les ouvrages et les machines peuvent être classés en : barres, enveloppes et corps massifs.

- Une barre est un corps dont une dimension (longueur) est beaucoup plus grande que les deux autres (transversales). Les barres peuvent être droites ou courbées ;
- Une enveloppe est un corps ayant une dimension (épaisseur) beaucoup plus petite que les deux autres. Ex : chaudières, coupoles, etc..... ;
- Un corps massif est un corps ayant les trois dimensions de même ordre de grandeur.
Ex : Fondations, mur de soutènement, etc....

I.3 Forces intérieures et méthode des sections

Les forces extérieures appliquées à un corps produisent des changements de sa forme et de ses dimensions. On dit qu'elles provoquent la déformation du corps. On distingue :

- La déformation élastique : qui cesse avec la disparition de la force qui la produit ;
- La déformation plastique (permanente) : qui persiste même avec la disparition de la force.

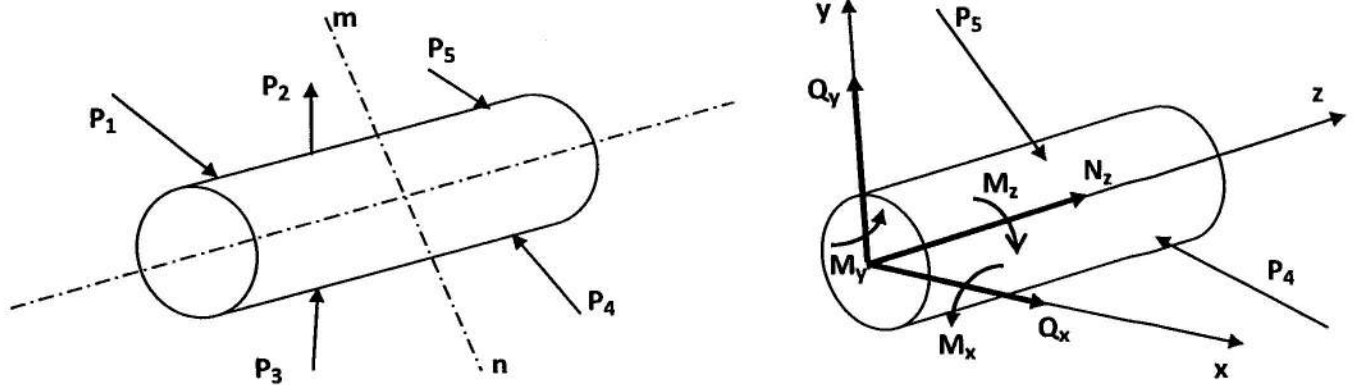
La variation de la disposition des atomes et des molécules lors de la déformation du corps se traduit par la variation des forces intermoléculaires, dites forces intérieures (de

cohésion). Les forces intérieures tendent à équilibrer les forces extérieures de manière à faire cesser la déformation.

La force intérieure agissant sur une unité de surface est appelée contrainte.

Les forces intérieures sont déterminées par la méthode des sections.

Considérons l'équilibre d'un corps chargé par un système quelconque de forces



Dans le système de référence choisi, la méthode des sections nous permet d'écrire les équations d'équilibre :

$\Sigma M / y = 0, \Sigma M / x = 0$, c'est-à-dire :

$\Sigma P_z = 0 : N_z + \Sigma P_{i(z)} = 0 \Rightarrow N_z = - \Sigma P_{i(z)}$ Effort normal.

$\Sigma P_y = 0 : Q_y + \Sigma P_{i(y)} = 0 \Rightarrow Q_y = - \Sigma P_{i(y)}$ Effort tranchant suivant y.

$\Sigma P_x = 0 : Q_x + \Sigma P_{i(x)} = 0 \Rightarrow Q_x = - \Sigma P_{i(x)}$ Effort tranchant suivant x.

$\Sigma M / z = 0 : M_z + \Sigma M_{pi} / z = 0 \Rightarrow M_z = - \Sigma M_{pi} / z$ Moment de torsion.

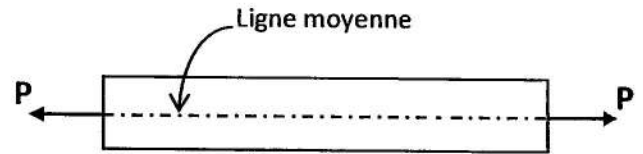
$\Sigma M / y = 0 : M_y + \Sigma M_{pi} / y = 0 \Rightarrow M_y = - \Sigma M_{pi} / y$ Moment fléchissant /y.

$\Sigma M / x = 0 : M_x + \Sigma M_{pi} / x = 0 \Rightarrow M_x = - \Sigma M_{pi} / x$ Moment fléchissant /x.

I.4 Sollicitations

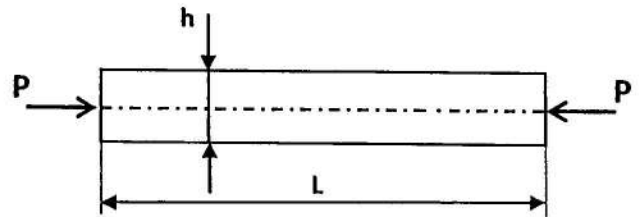
a) Traction simple (extension)

La barre s'allonge, on dit qu'elle est tendue
Ou qu'elle subit une sollicitation de traction.



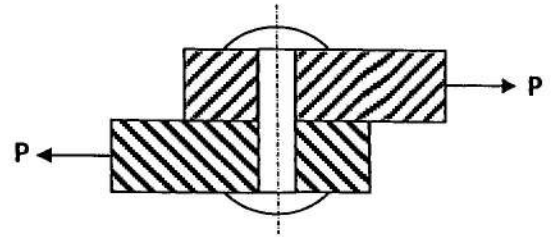
b) Compression simple ($3h < L < 8h$)

La barre subit un raccourcissement, on dit qu'elle
se comprime. Si la barre est longue, elle se déforme
en fléchissant : c'est le phénomène de flambage.



c) Cisaillement pur

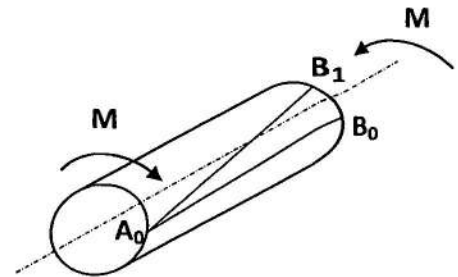
Les deux forces directement opposées agissant dans
Un même plan. Leur direction est perpendiculaire à
La ligne moyenne, la sollicitation est dans le plan
d'une section ; la barre est donc soumise
à un cisaillement pur.



d) Torsion simple

La barre (arbre) soumise à l'action de deux couples
égaux et opposés, est sollicitée en torsion.

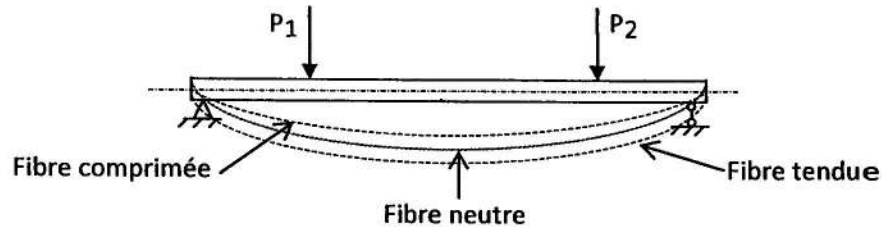
La génératrice A_0B_0 , initialement rectiligne se déforme
et devient un arc d'hélice A_0B_1 .



Ex : arbre de transmission.

e) Flexion

L'effort perpendiculaire à l'axe longitudinal de la pièce a tendance à incurver cet axe. Une poutre sollicitée à la flexion est soumise à l'action d'un système de forces coplanaires.



On rencontre également d'autres déformations qui sont en général la combinaison simultanée des déformations précédentes.

I.5 Hypothèses

L'étude de la RDM est basée sur une série d'hypothèses relatives à la structure et aux propriétés des matériaux, ainsi qu'à la nature des déformations :

- 1) Continuité de la matière ;
- 2) Homogénéité et isotropie ;
- 3) Faibles déformations ;
- 4) Élasticité parfaite du matériau ;
- 5) Dépendance linéaire entre les déformations et les charges ;
- 6) Principe de superposition des effets de forces (Principe de l'indépendance des effets de forces) ;
- 7) Sections planes.

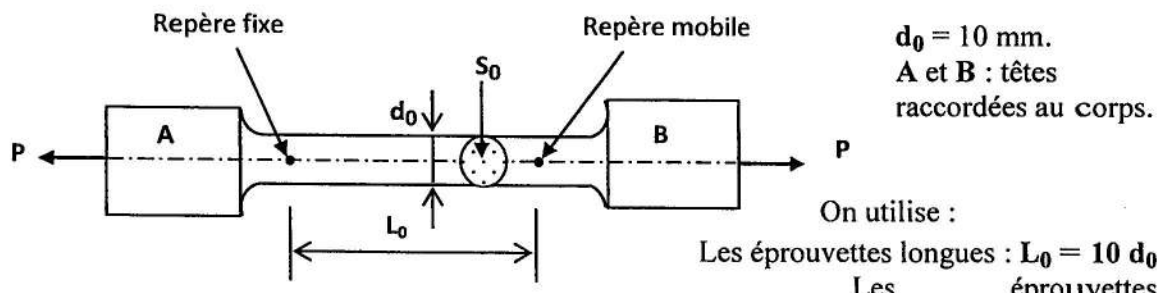
I.6 Caractéristiques Mécaniques des Matériaux

L'utilisation des produits métallurgiques nécessite la mesure avec précision de leurs caractéristiques mécaniques au moyen d'essais. Les principaux sont les essais de traction et compression.

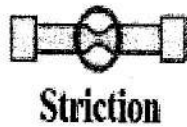
a) Essai de traction

L'éprouvette de forme généralement cylindrique est placée entre les mors d'une machine d'essai, qui permet d'exercer sur elle un effort de traction réglable, continu et progressif jusqu'à ce qu'il y ait rupture de la pièce.

L'effort s'inscrit à chaque instant sur un appareil enregistreur ainsi que les allongements de la pièce.



courtes : $L_0 = 5 d_0$



a) Diagramme des charges : Acier doux.

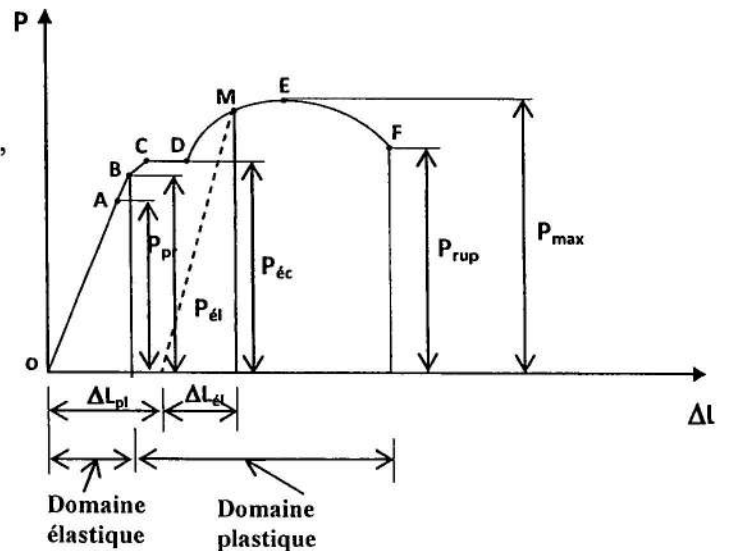
OA : la courbe est une droite, les allongements sont proportionnels aux charges. Si l'effort cesse, la pièce reprend sa longueur initiale L_0 .

les déformations sont dites élastiques. C'est la zone d'utilisation pratique des matériaux.

Point A : caractérise la charge à la limite de Proportionnalité P_{pr} .

Point B : correspond à la charge maximale $P_{él}$

Pour laquelle le matériau (l'éprouvette) conserve encore ses propriétés élastiques.



Point C : correspond à la charge $P_{éc}$ (charge d'écoulement, à partir de laquelle commence l'écoulement du matériau. Le palier horizontal explique l'allongement de l'éprouvette sous augmentation de la charge. On l'appelle palier d'écoulement. Le matériau retrouve ensuite sa résistance à une déformation ultérieure.

Point E : correspond à la charge maximale P_{max} qui marque le début de la striction.

Point F : correspond à la charge P_{rup} qui provoque la rupture de l'éprouvette.

b) Diagramme des contraintes :

$$\sigma = \frac{P}{S_0} ; \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Loi de proportionnalité (Hooke) :

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E = \text{cte}$$

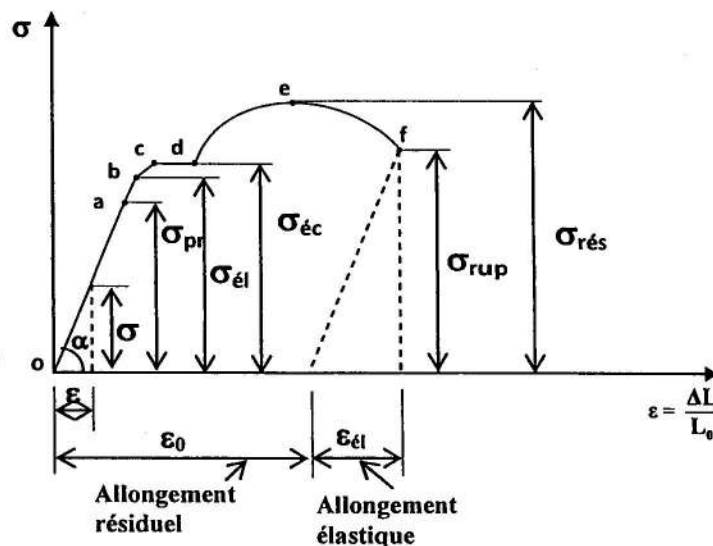
Point a : $\sigma_{pr} = \frac{P_{pr}}{S_0}$; limite de proportionnalité.

Point b : $\sigma_{él} = \frac{P_{él}}{S_0}$; limite d'élasticité.

Point c : $\sigma_{éc} = \frac{P_{éc}}{S_0}$; limite d'écoulement.

Point e : $\sigma_{rés} = \frac{P_{max}}{S_0}$; limite de résistance.

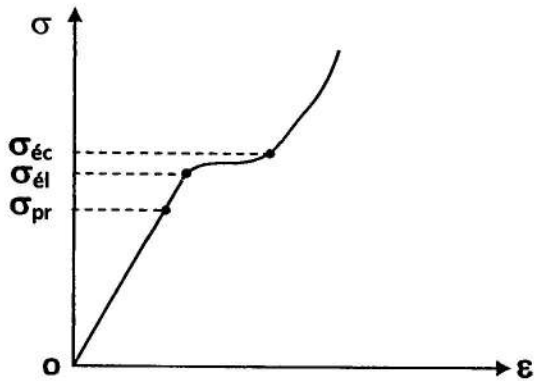
Point f : $\sigma_{rupt} = \frac{P_{rup}}{S_0}$; contrainte au moment de la rupture.



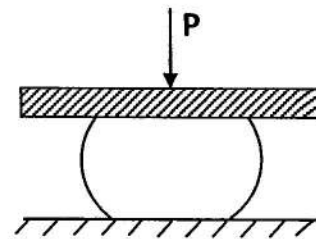
Lorsqu'un diagramme ne présente pas de palier d'écoulement (matière fragile), on prend conventionnellement pour limite d'écoulement la valeur de la contrainte qui produit une déformation résiduelle ($\varepsilon_{réside} = 0,002$ ou $0,2 \%$) ; et l'on désigne la limite d'écoulement conventionnelle par $\sigma_{0,2}$. Dans certains cas on adopte $\varepsilon_{réside} = 0,5 \%$.

b) Essai de compression

L'essai de compression est réalisé au moyen de presse ou de machines spéciales. On utilise des éprouvettes cylindriques (de faible hauteur, $h = 3$ à $4d$) ou cubiques.



Une éprouvette cylindrique en acier doux, soumise à la compression prend la forme d'un tonneau.



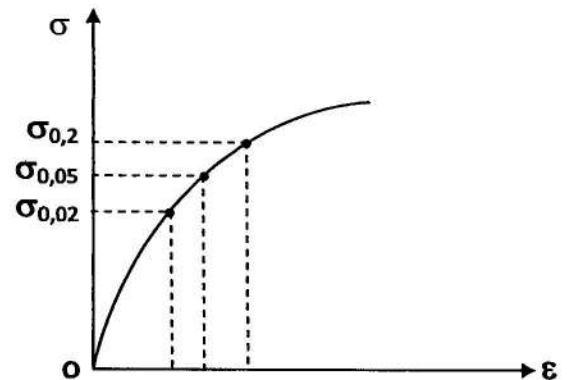
Le diagramme pour les matériaux fragile ne présente pas de palier d'écoulement, pour

ces matériaux $\frac{\sigma_t}{\sigma_C} = k$;

Ex : Fonte : $k = 0,2 \div 0,4$

Céramique : $k = 0,1 \div 0,2$

Matériaux plastique : $\sigma_{éct} \approx \sigma_{éc}$



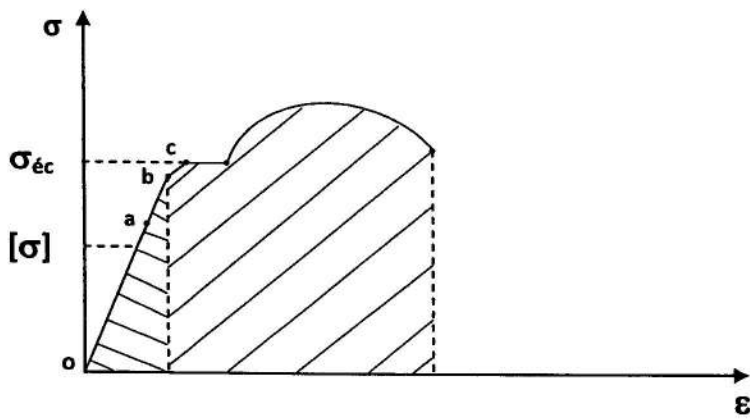
c) Contraintes admissibles

La méthode de calcul selon les contraintes admissibles est la plus répandue. Dans ce cas le calcul de résistance se fait à partir de la contrainte maximale σ_{max} engendrée en un certain point de la construction chargée. σ_{max} ne doit pas dépasser une valeur déterminée, liée au matériau et aux conditions de travail de la construction.

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_L}{n}$$

σ_L : contrainte limite pour le matériau donné.
 n : nombre > 1 appelé coefficient de sécurité.

On alors : $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$; $[\sigma]$: contrainte admissible. Ou : $[\sigma] = \frac{\sigma_L}{n}$



- Pour les matériaux plastiques :

$$\sigma_L = \sigma_{éc} ; n = 1,4 \div 1,6.$$

- Pour les matériaux fragiles :

$$\sigma_L = \sigma_{rés} ; n = 2,5 \div 3,0.$$

TRACTION ET COMPRESSION

II.1 Introduction

La traction et la compression simples constituent les états de sollicitations les plus simples de la résistance des matériaux qui nous conduit à utiliser des formules simples.

On dit qu'un corps prismatique est soumis à un état de traction ou d'extension simple quand les efforts qui le sollicitent ne tendent qu'à allonger les différents « fibres longitudinales » constituant ce corps. Il ne doit y avoir aucune tendance au glissement ni à la courbure de ces fibres.

II.2 Équilibre Statique des Systèmes

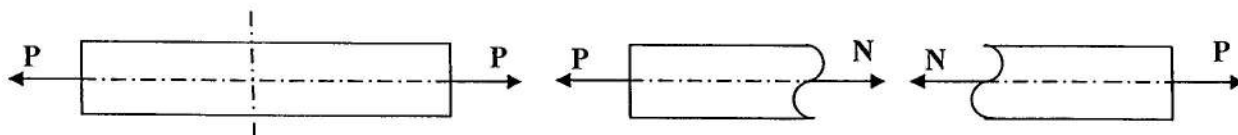
On dit qu'un système matériel est en équilibre statique extérieur quand l'ensemble des actions extérieures qui lui sont appliquées est équivalent à zéro, c'est-à-dire n'engendre aucune accélération à ce système. C'est le cas des corps au repos.

Équilibrer un système revient donc à rechercher ses réactions ou forces de liaison extérieures. Celles-ci peuvent comprendre, de même que les efforts appliqués, des forces et des moments.

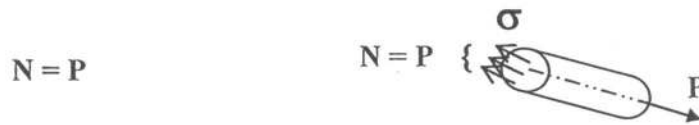
II.3 Effort normal et contrainte normale

Nous nous intéresserons à ce qui se passe à l'intérieur de ces éléments en équilibre externe et ceci en y effectuant des sections. C'est-à-dire des coupures fictives.

La traction (compression) est une sollicitation qui fait apparaître dans les sections droites (transversales) de la barre que des efforts normaux « N ».



La méthode des sections nous permet de déterminer l'effort normal (longitudinal) :



N : représente la résultante des F_{int} agissant sur la section.

Si la barre est homogène, les F_{int} sont uniformément réparties dans toute la section et la contrainte normale σ est donc la même dans tous les points de la section :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Où S : aire de la section droite [mm^2] ; N : en Newton ; σ en N / mm^2 ou MPa.

$$N = \sum P_z^G = \sum P_z^D$$

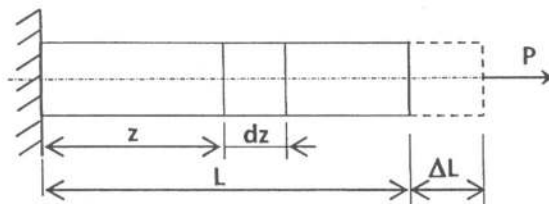
Les courbes exprimant la variation des grandeurs étudiées (N , σ ,.....) sont appelées diagrammes ou épures.

L'effort normal peut être positif ou négatif :



II.4 Loi de Hooke

Une barre sollicitée en traction subit un allongement absolu ΔL (en mm).



Si l'état de contrainte est homogène, l'allongement relatif (déformation) de la barre est :

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Si l'état de contrainte est non homogène, la déformation d'un élément dz sera : $\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}$

Pour la plupart des matériaux, la loi de Hooke (loi de proportionnalité) s'écrit : $\sigma = E \times \varepsilon$

Où E : coefficient de proportionnalité appelé module d'élasticité longitudinale ou module de Young. Il s'exprime en N / mm^2 ou [MPa].

Matériaux	Module d'Young
Acier	$(2 \div 2,1) 10^5 N / mm^2$
Cuivre	$1,2 10^5 N / mm^2$
Fonte	$(0,8 \div 1) 10^5 N / mm^2$
Béton	$(0,15 \div 0,35) 10^5 N / mm^2$
Bois (sens des fibres)	$(0,08 \div 0,12) 10^5 N / mm^2$

L'expression ci-dessus nous conduit à : $\Delta dz = \varepsilon \times dz = \frac{\sigma}{E} \times dz = \frac{N}{E \times S} \times dz$

L'allongement absolu de la barre sera : $\Delta L = \int_0^L \frac{N}{E \times S} \times dz$

Si $N = \text{constant}$ et $S = \text{constante}$ le long de la barre, on peut écrire : $\Delta L = \frac{N \times L}{E \times S} = \frac{\sigma \times L}{E}$

$E \cdot S$ = rigidité de la section transversale de la barre en traction (compression).

Exemple :

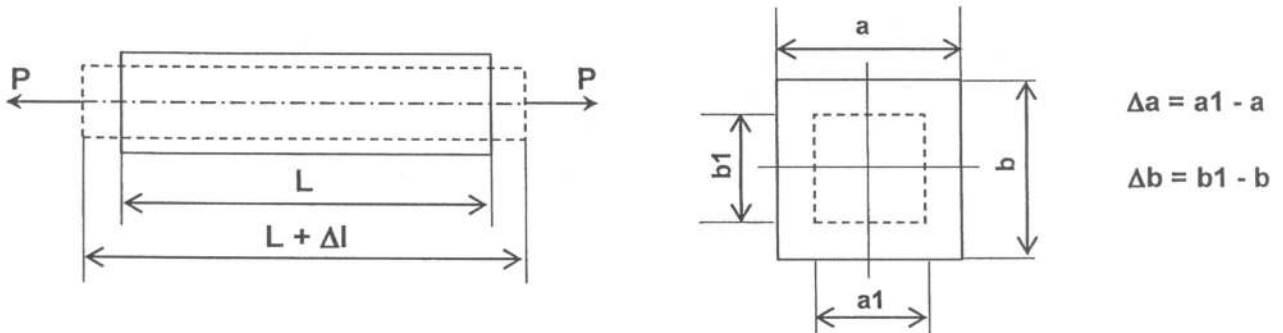
une barre en acier de 20 mm de diamètre (ϕ) et de 150 mm de longueur est soumise à un effort de traction de 100 kN. Déterminer la contrainte normale ainsi que les allongements relatif et absolu. $E = 2,1 \times 10^5$ MPa.

Solution :

- Contrainte normale : $\sigma = \frac{N}{S} = \frac{4 \times N}{\pi \times d^2} = \frac{4 \times 100 \times 10^3}{\pi \times 20^2} = 318,5 \text{ MPa}$
- Allongement relatif (déformation) : $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{318,5}{2,1 \times 10^5} = 0,0015 = 0,15 \%$
- Allongement absolu : $\Delta L = \varepsilon \times L = 0,0015 \times 150 = 0,225 \text{ mm}$

II.5 Coefficient de Poisson

La traction et la compression produisent également une modification des dimensions de la section transversale de la barre.



Δa et Δb représentent les déformations transversales absolues (< 0 en traction et > 0 en compression).

Les déformations transversales relatives (< 0 en traction et > 0 en compression) sont déterminées par :

$$\epsilon_C = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$$

Le coefficient de Poisson est donné par la valeur absolue du rapport de la déformation transversale relative et de la déformation longitudinale relative : $\mu = \left| \frac{\epsilon_C}{\epsilon} \right|$

Acier : $\mu \approx 0.3$; Béton : $\mu \approx 0.1$
 Liège : $\mu = 0$; Paraffine et caoutchouc : $\mu = 0.5$.

ϵ et ϵ_C sont toujours de signes contraires ; Ainsi : $\epsilon_C = -\mu \times \epsilon = -\mu \times \frac{\sigma}{E}$

II.6 Conditions de résistance et de rigidité

a) Condition de résistance.

Elle s'écrit pour la section dangereuse (caractérisée par N_{\max} si S est constante) :

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] ; \quad \text{si } S : \text{constante} : \quad \sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{S} \leq [\sigma]$$

Avec $[\sigma]$: contrainte admissible en traction $[\sigma_+]$ ou en compression $[\sigma_-]$.

Cette condition nous permet de résoudre 3 problèmes différents :

1. Choix des dimensions de la section transversale de la barre ;
2. Vérification de la résistance de la barre ;
3. Détermination de la charge admissible.

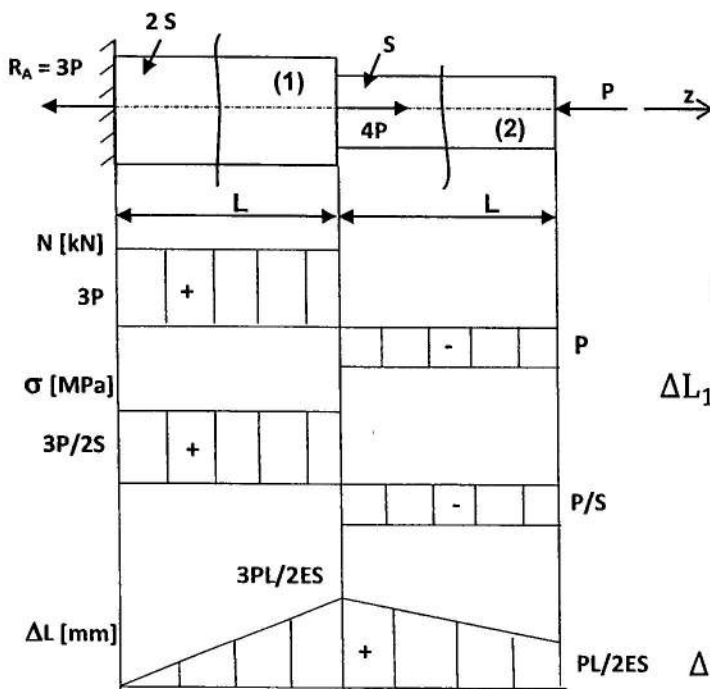
b) Condition de rigidité.

Dans certains cas les barres sont calculées en tenant compte également de la condition de rigidité :

$$\Delta L \leq [\Delta L]$$

Avec $[\Delta L]$: allongement admissible.

Exemple : Déterminer la charge que peut supporter la barre sachant que : $L = 40 \text{ cm}$;
 $S = 1,5 \text{ cm}^2$; $[\sigma] = 150 \text{ MPa}$; $E = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$; $[\Delta L] = 0,05 \text{ cm}$.



$$R_A : ? \quad \sum P_z = 0 : -R_A + 4P - P = 0$$

$$\text{D'où : } R_A = 3P$$

Tronçon (1) : $0 \leq z \leq L$

$$N_1 = 3P \text{ (traction)} ; \sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{3 \times P}{2 \times S}$$

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 \times L_1}{E \times S_1} = \frac{3 \times P \times L}{2 \times E \times S} \text{ (Allongement du tr (1))}$$

Tronçon (2) : $L \leq z \leq 2L$

$$N_2 = -P \text{ (compression)} ; \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{-P}{S}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 \times L_2}{E \times S_2} = \frac{-P \times L}{E \times S} \text{ (Allongement du tr (2))}$$

L'allongement de la barre est donné par la somme des allongements des deux tronçons :

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{3 \times P \times L}{2 \times E \times S} + \frac{-P \times L}{E \times S} = \frac{P \times L}{2 \times E \times S}$$

La condition de résistance nous permet d'écrire :

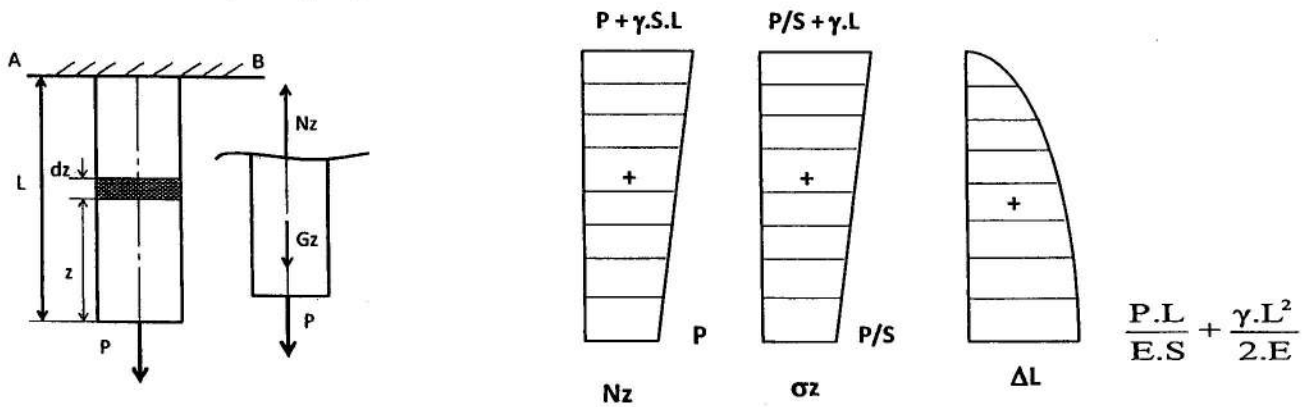
$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{3 \times P}{2 \times S} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{2 \times S \times [\sigma]}{3} = \frac{2 \times 1.5 \times 10^2 \times 150}{3} = 15000 \text{ N} = 15 \text{ kN}$$

La condition de rigidité nous donne :

$$\begin{aligned} \Delta L_{\max} &= \frac{3 \times P \times L}{2 \times E \times S} \leq [\Delta L] \Rightarrow P \leq \frac{2 \times E \times S \times [\Delta L]}{3 \times L} \\ &= \frac{2 \times 2.1 \times 10^5 \times 1.5 \times 10^2 \times 0.5}{3 \times 400} = 26250 \text{ N} = 26,25 \text{ kN} \end{aligned}$$

En tenant compte des deux conditions on doit prendre : $P = 15 \text{ kN}$.

II.7 Influence du poids propre



a) Calcul des contraintes (tension)

$$N_z = P + G_z = P + (\gamma \times S \times Z)$$

$$\sigma_z = \frac{N_z}{S} = \frac{P}{S} + (\gamma \times Z)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_z |_{z=L} = \frac{P}{S} + (\gamma \times L)$$

La condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} + (\gamma \times L) \leq [\sigma]$$

b) Calcul des allongements

L'élément dz est soumis à une contrainte σ , il subit un allongement :

$$\Delta dz = \frac{\sigma \times dz}{E} = \frac{\left(\frac{P}{S} + (\gamma \times Z)\right)}{E} \times dz$$

Ainsi l'allongement total de la barre sera :
$$\Delta L = \int_0^L \frac{P + (\gamma \times S \times z)}{E \times S} \times dz = \frac{P \times L}{E \times S} + \frac{\gamma \times L^2}{2 \times E}$$

L'allongement total est donc la somme des allongements dus à la charge P et à la moitié du poids de la barre.

Exemple

Une barre en acier supporte à son extrémité inférieure une charge $P = 300 \text{ kN}$

a) déterminer l'aire de la section constante sachant que $L = 220 \text{ m}$; $[\sigma] = 70 \text{ MPa}$; $\gamma = 7,8 \text{ tf}$.

b) Calculer l'allongement total de la barre.

Solution

$$a) \quad \sigma_{\max} = \frac{P}{S} + (\gamma \times L) \leq [\sigma] \Rightarrow S \geq \frac{P}{[\sigma] - (\gamma \times L)} = \frac{300 \times 10^3}{70 - (7,8 \times 10^{-5} \times 220 \times 10^3)}$$

$$S \geq 5677,5 \text{ mm}^2 = 56,78 \text{ cm}^2$$

$$b) \quad \Delta L = \frac{P \times L}{E \times S} + \frac{\gamma \times L^2}{2 \times E} = \frac{300 \times 10^3 \times 220 \times 10^3}{2,1 \times 10^5 \times 56,78 \times 10^2} + \frac{7,8 \times 10^{-5} \times (220 \times 10^3)^2}{2 \times 2,1 \times 10^5} = 55,35 + 8,99$$

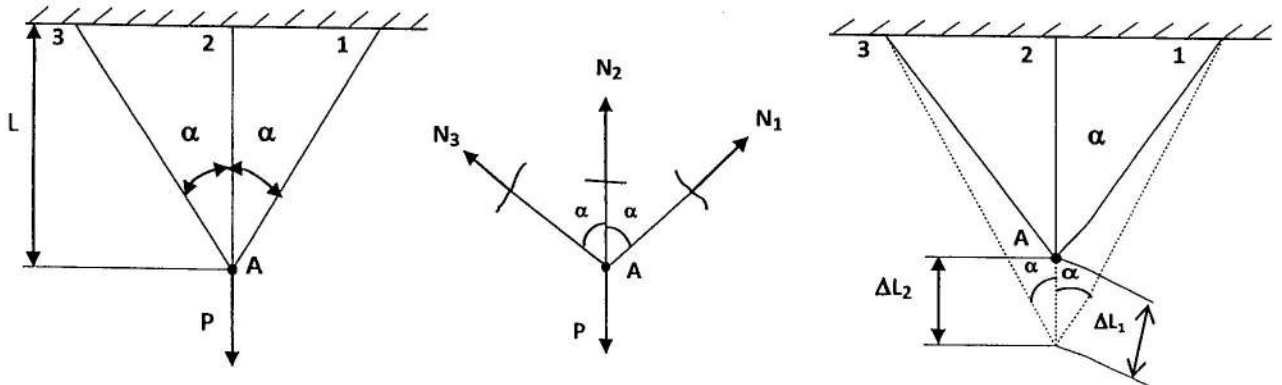
$$\Delta L = 64,3 \text{ mm} = 6,43 \text{ cm}$$

II.8 Systèmes hyperstatiques (statiquement indéterminés)

Ce sont des systèmes où les efforts intérieurs ne peuvent être déterminés par les seules équations de statique. On doit alors tenir compte également de la déformation du système considéré.

Exemple

Déterminer les efforts dans les tiges (de même section S).



Les équations d'équilibre du nœud A s'écrivent :

$$\Sigma P_h = 0 : (N_1 \times \sin \alpha) - (N_3 \times \sin \alpha) = 0 \quad \text{c.à.d.} \quad N_1 = N_3 \quad (1)$$

$$\Sigma P_v = 0 : N_2 + (N_1 \times \cos \alpha) + (N_3 \times \cos \alpha) - P = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \text{ nous donne : } N_2 + (2 \times N_1 \times \cos \alpha) = P \quad (2')$$

Le système est donc hyperstatique d'ordre 1, ce qui nous conduit à ajouter une équation de déformation :

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \times \cos \alpha \quad (3)$$

En tenant compte de la loi de Hooke on a :

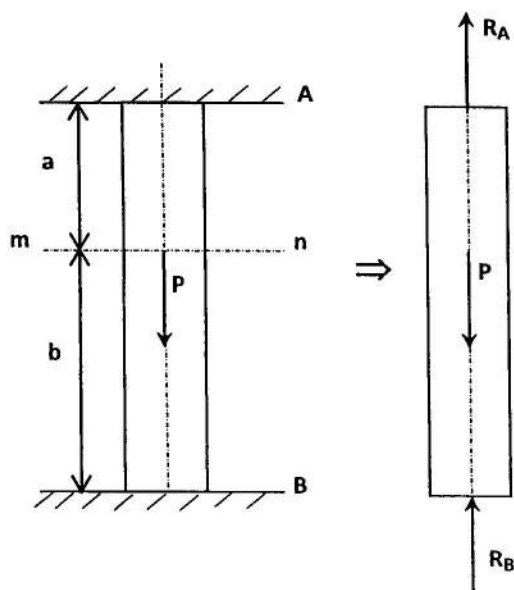
$$\Delta L_1 = \frac{N_1 \times L}{E \times S \times \cos \alpha} ; \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 \times L}{E \times S} \quad \text{Ainsi : } \frac{N_1 \times L}{E \times S \times \cos \alpha} = \frac{N_2 \times L}{E \times S} \times \cos \alpha$$

$$\text{c.à.d. : } \quad N_1 = N_2 \times \cos^2 \alpha \quad (3')$$

Enfin à partir de (2') et (3') on aura :

$$\Rightarrow N_1 = N_3 = \frac{P \times \cos^2 \alpha}{1 + 2 \times \cos^3 \alpha} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{P}{1 + 2 \times \cos^3 \alpha}$$

Exemple



Équation d'équilibre statique : $\Sigma P_v = 0$

$$\text{Ou } R_A - P + R_B = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P \quad (1)$$

Équation tenant compte de la déformation de la barre

$$|\Delta L_a| = |\Delta L_b| \quad (2)$$

En exprimant ces allongements à l'aide des forces correspondants (loi de Hooke) on aura :

$$\frac{R_A \times a}{E \times S} = \frac{R_B \times b}{E \times S} \Rightarrow R_A = R_B \times \frac{b}{a} \quad (2')$$

A partir de (1) et (2') : $R_B = \frac{a}{a+b} \times P$ et $R_A = \frac{b}{a+b} \times P$

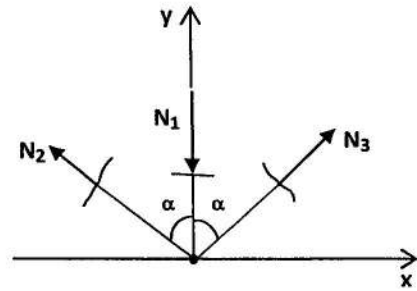
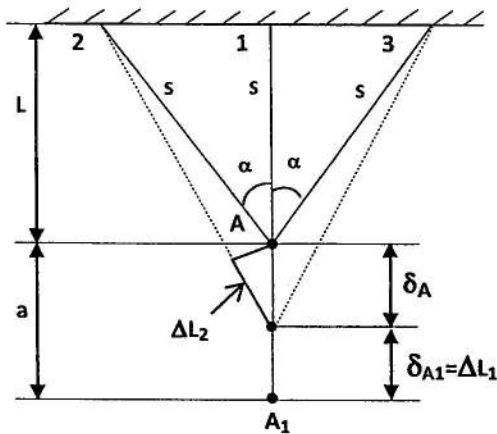
Si $b > a$, alors $R_A > R_B$ et $\sigma_{\max} = \frac{P \times b}{(a+b) \times S}$

On peut alors utiliser la condition de résistance pour déterminer les dimensions nécessaires, la charge admissible P, etc.....

II.9 Contraintes initiales (de montage) et thermiques

a) Contraintes initiales

Par erreur la tige 1 a une longueur $(L + a)$ au lieu de L .



Équation d'équilibre statique :

$$\Sigma P_x = 0 : -N_2 \times \sin \alpha + N_3 \times \sin \alpha = 0 \quad \text{c.à.d} \quad N_2 = N_3 \quad (1)$$

$$\Sigma P_y = 0 : -N_1 + (2 \times N_2 \times \cos \alpha) = 0 \quad \text{c.à.d} \quad N_1 = 2 \times N_2 \times \cos \alpha \quad (2)$$

Équation de déformation : $\delta_A + \Delta L_1 = a$

$$\text{Avec:} \quad \delta_A = \frac{\Delta L_2}{\cos \alpha} = \frac{N_2 \times L}{E \times S \times \cos^2 \alpha} \quad ; \quad \Delta L_1 = \frac{N_1 \times L}{E \times S}$$

Ainsi (3) devient :

$$\frac{N_2 \times L}{E \times S \times \cos^2 \alpha} + \frac{2 \times N_2 \times L \times \cos \alpha}{E \times S} = a$$

$$\Rightarrow \quad N_2 = \frac{a \times E \times S \times \cos^2 \alpha}{(1 + 2 \times \cos^3 \alpha) \times L} \quad \text{et} \quad N_1 = \frac{2 \times a \times E \times S \times \cos^3 \alpha}{(1 + 2 \times \cos^3 \alpha) \times L}$$

b) Contraintes thermiques

Soit Δt : variation de température ; $\Delta L_t = \alpha \times L \times \Delta t$ ou L : longueur initiale de la barre,
 α : Coefficient de dilatation linéaire spécifique [$^{\circ}\text{C}^{-1}$].

Si $\Delta t > 0$ et si la barre est fixée rigidement aux deux extrémités, les réactions d'encastrement empêchent toute dilatation thermique, des contraintes de compression apparaissent dans la barre et leur valeur s'obtient par la condition d'invariabilité de la longueur de la barre.

Soit σ : contrainte de compression due aux réactions. On peut donc écrire :

$$\Delta L_t = \alpha \times L \times \Delta t = - \frac{\sigma \times L}{E} \quad \text{d'où} \quad \sigma = - \alpha \times E \times \Delta t$$

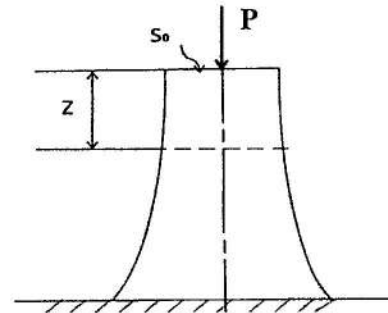
Une diminution de température entrainera une contraction c.à.d une contrainte de traction.

II.10 Barre d'égale résistance

C'est une barre qui est caractérisée par des contraintes

De même valeur en tout point, et égales à la contrainte

Admissible : $[\sigma] = \frac{P}{S_0}$



Ainsi l'aire de la section constante à une distance z est donnée par :

$$S = S_0 \times e^{(\gamma \times z / [\sigma])} = \frac{P}{[\sigma]} \times e^{(\gamma \times z / [\sigma])} \quad \text{et} \quad S_{\max} = \frac{P}{[\sigma]} \times e^{(\gamma \times L / [\sigma])}$$

Application :

Une tige cylindrique AC en gradin (la partie inférieure BC admet une section d'aire S et la partie AB une section d'aire 1,5 S) de poids négligeable est soumise à une charge répartie q dans le tronçon BC selon la figure 01.

Données : $q = 2500 \text{ daN/m}$; $L = 2 \text{ m}$; $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ et $[\sigma] = 240 \text{ N/mm}^2$.

- 1/ Etudier la loi de variation de l'effort normal le long de la tige et tracer le diagramme correspondant.
- 2/ Calculer le diamètre (ϕ) de la section de la tige.
- 3/ Calculer la variation de la longueur totale de la tige.
- 4/ Donner la nature de cette variation de longueur.

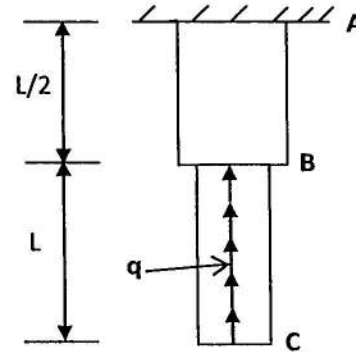


Figure 01

Solution :

1/ Etude de la variation des efforts intérieurs

Tronçon CB : $0 \leq z \leq L$

$$N(z) = -q \times z \Rightarrow z = 0 \Rightarrow N(C) = 0 \quad \text{et} \quad z = L \Rightarrow N(B) = -5000 \text{ daN}$$

Tronçon BA : $L \leq z \leq 1,5 L$

$$N(z) = -q \times L = -5000 \text{ daN}$$

2/ Calcul du diamètre de la section de la tige.

$$\sigma_{\max} = \sigma_C = \frac{N(L)}{S} = \frac{q \times L}{\frac{\pi \times \phi^2}{4}} \leq [\sigma]$$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4 \times q \times L}{\pi \times [\sigma]}} \Rightarrow \sqrt{\frac{4 \times 25 \times 2000}{\pi \times 240}} \Rightarrow \phi \geq 16,28 \text{ mm}$$

3/ Calcul de la variation de longueur totale de la tige

$$\Delta_T = \Delta_{CB} + \Delta_{BA}$$

$$\Delta_{CB} = \frac{1}{E \times S} \times \int_0^L N(z) \times dz = \frac{1}{E \times S} \times \int_0^L (q \times z) \times dz = \frac{q \times L^2}{2 \times E \times S}$$

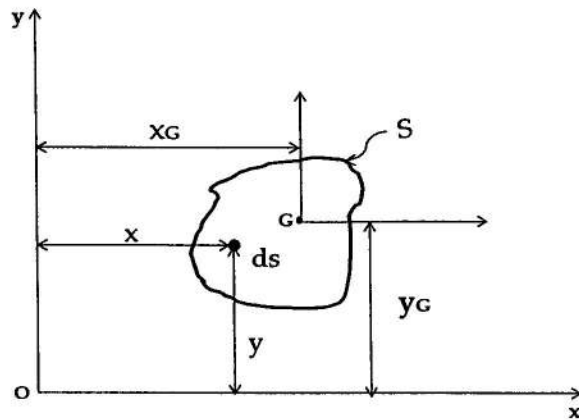
$$\Delta_{BA} = \frac{q \times L \times \frac{L}{2}}{E \times (1,5 \times S)} = \frac{q \times L^2}{3 \times E \times S}$$

$$\Delta_T = \frac{5 \times q \times L^2}{6 \times E \times S} \Rightarrow \Delta_T = \frac{5 \times 4 \times 25 \times 2000^2}{6 \times 2 \times 10^5 \times \pi \times (16,28)^2} \Rightarrow \Delta_T = 2,00 \text{ mm}$$

4/ Nature de la variation de longueur : Δ_T est le raccourcissement total de la tige.

CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS DROITES

III.1 Moment statique et centre de gravité d'une section (surface)



Considérons l'aire d'une section S dans le plan défini par le système d'axe xOy . On appelle les moments statiques de l'aire S par rapport aux axes Ox et Oy les quantités :

$$S_x = \iint_S y \times ds ; S_y = \iint_S x \times ds$$

Remarque : les quantités $x \times ds$ et $y \times ds$ sont le produit d'une longueur (x ou y) par une surface ds . Il en résulte que, au point de vue des unités, un moment statique s'exprime en unité de longueur au cube, par exemple en m^3 , en cm^3

Remarquons également que dans les formules précédentes, x et y sont des nombres algébriques. Le moment statique est donc lui aussi un nombre algébrique qui peut être positif ou négatif.

On définit par centre de gravité (c.d.g) d'une surface S , le point d'application du poids de cette surface qui est considérée homogène d'épaisseur constante. Les coordonnées du centre de gravité d'une section sont exprimées par les relations :

$$x_G = \frac{1}{S} \iint_S x \times ds \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{S} \iint_S y \times ds$$

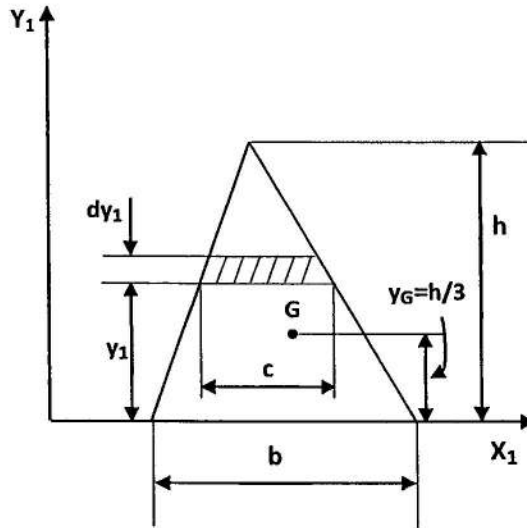
Le c.d.g de la section est déterminé par ses coordonnées x_G et y_G telles que :

$$Y_G = \frac{S_x}{S} \quad \text{et} \quad X_G = \frac{S_y}{S}$$

Si l'axe considéré (x ou y) passe par le centre de gravité de la section, le moment statique est nul. Cet axe est dit axe central.

Exemple

Déterminer la position du c.d.g du triangle à partir de la base.



$$S_{x_1} = \iint_S y_1 \times ds \text{ avec } ds = c \times dy_1$$

La similitude des triangles permet d'exprimer c

$$c = b \times \frac{(h - y_1)}{h} ;$$

$$S_{x_1} = \frac{b}{h} \int_0^h (h - y_1) \times y_1 \times dy_1 = \frac{b \times h^2}{6}$$

$$\text{Enfin, } y_c = \frac{S_{x_1}}{S} = \frac{(b \times h^2 / 6)}{\frac{1}{2} \times b \times h} = \frac{h}{3}$$

III.2 Moments d'inertie d'une section

Moment d'inertie d'une section / à l'axe x : $I_x = \iint_S y^2 \times ds$

Par analogie, on a : $I_y = \iint_S x^2 \times ds$ [cm⁴]

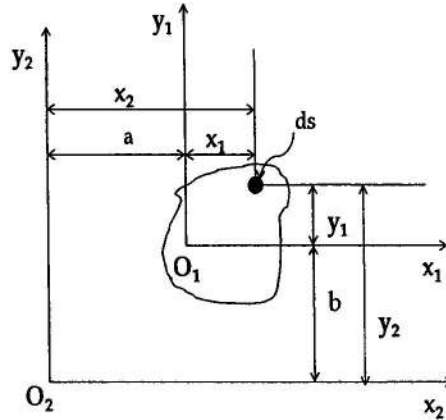
Produit d'inertie de la section / aux axes x, y : $I_{xy} = \iint_S x \times y \times ds$

Remarque:

- Les moments d'inertie (I_x et I_y) sont toujours positifs.
- Le produit d'inertie (I_{xy}) peut être positif ou négatif.
- Si les axes réciproquement perpendiculaires sont x et y ou l'un de ces axes constitue l'axe de symétrie de la figure, alors, par rapport à ces axes : $I_{xy} = 0$.

III.3 Translation des axes

On suppose que : I_{x_1} ; I_{y_1} ; $I_{x_1y_1}$ sont connus, calculons alors : I_{x_2} ; I_{y_2} ; $I_{x_2y_2}$



$$I_{x_2} = \iint_S y_2^2 \times ds ; I_{y_2} = \iint_S x_2^2 \times ds ; I_{x_2y_2} = \iint_S x_2 \times y_2 \times ds$$

Avec : $x_2 = x_1 + a$; $y_2 = y_1 + b$,

on aura :

$$I_{x_2} = \iint_S (y_1 + b)^2 \times ds = I_{x_1} + (2 \times b) \times S_{x_1} + b^2 \times S$$

$$I_{y_2} = \iint_S (x_1 + a)^2 \times ds = I_{y_1} + (2 \times a) \times S_{y_1} + a^2 \times S$$

$$I_{x_2y_2} = \iint_S (x_1 + a) \times (y_1 + b) \times ds = I_{x_1y_1} + a \times S_{y_1} + b \times S_{x_1} + a \times b \times S$$

Si les axes x_1 et y_1 sont centraux, on a :

$S_{x_1} = S_{y_1} = 0$ et les expressions précédentes deviennent :

$$I_{x_2} = I_{x_1} + b^2 \times S \quad ; \quad I_{y_2} = I_{y_1} + a^2 \times S \quad ; \quad I_{x_2y_2} = I_{x_1y_1} + (a \times b) \times S$$

Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à son axe central parallèle à un axe donné, augmenté du produit de l'aire de la surface par le carré de la distance entre les deux axes.

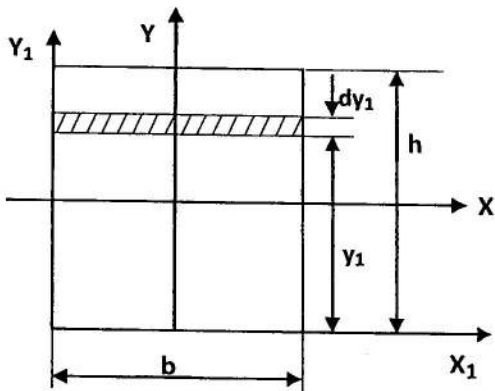
Le terme I_{x_1} , s'appelle encore inertie propre de la surface autour d'un axe parallèle à X_2 et le terme $(b^2 \times S)$ inertie de transport de la surface par rapport à l'axe X_2 .

Remarque :

- $I_{x_1} < I_{x_2}$.
- Le moment d'inertie parallèle à l'axe central est dit « moment d'inertie central ».

Exemple 1 :

Déterminer le moment d'inertie d'une section rectangulaire / à l'axe central // à la base.



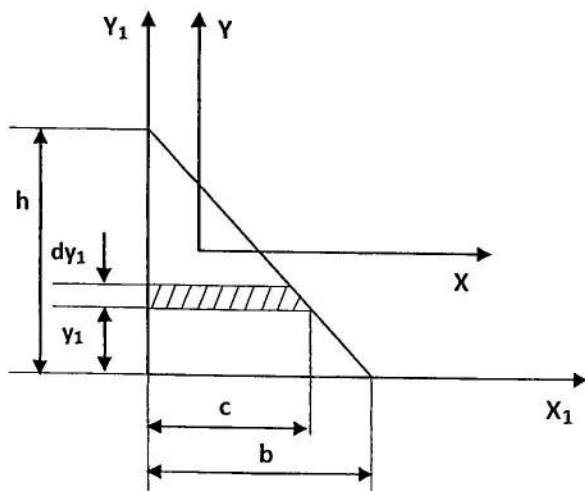
$$I_{x_1} = \iint_S y_1^2 \times ds = \int_0^h y_1^2 \times b \times dy_1 = \frac{b \times h^3}{3}$$

En utilisant la formule de translation, on trouve le moment d'inertie / à l'axe central.

$$I_x = I_{x_1} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \times S = \frac{b \times h^3}{12}$$

Exemple 2

Déterminer le moment d'inertie d'un triangle relativement à la base et à l'axe central // à cette base.



$$I_{x_1} = \iint_S y_1^2 \times ds ; ds = c \times dy ; c = b \times \frac{(h - y_1)}{h}$$

$$ds = b \times \frac{(h - y_1)}{h} \cdot dy ; I_{x_1} = \frac{b}{h} \int_0^h (h - y_1) \times y_1^2 \times dy_1$$

$$\text{D'où : } I_{x_1} = \frac{b \times h^3}{12} ;$$

$$\text{Ainsi : } I_x = I_{x_1} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \times S \text{ d'où : } I_x = \frac{b \times h^3}{36}$$

III.4 Moment d'inertie polaire d'une section

Le moment d'inertie d'une surface plane / à un axe perpendiculaire au plan de la figure représente le moment d'inertie polaire par rapport au point où l'axe coupe le plan.

$$I_p = \iint_S \rho^2 \times ds ; \quad \text{Si deux axes perpendiculaires passent par}$$

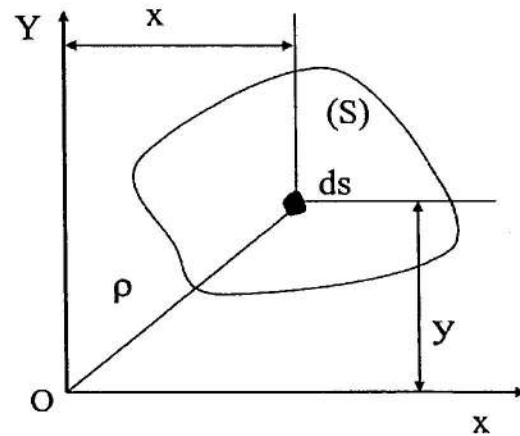
Le point O, on peut exprimer I_p en coordonnées cartésiennes.

On a : $\rho^2 = x^2 + y^2$; Ainsi :

$$I_p = \int_S (x^2 + y^2) \times ds = I_x + I_y$$

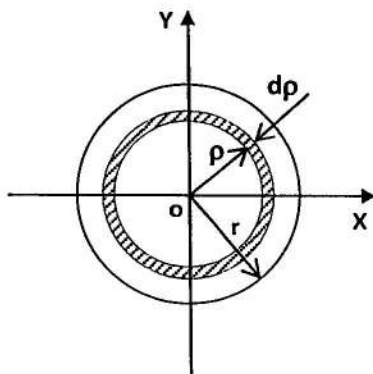
$$I_p = I_x + I_y$$

Le moment d'inertie polaire par rapport à un point quelconque O est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires x et y passant par le même point.



Exemple

Trouver I_p et I_x (I_y) d'un cercle de diamètre d.



Découpons le cercle en éléments concentriques de largeur dp .

L'aire d'une couronne d'épaisseur dp sera :

$$ds = 2 \times \pi \times \rho \times dp$$

$$\text{d'où } I_p = \iint_S \rho^2 \times ds = 2 \times \pi \times \int_S \rho^2 \times dp = \frac{\pi \times r^4}{2}$$

$$I_p = \frac{\pi \times r^4}{2} = \frac{\pi \times d^4}{32}$$

$$\text{On sait que } I_p = I_x + I_y, \quad I_{\text{axial}} = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi \times d^4}{64}$$

Et par raison de symétrie : $I_x = I_y = I_p / 2$

III.5 Changement de direction des axes (Détermination des axes principaux)

Données :

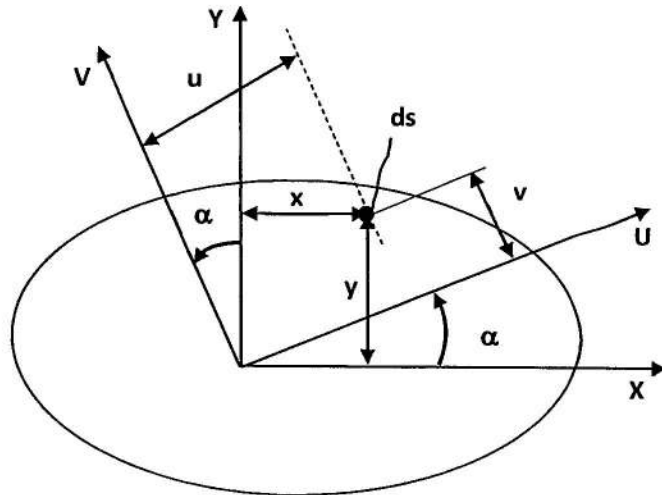
$$I_x = \iint_S y^2 \times ds ; I_y = \iint_S x^2 \times ds$$

$$I_{xy} = \iint_S x \times y \times ds$$

I_x ; I_y et I_{xy} sont connus.

$$I_u ? ; I_v ? ; I_{uv} ?$$

On suppose : $I_x > I_y$



$$u = x \times \cos \alpha + y \times \sin \alpha \quad \text{et} \quad v = y \times \cos \alpha - x \times \sin \alpha$$

Ainsi :

$$I_U = I_x \times \cos^2 \alpha + I_y \times \sin^2 \alpha - I_{xy} \times \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$I_V = I_x \times \sin^2 \alpha + I_y \times \cos^2 \alpha + I_{xy} \times \sin 2\alpha \quad (2)$$

$$I_{UV} = I_{xy} \times \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \times \sin 2\alpha \quad (3)$$

On remarque [(1) + (2)] : $I_U + I_V = I_x + I_y = \int_S (X^2 + Y^2) \times ds = I_P = \text{constant}$

La somme des moments d'inertie axiaux par rapport à deux axes orthogonaux ne dépend pas de l'angle α ; elle est constante lors de la rotation des axes.

Axes principaux d'inertie:

Le repère formé par les axes principaux d'inertie X et Y est tel que :

- Le produit d'inertie est nul dans ce repère.
- Les moments d'inertie sont respectivement maximaux par rapport à un axe et minimal par rapport à l'autre. Ces moments sont alors appelés moments principaux d'inertie.

En résumé : si on considère tous les axes passant par le centre de gravité d'une surface, et les moments d'inertie correspondants, il existe deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, appelés axes principaux d'inertie, pour lesquels les moments d'inertie sont maximum, l'autre minimum.

III.6 Rayon de giration et ellipse d'inertie

Les axes principaux d'inertie définissent deux rayons de giration principaux d'une surface qui sont définies par :

$$I_X = \int_S y^2 \times ds = S \times i_x^2 \quad \text{où} \quad i_x = \sqrt{\frac{I_X}{S}}$$

- Le moment d'inertie d'une figure par rapport à un axe quelconque peut être représenté sous forme de produit de l'aire de cette figure par le carré d'une certaine grandeur appelée **rayon de giration**.

i_x : rayon de giration par rapport à l'axe X.

De même : $i_y = \sqrt{\frac{I_Y}{S}}$

- L'ellipse définie par l'équation $\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1$ est appelée ellipse d'inertie de la figure et les axes X et Y sont les axes principaux d'inertie de la figure.

Application :

- 1/ Déterminer dans le repère Oxy les coordonnées (x_c, y_c) du centre de gravité de la section représentée sur la figure 01.
- 2/ Déterminer les moments d'inertie et produit d'inertie centraux de cette figure.
- 3/ Déterminer les directions des axes centraux principaux et les moments d'inertie correspondants.

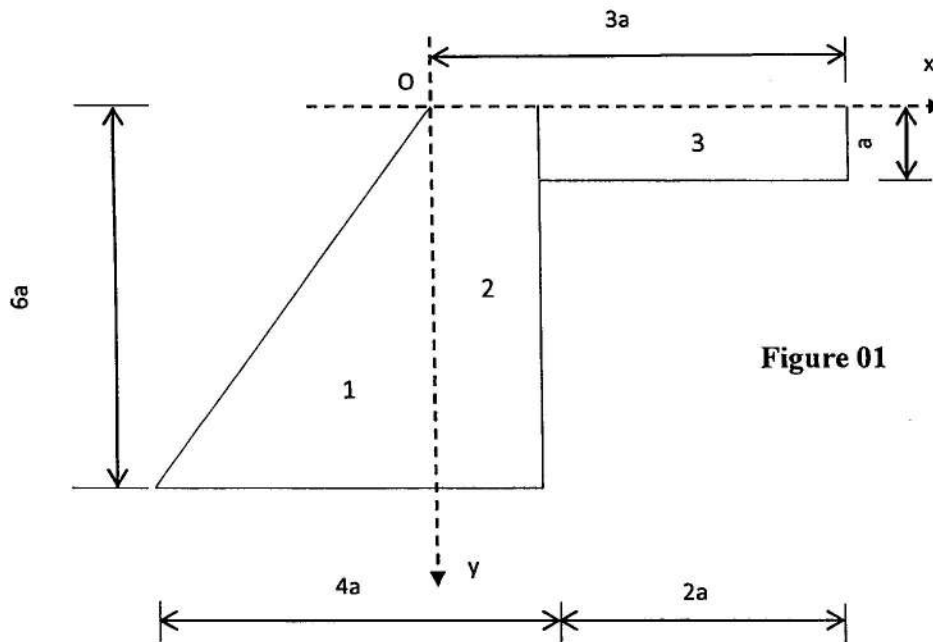


Figure 01

Solution :

1/ Coordonnées du C.D.G dans le repère Oxy

$$\begin{array}{l} \text{Section 1} \left\{ \begin{array}{l} x_{C1} = -a \\ y_{C1} = 4a \\ S_1 = 9a^2 \end{array} \right. \quad \text{Section 2} \left\{ \begin{array}{l} x_{C2} = a/2 \\ y_{C2} = 3a \\ S_2 = 6a^2 \end{array} \right. \quad \text{Section 3} \left\{ \begin{array}{l} x_{C3} = 2a \\ y_{C3} = a/2 \\ S_3 = 2a^2 \end{array} \right. \end{array}$$

$$X_C = \frac{(-a) * 9 a^2 + (a/2) * 6 a^2 + (2a) * 2 a^2}{9 a^2 + 6 a^2 + 2 a^2} = -0.117 a$$

$$Y_C = \frac{(4a) * 9 a^2 + (3a) * 6 a^2 + (a/2) * 2 a^2}{9 a^2 + 6 a^2 + 2 a^2} = 3.235 a$$

2/ Moments et Produit d'Inertie Centraux

$$\left. \begin{aligned}
 I_{XC}(S_T) &= I_{XC}(S_1) + I_{XC}(S_2) + I_{XC}(S_3) \\
 I_{XC}(S_1) &= \frac{3a^*(6a)^3}{36} + (4a - 3,235a)^2 * 9 a^2 = 23,267 a^4 \\
 I_{XC}(S_2) &= \frac{a^*(6a)^3}{12} + (3,235a - 3a)^2 * 6 a^2 = 18,331 a^4 \\
 I_{XC}(S_3) &= \frac{2a^*(a)^3}{12} + (3,235a - 0,5a)^2 * 2 a^2 = 15,127 a^4
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{I_{XC}(S_T) = 56,725 a^4}$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_{YC}(S_T) &= I_{YC}(S_1) + I_{YC}(S_2) + I_{YC}(S_3) \\
 I_{YC}(S_1) &= \frac{6a^*(3a)^3}{36} + (a - 0,117a)^2 * 9 a^2 = 11,517 a^4 \\
 I_{YC}(S_2) &= \frac{6a^*(a)^3}{12} + (0,5a + 0,117a)^2 * 6 a^2 = 2,784 a^4 \\
 I_{YC}(S_3) &= \frac{a^*(2a)^3}{12} + (2a + 0,117a)^2 * 2 a^2 = 9,630 a^4
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{I_{YC}(S_T) = 23,931 a^4}$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_{XCYC}(S_T) &= I_{XCYC}(S_1) + I_{XCYC}(S_2) + I_{XCYC}(S_3) \\
 I_{XCYC}(S_1) &= -\frac{(6a)^2 * (3a)^2}{72} + [(a - 0,117a) * (-4a - 3,235a)] * 9 a^2 = -10,579 a^4 \\
 I_{XCYC}(S_2) &= 0 + [(3,235a - 3a) * (-0,5a + 0,117a)] * 6 a^2 = -0,870 a^4 \\
 I_{XCYC}(S_3) &= 0 + [(3,235a - 0,5a) * (-2a + 0,117a)] * 2 a^2 = -11,580 a^4
 \end{aligned} \right\}$$

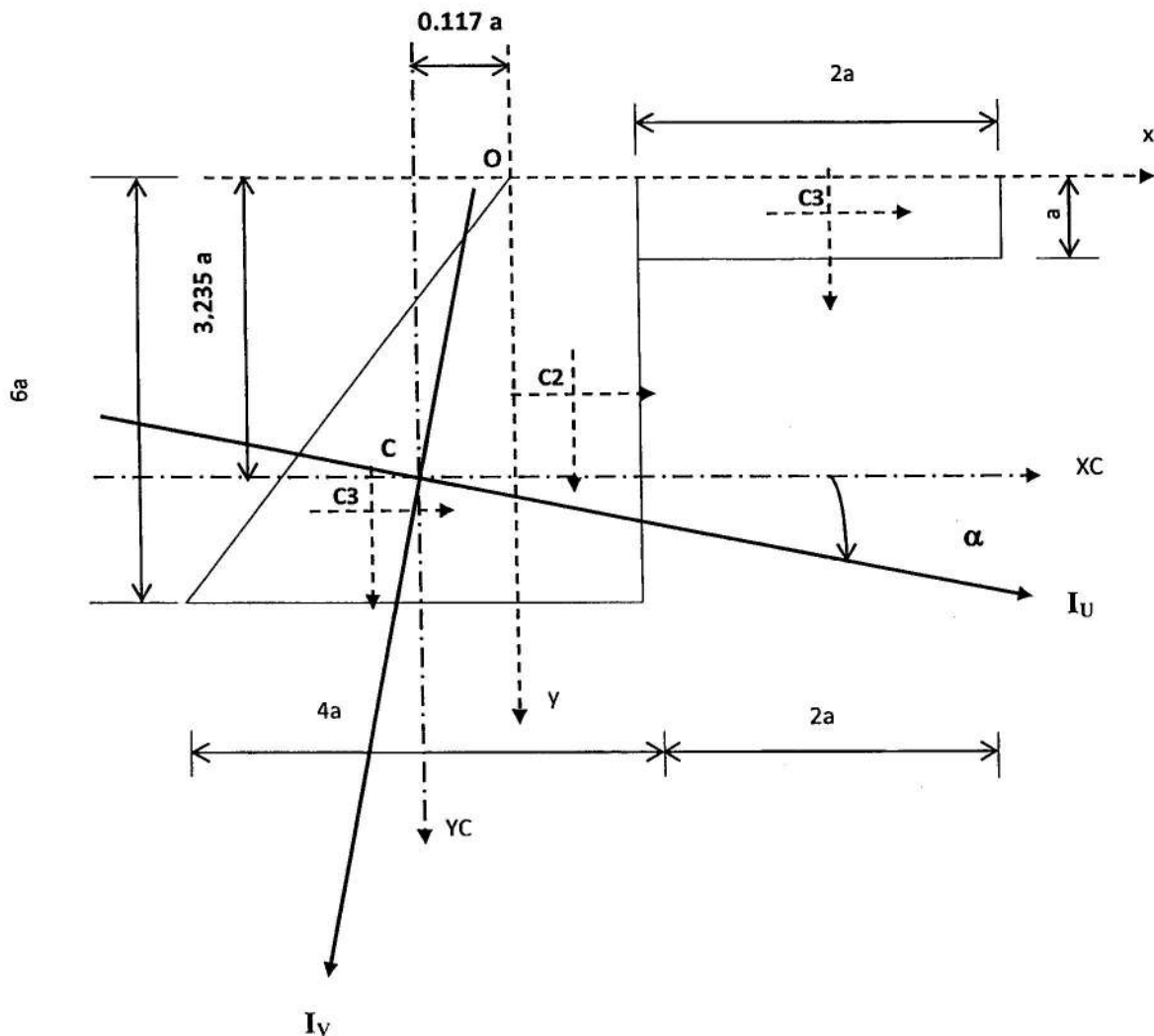
$$\mathbf{I_{XCYC}(S_T) = - 23,029 a^4}$$

3/ Directions Centrales Principales et Moments Correspondants

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 * (-23,029)}{23,931 a^4 - 56,725 a^4} = 1,404 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 27,27^\circ$$

$$I_{\max} = I_U = \left[\frac{56,725 a^4 + 23,931 a^4}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} \sqrt{(56,725 a^4 - 23,931 a^4)^2 + 4 * (23,029 a^4)^2} \right] = 68,598 a^4$$

$$I_{\min} = I_V = \left[\frac{56,725 a^4 + 23,931 a^4}{2} \right] - \left[\frac{1}{2} \sqrt{(56,725 a^4 - 23,931 a^4)^2 + 4 * (23,029 a^4)^2} \right] = 12,058 a^4$$



ANALYSE DE CONTRAINTES ET DE DÉFORMATIONS

IV.1 Introduction

La résistance et les propriétés élastiques des matériaux sont généralement déterminées par de simples essais de traction et de compression. Comment utiliser les résultats de ces tests lorsque nous savons que la contrainte, dans un problème pratique donné, est composé d'une contrainte de traction dans une direction, d'une contrainte de compression dans une autre direction et d'une contrainte de cisaillement dans une troisième direction ? Il est clair que nous ne pouvons pas tester un matériau sous toutes les combinaisons possibles de contraintes pour déterminer sa résistance. Il est en effet essentiel d'étudier les contraintes et les déformations en termes plus généraux ; l'analyse qui suit doit être considérée comme ayant une incidence directe et importante sur les problèmes de résistance pratique, et n'est pas simplement une démonstration mathématique.

IV.2 Contrainte sur plans inclinés de traction et compression

On considère une barre uniforme, de section rectangulaire S , et un repère orthonormé $oxyz$ figure 4.1. Une contrainte de traction uniforme σ_z est appliquée sur la barre suivant la direction z , considérant une section transversale inclinée de la barre d'un angle θ par rapport au plan- xy , la contrainte agissant sur ce plan incliné est σ_z . La force résultante qui agit parallèlement à oz , au niveau de la section transversale inclinée de la barre, est :

$$P = S \times \sigma_z$$

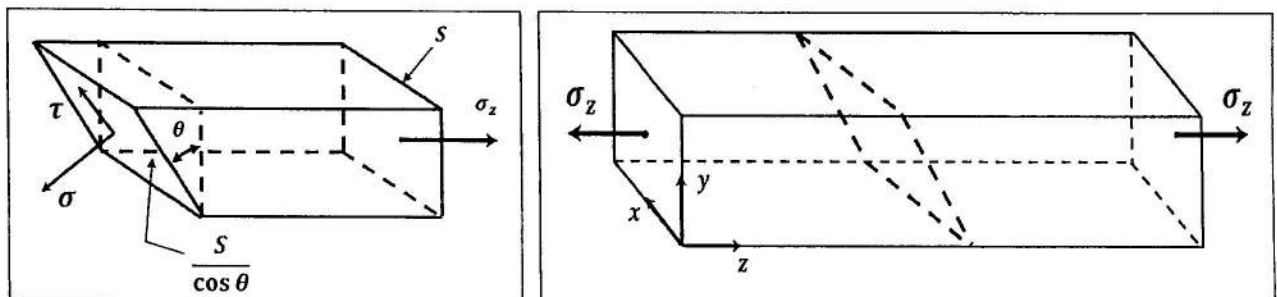


Figure 4.1 : Contraintes dans une éprouvette sur un plan incliné

Pour assurer l'équilibre de la barre, la force résultante P parallèle à l'axe Oz agissant sur la section inclinée est aussi $P = S \times \sigma_z$. Sur cette section inclinée la force résultante P peut être décomposée en deux composantes, une composante perpendiculaire ou normale (P_n) et l'autre tangentielle (P_t) qui agit parallèle au plan xy . Ces deux composantes ont les valeurs suivantes :

$$P_n = S \times \sigma_z \times \cos \theta \quad \text{et} \quad P_t = S \times \sigma_z \times \sin \theta$$

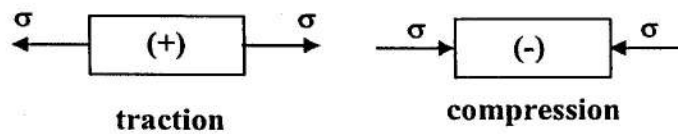
La section inclinée est : $S_\theta = \frac{S}{\cos \theta}$

D'où les contraintes normale et tangentielle par rapport à la section inclinée sont :

$$\sigma = \frac{P_n}{S_\theta} = \frac{S \times \sigma_z \times \cos \theta}{\frac{S}{\cos \theta}} = \sigma_z \times \cos^2 \theta \quad (4.1)$$

$$\tau = \frac{P_t}{S_\theta} = \frac{S \times \sigma_z \times \sin \theta}{\frac{S}{\cos \theta}} = \sigma_z \times \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sigma_z \times \sin 2\theta \quad (4.2)$$

Convention de signe :



Application

Une barre de section 2,25 cm sur 2,25 cm est soumise à une force de traction axiale de 20 kN. Calculer la contrainte normale et la contrainte de cisaillement sur un plan dont la normale fait un angle de 60° avec l'axe de la barre.

Solution

On a $\theta = 60^\circ$, $P = 20 \text{ kN}$ et $S = 0,507 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Donc :

$$\sigma_z = \frac{20 \times 10^3}{0,507 \times 10^{-3}} = 39,4 \text{ MN/mm}^2$$

La contrainte normale sur le plan incliné est :

$$\sigma = \sigma_z \times \sin^2 60^\circ = (39,4 \times 10^6) \times \frac{1}{4} = 9,85 \text{ MN/m}^2$$

La contrainte tangentielle sur le plan incliné est :

$$\tau = \frac{1}{2} \times \sigma_z \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times (39,4 \times 10^6) \times \sqrt{\frac{3}{2}} = 17,05 \text{ MN/mm}^2$$

IV.3 Ligne de déformation en acier doux (lignes de Lüder)

Un échantillon d'acier doux bien poli soumis à une contrainte de traction longitudinale, lorsque l'échantillon cède, on observe des lignes fines qui apparaissent sur la surface polie ; ces lignes se croisent à peu près perpendiculairement entre eux et à 45° environ par rapport à l'axe longitudinal du barreau ; ces lignes ont été observées pour la première fois par Luder en 1854. Les lignes de Luder sur un échantillon de traction en acier doux sont montrées sur la figure 4.2. Ces lignes montrent que le matériau est en état de glissement sous l'effet des contraintes de cisaillement.

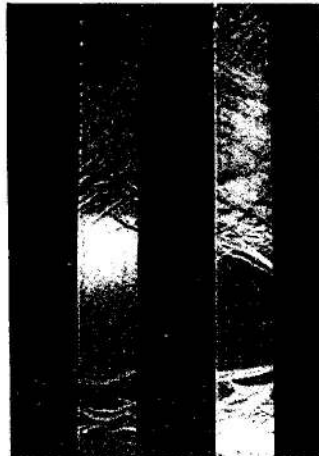


Figure 4.2. Lignes de Lüder observées sur une barre d'acier sous contrainte de traction.

IV.4 Rupture des matériaux sous contrainte de compression

Les contraintes de cisaillement sont également développées dans une barre sous contrainte uniforme de compression. La rupture de certains matériaux en compression est due au développement de contraintes de cisaillement critiques sur des plans inclinés par rapport au sens de la compression. La figure 4.3 illustre deux défaillances de bois comprimés ; la défaillance est due principalement à la rupture due aux contraintes de cisaillement sur des plans inclinés par rapport au sens de la compression.

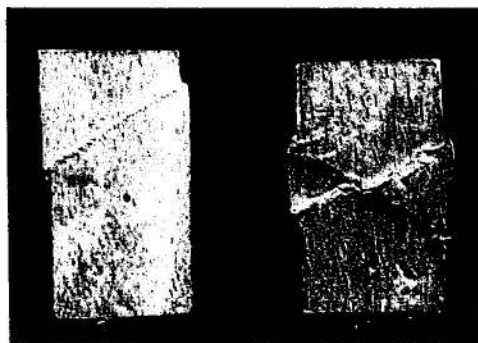


Figure 4.3. Rupture d'un échantillon de bois comprimés.

IV.5 État de Contrainte

Découpons au voisinage du point O, du corps sollicité, un parallélépipède rectangle infiniment petit de côtés dx , dy et dz . Sur chaque face de ce parallélépipède agissent une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. La contrainte normale est positive quand elle agit sur une facette une contrainte de traction, elle est négative quand elle agit sur une facette une contrainte de compression figure 4. Une contrainte tangentielle est positive quand elle agit sur une facette dans le sens positif de l'axe parallèle à la facette ou sur une facette négative dans le sens négatif de l'axe parallèle à cette facette figure 4.4.

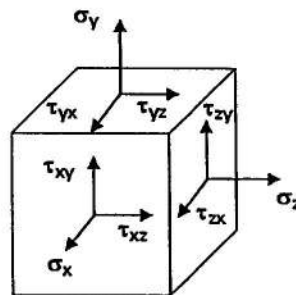


Figure 4.4. Toutes les contraintes représentées sur l'élément sont positives

IV.6 Cas général des Contraintes à deux dimensions

Un système de contraintes bidimensionnel est un système dans lequel les contraintes en un point quelconque d'un corps agissent dans le même plan. Considérons un matériau en tôle mince de forme rectangulaire, $abcd$, dont les deux faces sont parallèles au plan xy , figure 4.5 (a). Un état de contrainte bidimensionnel est présent si les contraintes sur les quatre faces restantes dans le plan xy . En général, supposons que les forces agissant sur les faces soient P , Q , R , S , parallèle au plan xy . Chacune de ces forces peut être décomposée en composantes P_x , P_y etc., Figure 4.5 (b). Les composantes perpendiculaires génèrent des contraintes normales et des contraintes de cisaillement.

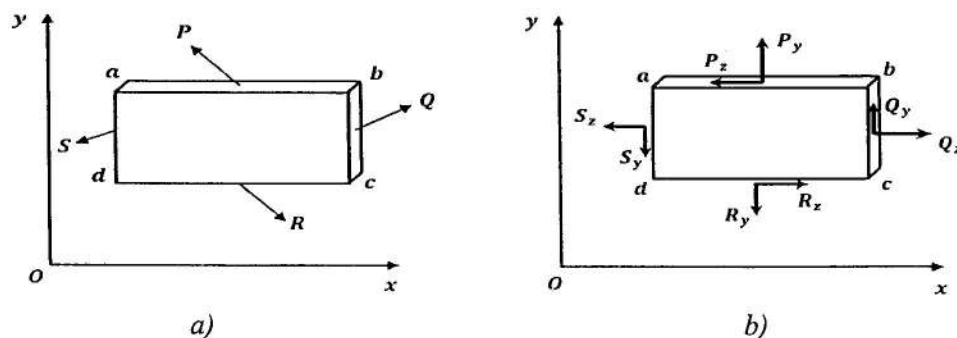


Figure 4.5 : a) Résultante des forces agissant sur les faces d'un bloc rectangulaire «bidimensionnel» ; b) Les composantes des forces résultantes

Le système de forces de la figure 4.5 (b) est remplacé par un système de contraintes d'état uniforme de contrainte bidimensionnelle figure 4.6 ; sur les deux faces parallèles à Ox sont des contraintes normale et tangentielle respectivement σ_z et τ_{zy} . L'équilibre du bloc dans les directions z et y est assuré ; pour l'équilibre de rotation du bloc dans le plan zy, il faut que :

$$[\tau_{zy} \times (a \times 1)] \times b = [\tau_{yz} \times (b \times 1)] \times a \Rightarrow (ab) \times \tau_{zy} = (ab) \times \tau_{yz} \Rightarrow \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

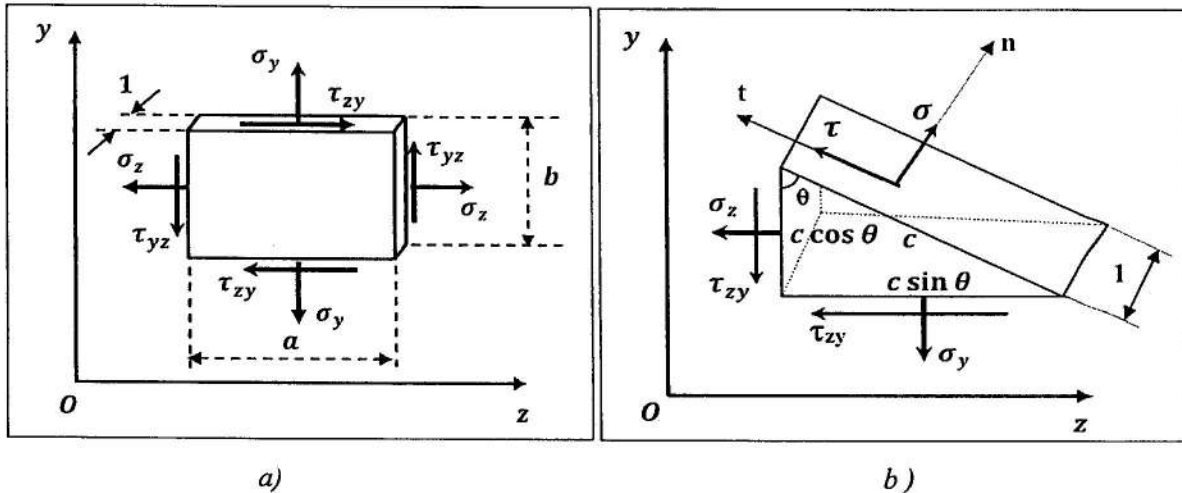


Figure 4.6 : a) Etat de contrainte bidimensionnelle ; b) Contraintes sur un plan incliné dans un système de contraintes bidimensionnel.

IV.6.1 Contrainte dans un plan incliné

Considérons les contraintes agissant sur un plan incliné du bloc rectangulaire uniformément sollicité de la figure 4.6 (a), le plan incliné fait un angle θ avec Oy , figure 4.6 (b). La longueur de l'hypoténuse est c et l'épaisseur du bloc est l'unité de longueur. Les valeurs de contrainte normale σ , et de contrainte de cisaillement, τ , sur le plan incliné sont trouvées en considérant l'équilibre de l'élément triangulaire. La contrainte normale agit le long de la normale au plan incliné. Résoudre les efforts sur les trois côtés du bloc parallèlement à :

Projection sur la normale :

$$\sigma \times (c \times 1) = \sigma_z \times (c \cos \theta \cos \theta) + \sigma_y \times (c \sin \theta \sin \theta) + \tau_{zy} \times (c \cos \theta \sin \theta) + \tau_{yz} \times (c \sin \theta \cos \theta)$$

D'où

$$\sigma = \sigma_z \times \cos^2 \theta + \sigma_y \times \sin^2 \theta + 2\tau_{zy} \times \sin \theta \cos \theta \quad (4.3)$$

Ou bien :

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (4.4)$$

Sur la tangente parallèle au plan incliné :

$$\tau \times (c \times 1) = -\sigma_z \times (c \cos \theta \sin \theta) + \sigma_y \times (c \sin \theta \cos \theta) + \tau_{zy} \times (c \cos \theta \cos \theta) - \tau_{zy} \times (c \sin \theta \sin \theta)$$

D'où :

$$\tau = -\sigma_z \times \cos \theta \sin \theta + \sigma_y \times \sin \theta \cos \theta + \tau_{zy} \times (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (4.5)$$

Ou bien :

$$\tau = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{zy} \cos 2\theta \quad (4.6)$$

Pour un plan défini par un angle $\theta + \frac{\pi}{2}$, on aura :

$$\sigma_{\pi/2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \times \cos 2\theta - \tau_{zy} \times \sin 2\theta \quad (4.7)$$

$$\tau_{\pi/2} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \times \sin 2\theta - \tau_{zy} \times \cos 2\theta = -\tau \quad (4.8)$$

IV.6.2 Contraintes Principales

a) Direction principale

$$\tau = 0 \rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} \Rightarrow 2\theta = \tan^{-1} \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}$$

Ou bien

$$2\theta = \tan^{-1} \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} + 180^\circ$$

D'où

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} \quad (4.9)$$

Ou bien

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} + 90^\circ$$

Ainsi, dans un système de contraintes bidimensionnel, il existe deux plans, séparés par un angle de 90° , sur lesquels la contrainte de cisaillement est nulle. Ces plans sont appelés plans principaux, et les valeurs correspondantes de σ sont appelées contraintes principales. La contrainte normale est un maximum quand :

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -(\sigma_z - \sigma_y) \times \sin 2\theta + 2\tau_{zy} \times \cos 2\theta = 0$$

D'où :

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}$$

C'est l'expression (4.9)

b) Valeur de la contrainte principale

Les contraintes principales peuvent être calculées directement sans calculer les directions principales. Nous avons défini précédemment un plan principal comme un plan sur lequel il n'existe aucune contrainte de cisaillement ; sur la figure 4.7, on suppose qu'aucune contrainte de cisaillement n'agit sur un plan qui fait un angle θ avec Oy.

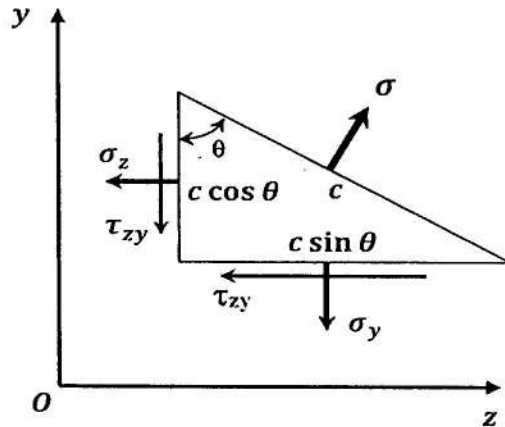


Figure 4.7 : Une contrainte principale agissant sur un plan incliné ;
Il n'y a pas de contrainte de cisaillement τ associée à une contrainte principale σ .

Pour l'équilibre du bloc triangulaire dans la direction z :

$$\sigma \times (c \cos \theta) - \sigma_z \times (c \cos \theta) = \tau_{zy} \times (c \sin \theta)$$

D'où :

$$\sigma - \sigma_z = \tau_{zy} \tan \theta \quad (4.10)$$

Pour l'équilibre du bloc triangulaire dans la direction y

$$\sigma \times (c \sin \theta) - \sigma_y \times (c \sin \theta) = \tau_{zy} \times (c \cos \theta)$$

D'où :

$$\sigma - \sigma_y = \tau_{zy} \cot \theta \quad (4.11)$$

En éliminant θ entre les équations (4.10) et (4.11) ; en multipliant ces équations ensemble, nous obtenons :

$$(\sigma - \sigma_z) \times (\sigma - \sigma_y) = \tau_{zy}^2$$

Cette équation est quadratique en σ la solution est :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \times (\sigma_z + \sigma_y) + \frac{1}{2} \times \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} : \text{Contrainte principale maximale} \quad (4.12a)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \times (\sigma_z + \sigma_y) - \frac{1}{2} \times \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} : \text{Contrainte principale minimale} \quad (4.12b)$$

Ces contraintes sont perpendiculaires l'une par rapport à l'autre.

IV.6.3 Contrainte de cisaillement maximale

La contrainte de cisaillement est donnée par l'équation (4.6) ; la contrainte tangentielle τ atteint une valeur maximale par rapport à θ lorsque :

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = -(\sigma_z - \sigma_y) \times \cos 2\theta - 2\tau_{zy} \times \sin 2\theta = 0$$

D'où :

$$\cot 2\theta = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}$$

Les plans de contrainte de cisaillement maximale sont inclinés à 45° par rapport aux plans principaux.

En substituant cette valeur de $\cot 2\theta$ dans l'équation (3.6), la valeur numérique maximale de la contrainte tangentielle τ est :

$$\tau_{max} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} \times (\sigma_z - \sigma_y)\right]^2 + [\tau_{zy}]^2} \quad (4.13)$$

De l'expression (12) :

$$\sqrt{\left[\frac{1}{2} \times (\sigma_z - \sigma_y)\right]^2 + [\tau_{zy}]^2} = \sigma_1 - \frac{1}{2} \times (\sigma_z + \sigma_y) = \frac{1}{2} \times (\sigma_z + \sigma_y) - \sigma_2$$

D'où :

$$2 \times \sqrt{\left[\frac{1}{2} \times (\sigma_z - \sigma_y)\right]^2 + [\tau_{zy}]^2} = \sigma_1 - \sigma_2$$

Il vient :

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \times (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (4.14)$$

Application

En un point d'un matériau, le système de contrainte bidimensionnel est défini par :

$$\sigma_z = 60 \text{ MN/m}^2 ; \text{ traction}$$

$$\sigma_y = 45 \text{ MN/m}^2 ; \text{ compression}$$

$$\sigma_{zy} = 37,5 \text{ MN/m}^2 ; \text{ contrainte de cisaillement}$$

Évaluer les valeurs et les orientations des contraintes principales, contrainte de cisaillement maximale.

Solution

On a :

$$\frac{1}{2} \times (\sigma_z + \sigma_y) = \frac{1}{2} \times (60 - 45) = 7,5 \text{ MN/m}^2$$

$$\frac{1}{2} \times (\sigma_z - \sigma_y) = \frac{1}{2} \times (60 + 45) = 52,5 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_1 = 7,5 + \sqrt{(52,5)^2 + (37,5)^2} = 7,5 + 64,4 = 71,9 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_2 = 7,5 - \sqrt{(52,5)^2 + (37,5)^2} = 7,5 - 64,4 = -56,9 \text{ MN/m}^2$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} = \frac{37,5}{52,5} = 0,714 \Rightarrow 2\theta = \tan^{-1}(0,714) = 35,5^\circ \text{ ou } 2\theta = 215,5^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 17,8^\circ \text{ ou } \theta_1 = 107,8^\circ$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \times (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} \times (71,9 + 56,9) = 64,4 \text{ MN/m}^2$$

Cette contrainte maximale de cisaillement se produit sur des plans à 45° par rapport aux contraintes principales.

IV.7 Cercle de contrainte de Mohr pour un système plan de contraintes (cas général)

a) Construction de cercle de Mohr

Une interprétation géométrique des équations (4.4) et (4.6) conduit à une méthode simple d'analyse des contraintes appelée cercle des contraintes ou cercle de Mohr. Nous avons déjà trouvé que :

$$\sigma = \frac{1}{2} \times (\sigma_z + \sigma_y) + \frac{1}{2} \times (\sigma_z - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{zy} \sin 2\theta$$

$$\tau = -\frac{1}{2} \times (\sigma_z - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{zy} \cos 2\theta$$

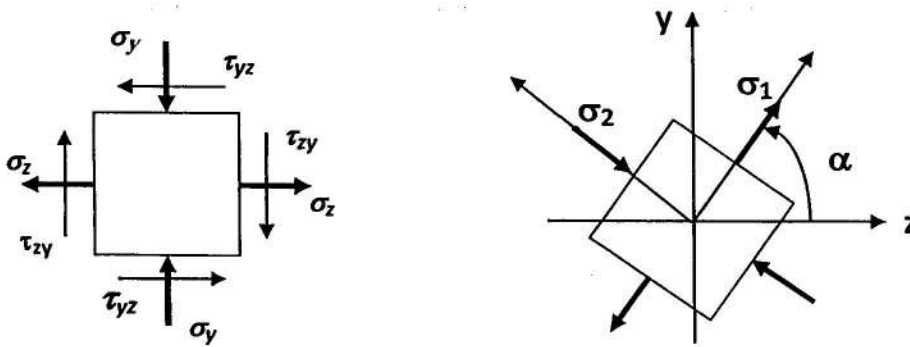


Figure 4.8 : Etat de contrainte (cas général)

Le principe de la représentation graphique des contraintes connue sous le nom de **cercle de Mohr** est similaire à celui qu'on a décrit dans le chapitre 2 concernant les propriétés géométriques des surfaces planes. L'axe des abscisses représente les contraintes normales et les contraintes tangentiellles sont projetées sur un axe perpendiculaire.

Le cercle de Mohr peut être positionné sur le plan (σ, τ) en connaissant l'état de contrainte en un point défini par $\sigma_z, \sigma_y, \tau_{zy}$ et τ_{yz} figure. 8, et de l'utiliser pour déterminer graphiquement les contraintes principales $\sigma_{max}, \sigma_{min}$. Dans ce cas, on fixe deux points A (σ_z, τ_{zy}) et B (σ_y, τ_{yz}) sur le plan (σ, τ) , on considère le segment AB qui coupe l'axe des abscisses σ en C comme le diamètre du cercle de Mohr ayant son centre en C. Les points d'intersection de la circonférence avec l'axe des abscisses σ déterminant les contraintes principales σ_{max} et σ_{min} . L'angle entre AC et l'axe σ est égale à 2θ (figure 4.9).

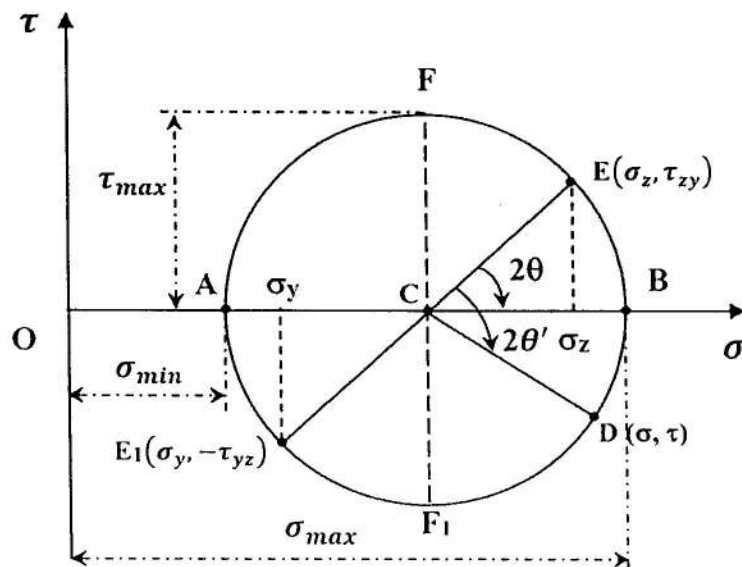


Figure 4.9 : Cercle de Mohr

b) Détermination des contraintes dans une direction z_1 inclinée de θ

Les contraintes σ et τ sur un plan à un angle de θ' à Oz sont trouvées en faisant tourner un rayon de cercle à un angle de $2\theta'$, figure 9 ; l'angle $2\theta'$ est mesuré dans le sens horaire à partir de CE vers CD.

- Le diamètre EE_1 sert de référence angulaire ($\theta = 0$).

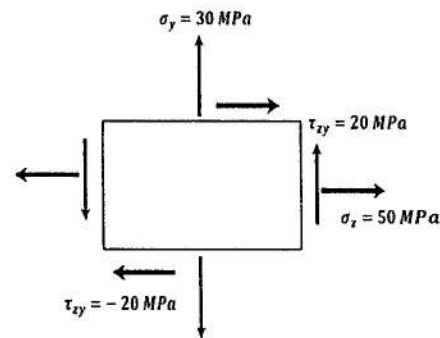
Application

Nous avons un état de contrainte définie par :

$$\sigma_z = 50 \text{ MPa}, \sigma_y = 30 \text{ MPa} \text{ et } \tau_{zy} = 20 \text{ MPa}$$

Calculer graphiquement les contraintes normales

principales et les contraintes tangentielles



Solution

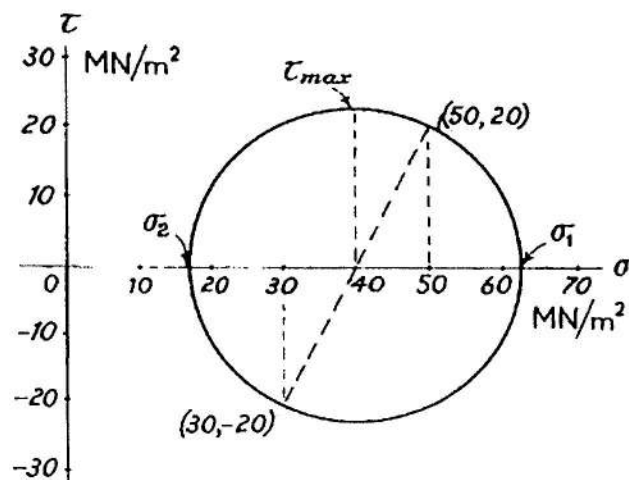
Sur le diagramme $\sigma - \tau$, on trace un cercle et on considère le diamètre la droite qui relie les deux points $(50, 20)$ et $(30, -20)$. Les intersections du cercle sur l'axe σ sont :

$\sigma_1 = 62,4 \text{ MN/m}^2$ et $\sigma_2 = 17,6 \text{ MN/m}^2$ qui sont les contraintes principales.

La contrainte tangentielle maximale est le rayon du cercle :

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \times (44,8 \times 10^6) = 22,4 \text{ MN/m}^2$$

C'est la contrainte tangentielle maximale dans le plan des contraintes appliquées.



Remarque : le cercle de Mohr représente l'état des contraintes en un point. Une fois établi, il permet de déterminer les contraintes dans n'importe quelle direction (θ) choisie et en particulier les contraintes principales et les contraintes de cisaillement maximale et minimale.

Pour $\theta = 0$, les coordonnées sont (σ_z, τ_{zy}) .

Pour $\theta = 90^\circ$, les coordonnées sont (σ_y, τ_{yz}) .

IV.8 Déformation dans le cas de traction ou compression suivant deux directions perpendiculaires.

L'expérience a montré que l'allongement axial d'une barre en traction est toujours accompagné d'une contraction transversale de la barre.

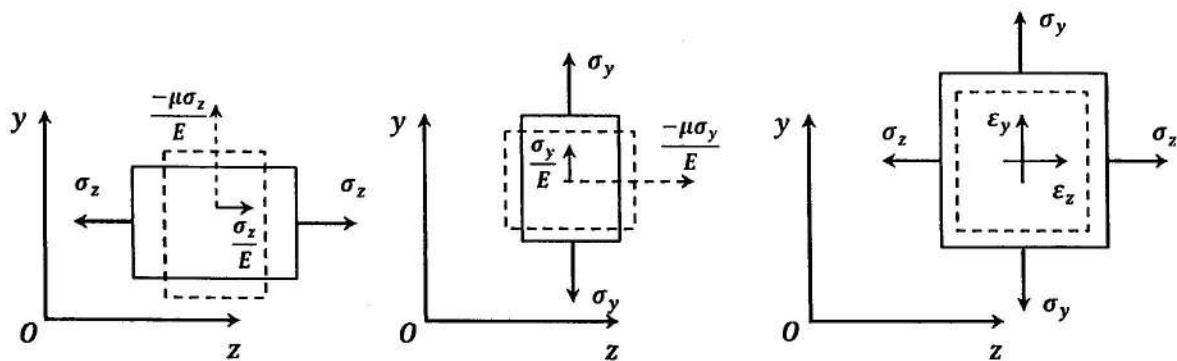
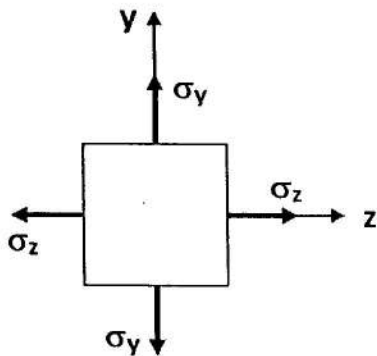


Figure 4.10 : Déformations dans un système de contrainte linéaire-élastique bidimensionnel.

Nous remarquons que les déformations peuvent être considérées composées de deux composantes correspondant à une tension uni-axiale dans les directions z et y .



Suivant les directions z et y , on a les allongements unitaires :

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu \times \frac{\sigma_y}{E} \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \times \frac{\sigma_z}{E} \quad (4.15)$$

Suivant la direction de x, la contraction du parallélépipède est :

$$\varepsilon_x = -\mu \times \frac{\sigma_z}{E} - \mu \times \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\mu}{E} \times (\sigma_z + \sigma_y)$$

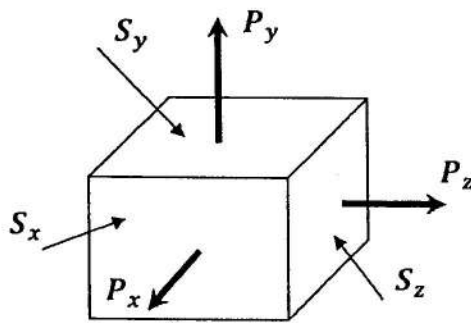
Cas particulier

Si : $\sigma_z = \sigma_y = \sigma$, on aura : $\varepsilon_z = \varepsilon_y = \frac{\sigma}{E} \times (1 - \mu)$

Les équations (4 et 5) nous donnent les contraintes σ_z et σ_y en fonction des déformations unitaires ε_z et ε_y :

$$\sigma_z = \frac{(\varepsilon_z + \mu \times \varepsilon_y) \times E}{1 - \mu^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{(\varepsilon_y + \mu \times \varepsilon_z) \times E}{1 - \mu^2}$$

IV.9 Traction ou Compression suivant trois directions perpendiculaires (Loi de Hooke généralisée)



$$\sigma_z = \frac{P_z}{S_z} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{P_y}{S_y} \quad ; \quad \sigma_x = \frac{P_x}{S_x}$$

Les équations des allongements unitaires (déformations) :

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E} \times (\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} \times (\sigma_z + \sigma_x) \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} \times (\sigma_z + \sigma_y) \quad (4.18)$$

Le volume de la barre augmente dans le rapport :

$$(1 + \varepsilon_z) \times (1 + \varepsilon_y) \times (1 + \varepsilon_x) / 1$$

En négligeant, les infiniment petits d'ordre supérieure, on aura :

$$1 + \varepsilon_z + \varepsilon_y + \varepsilon_x / 1$$

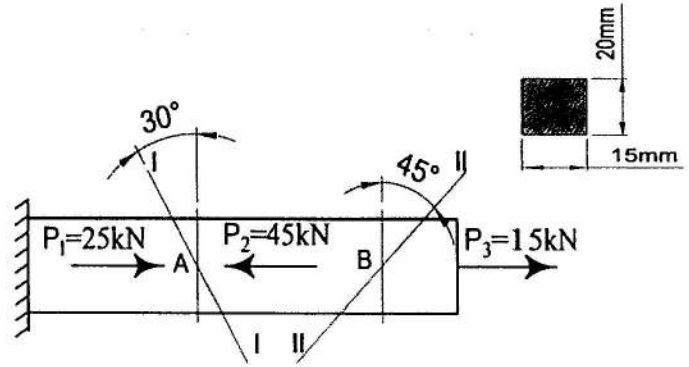
$\Delta = \varepsilon_z + \varepsilon_y + \varepsilon_x$, constitue la dilatation cubique.

Ajoutons membre à membre les trois équations (3.16, 3.17 et 3.18), on aura :

$$\Delta = \varepsilon_z + \varepsilon_y + \varepsilon_x = \frac{1 - 2\mu}{E} \times (\sigma_z + \sigma_y + \sigma_x)$$

Application :

Une barre de section rectangulaire est soumise à l'action de deux forces $P_1 = 25 \text{ kN}$, $P_2 = 45 \text{ kN}$ et $P_3 = 15 \text{ kN}$. Déterminer les contraintes normales, tangentielles et totales au point « A » de la section I-I et au point « B » de la section II-II. La section est en cm^2 .



Solution :

- Calcul des contraintes normales et tangentielle

Au point A :

Tout d'abord, on calcul l'effort normal au point A

Par la méthode des sections :

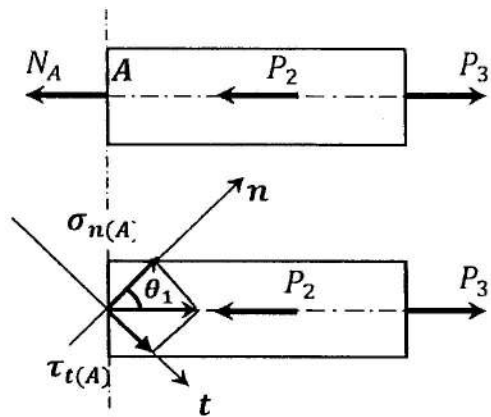
$$N_A = P_3 - P_2 = -30 \text{ kN} , \text{ effort normal de compression.}$$

$$\sigma_{n(A)} = \sigma_z \times \cos^2(\theta_1) = \frac{N_A}{S} \times \cos^2(30) = \frac{-30 \times 10^3}{15 \times 20 \times 10^{-6}} \times \cos^2(30)$$

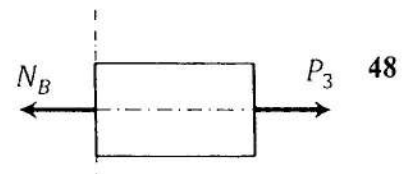
$$\sigma_{n(A)} = -75 \text{ MPa (Compression)}$$

$$\tau_{t(A)} = \frac{N_A}{2 \times S} \times \sin(2\theta) = \frac{-30 \times 10^3}{2 \times 15 \times 20 \times 10^{-6}} \times \sin(2 \times 30) = -43,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{totale(A)} = \sqrt{\sigma_{n(A)}^2 + \tau_{t(A)}^2} = \sqrt{(-75)^2 + (-43,3)^2} = 86,6 \text{ MPa}$$



- Calcul des contraintes au point « B »



Au point B :

On calcul l'effort normal au niveau du point B

$N_B = P_3 = 15 \text{ kN}$, effort normal de traction.

$$\sigma_{n(B)} = \sigma_z \times \cos^2(\theta_2) = \frac{N_B}{S} \times \cos^2(45)$$

$$\sigma_{n(B)} = \frac{15 \times 10^3}{15 \times 20 \times 10^{-6}} \times \cos^2(45) = 25 \text{ MPa}$$

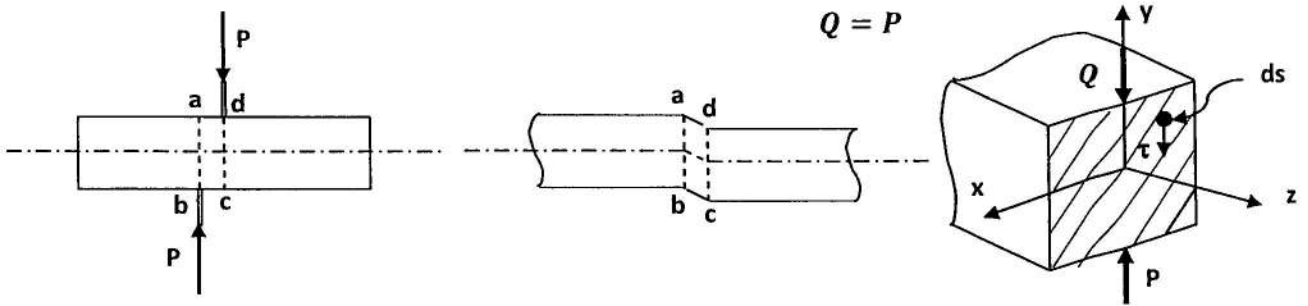
$$\tau_{t(B)} = \frac{\sigma_z}{2} \times \sin(2\theta) = \frac{15 \times 10^3}{2 \times 15 \times 20 \times 10^{-6}} \times \sin(90) = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{totale(B)} = \sqrt{\sigma_{n(B)}^2 + \tau_{t(B)}^2} = \sqrt{(25)^2 + (25)^2} = 35,35 \text{ MPa}$$

CISAILLEMENT

V.1 Introduction

Cette déformation est produite par l'action de forces normales aux fibres longitudinales (ou efforts tranchants). Dans ce cas : $N = 0$, $M_t = 0$, $M_f = 0$ ($M_x = 0$ et $M_y = 0$), $Q_x \neq 0$ (ou $M_y \neq 0$).



V.2 Contrainte au Cisaillement pur

$$Q = \int_S \tau \cdot ds \quad \text{avec} \quad \tau : \text{contrainte tangentielle.}$$

Si $\tau = \text{constante}$ à travers la section, on peut écrire : $\tau = \frac{Q}{S}$ ou $\tau = \frac{P}{S}$

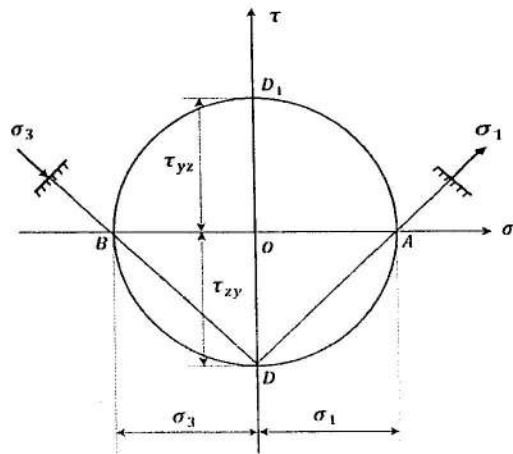
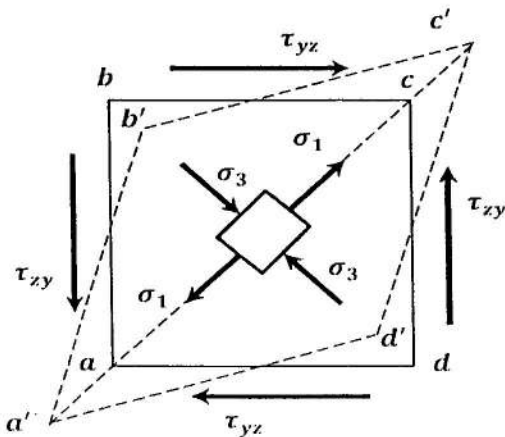
et la condition de résistance sera : $\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{S} \leq [\tau]$

Cette condition permet le calcul des boulons, rivets, soudures, clavettes, etc.....

V.3 Déformation au cisaillement pur

Considérons un élément en état de cisaillement pur. Dans ce cas :

$$\sigma_z = \sigma_y = 0; \quad \tau_{zy} = -\tau; \quad \tau_{yz} = \tau$$



D'après le cercle de Mohr on a : $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$; $\sigma_2 = 0$

Les plans principaux sont inclinés par rapport aux faces de l'élément d'un angle de 45° .

Sous l'action des contraintes tangentielles, l'élément $abcd$ de forme carrée, de côté a se transforme en losange $a'b'c'd'$.

Si l'élément est encastré à l'un de ses côtés,

on peut écrire : $\tan \gamma = \frac{\Delta S}{a}$, l'angle étant faible,

on peut poser : $\tan \gamma \approx \gamma$, donc :

Le déplacement relatif sera :

$\gamma = \frac{\Delta S}{a}$ ou (cisaillement relatif).

ΔS : glissement ou cisaillement absolu.

Dans la zone de proportionnalité entre γ et τ ,

on a : $\gamma = \frac{\tau}{G}$ ou $\tau = \gamma \cdot G$

G : module d'élasticité en cisaillement [N/mm^2]

La diagonale $AC = l = a \times \sqrt{2}$ s'allonge de :

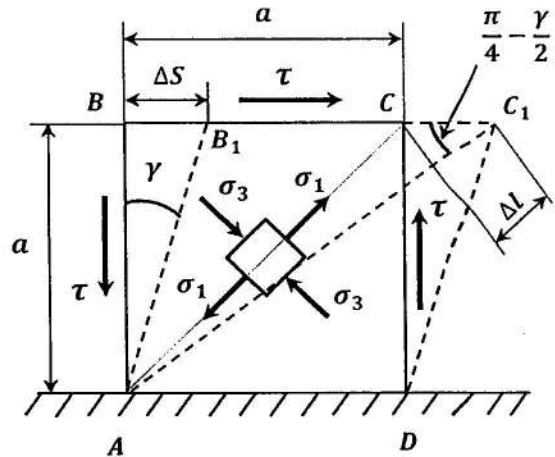
$$\Delta l = CC_1 \times \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \approx CC_1 \times \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}},$$

L'allongement relatif sera : $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S}{2a} = \frac{\gamma}{2}$; ou : $\varepsilon = \frac{\tau}{2G}$

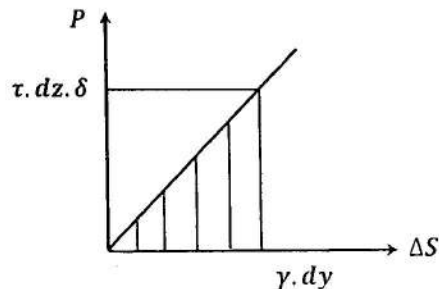
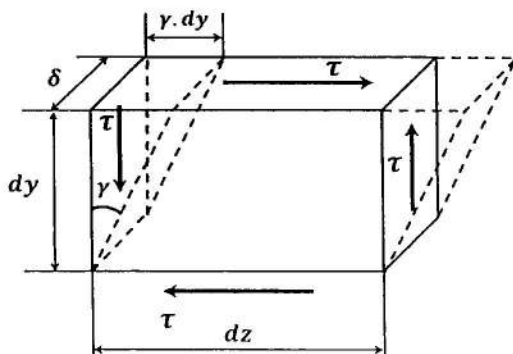
D'après la loi de Hooke généralisée au cisaillement pur on peut écrire :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1+\mu}{E} \times \tau \quad \text{d'où} \quad G = \frac{E}{2 \times (1+\mu)} ; \quad \text{pour l'acier doux : } G = 8 \times 10^4 \text{ MPa}$$

$\gamma = \frac{\Delta S}{a}$, le déplacement absolu sera : $\Delta S = \gamma \times a = \frac{\tau}{G} \times a = \frac{Q \times a}{G \times S}$; c'est la loi de Hooke pour le cisaillement.



V.4 Énergie potentielle de déformation en cisaillement



La force $\tau \times dz \times \delta$ effectue un travail sur le déplacement $\gamma \times dy$, qui se transforme en énergie potentielle : $dU = \frac{1}{2} \times \tau \times dz \times \delta \times \gamma \times dy$

L'énergie potentielle spécifique est donc : ($dv = dz \times dy \times \delta$) :

$$u = \frac{dU}{dv} = \frac{\tau \times dz \times \delta \times \gamma \times dy}{2 \times dz \times dy \times \delta} = \frac{\tau \times \gamma}{2}, \text{ on sait que : } \gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ alors : } u = \frac{\tau^2}{2 \times G}$$

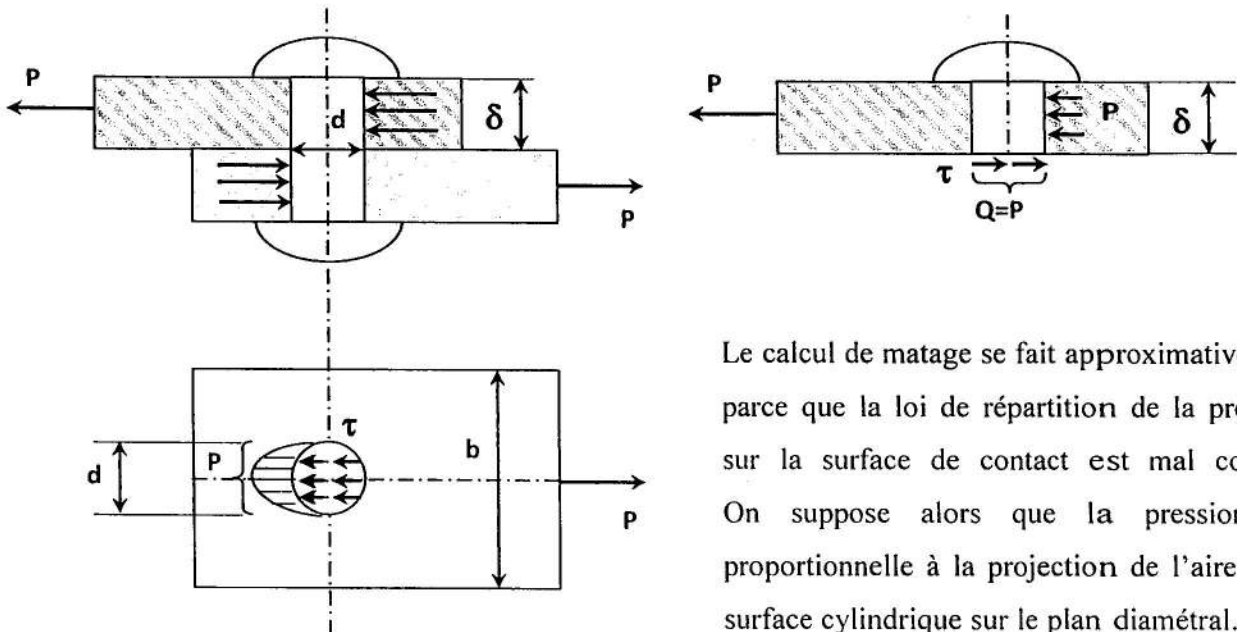
V.5 Calcul de Résistance en Cisaillement Pur

Le calcul de cisaillement pur consiste à déterminer la contrainte tangentielle τ_{max} dans l'élément le plus sollicité et comparer cette valeur avec la contrainte admissible. La condition de résistance au cisaillement s'écrit sous la forme :

$$\tau_{max} \leq [\tau]$$

V.5.1 Le matage

Le calcul des assemblages boulonnés ou rivets, tient compte également de la déformation plastique qui se produit sur la surface de contact.



Le calcul de matage se fait approximativement parce que la loi de répartition de la pression sur la surface de contact est mal connue. On suppose alors que la pression est proportionnelle à la projection de l'aire de la surface cylindrique sur le plan diamétral. Ainsi la contrainte de matage s'écrit :

$$\sigma_{mat} = \frac{P}{S_{mat}} = \frac{P}{\delta \times d}$$

et la condition de résistance au matage est donc : $\sigma_{mat} = \frac{P}{S_{mat}} \leq [\sigma]_{mat}$

avec : $S_{mat} = \delta \times d$; $[\sigma]_{mat} = (2 \text{ à } 2,5) \times [\sigma]_c$

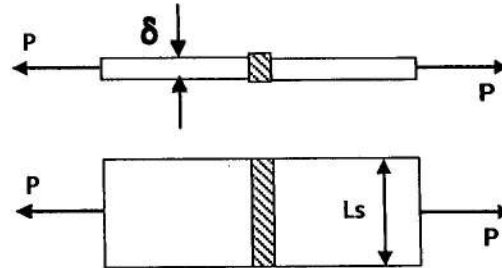
V.5.2 Calcul des joints soudés

a) Soudage bout à bout

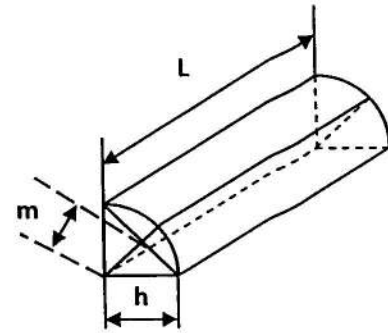
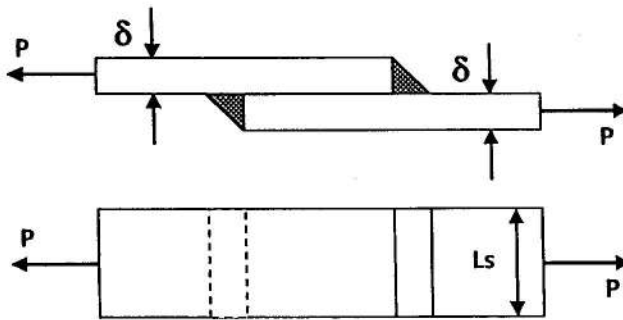
$$\sigma = \frac{P}{S} \leq [\sigma]_{elect}$$

$$S = L_s \times \delta$$

L_s : longueur de la soudure.



b) Soudure frontale :



$$m = h \times \cos 45^\circ = 0,7 \times h$$

$$\tau = \frac{P}{S_{cis}} \leq [\tau]_{elect} \quad ; \quad S_{cis} = 0,7 \times h \times l \times 2 = 1,4 \times h \times l$$

c) Soudure latérale :

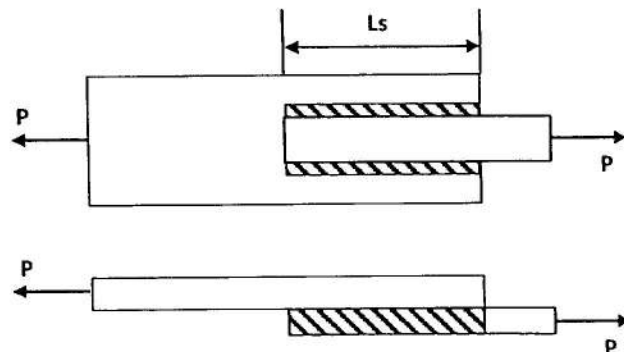
$$\tau = \frac{P}{S_{cis}} \leq [\tau]_{elect}$$

$$S_{cis} = 0,7 \times h \times l \times 2$$

$$\Rightarrow S_{cis} = 1,4 \times h \times l$$

$$L_s = L + 10 \text{ mm}$$

avec L : longueur calculée



Application :

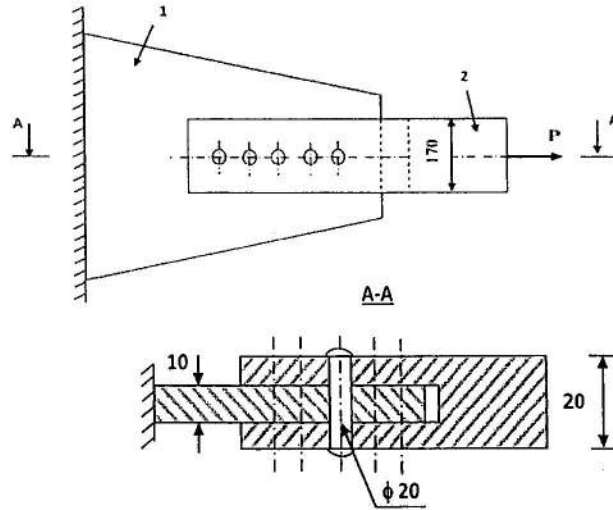
Les pièces 1 et 2 sont assemblées à l'aide de 5 rivets de 20 mm de diamètre.

Vérifier la résistance de l'assemblage ainsi que la résistance de la tige,

Sachant que $P = 230 \text{ kN}$,

$[\tau] = 80 \text{ MPa}$, $[\sigma_{mat}] = 240 \text{ MPa}$,

$[\sigma] = 160 \text{ MPa}$.



Solution :

1) Vérification de la résistance de l'assemblage

a) Vérification des rivets

Chaque rivet travaille au cisaillement par deux surfaces, la contrainte appliquée à chaque rivet :

$$\tau = \frac{P/5}{2 \times s} = \frac{P}{10 \times s} = \frac{P}{10 \times \frac{\pi \times d^2}{4}} = \frac{230 \times 10^3}{\frac{10 \times \pi \times 20^2}{4}} = 73,2 \text{ MPa} ; \tau = 73,2 \text{ MPa} < [\tau] = 80 \text{ MPa}$$

Les rivets résistent au cisaillement.

b) Vérification des pièces (1) et (2) au matage

$$\sigma_{mat} = \frac{P/5}{\delta \times d} = \frac{230 \times 10^3}{10 \times 20 \times 5} = 230 \text{ MPa} ; \sigma_{mat} = 230 \text{ MPa} < [\sigma_{mat}] = 240 \text{ MPa}$$

Ainsi, les pièces (1) et (2) résistent au matage.

2) Vérification de la pièce (1) à la traction

$$\sigma_{tr} = \frac{P}{(170 - 20) \times (20 - 10) \times 10^{-6}} = \frac{230 \times 10^3}{150 \times 10} = 153,3 \text{ MPa}$$

$\sigma_{tr} = 153,3 \text{ MPa} < [\sigma_{tr}] = 160 \text{ MPa}$; la résistance de la pièce (1) à la traction est vérifiée.

Calcul de la distance entre les rivets :

$$[\tau]_1 = (0,5 \div 0,7) \times [\sigma] \quad ; \quad \text{on prend :} \quad [\tau]_1 = 0,5 \times 160 = 80 \text{ MPa} \quad ;$$

$s = 1,5$ coefficient de sécurité.

$$\tau_1 = \frac{P/5}{2 \times b' \times \delta} \leq \frac{[\tau]_1}{s} \Rightarrow b' \geq \frac{P \times s}{10 \times [\tau]_1 \times \delta} = \frac{230 \times 10^3 \times 1,5}{10 \times 80 \times 10} \Rightarrow b' = 43,125 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow b = b' + d = 63,125 \text{ mm}$$

TORSION

VI.1 Introduction

On dit qu'une poutre travaille en torsion quand elle est soumise à l'action de moments qui tendent à faire tourner ses sections droites autour d'un axe longitudinal de la poutre. Cet axe longitudinal se nomme l'axe de torsion de la poutre.

La torsion engendrera essentiellement des contraintes tangentielles dues au glissement par rotation des différentes sections droites les unes sur les autres.

La torsion est une sollicitation, très souvent, rencontrée dans les arbres de transmission par exemple. Généralement, ces arbres sont des applications de section cylindrique à section circulaire, creuse ou pleine.

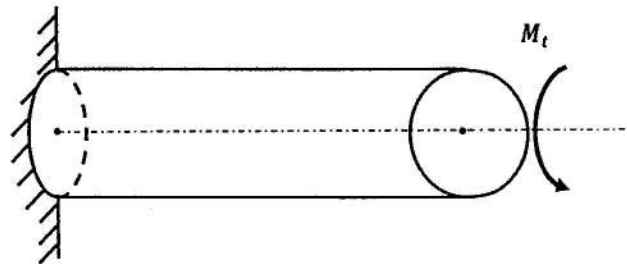
Une barre est dite en torsion, lorsqu'elle est soumise aux actions de couples dont les plans sont perpendiculaires à son axe.

Remarque :

Les barres soumises à la torsion s'appellent **arbres**.

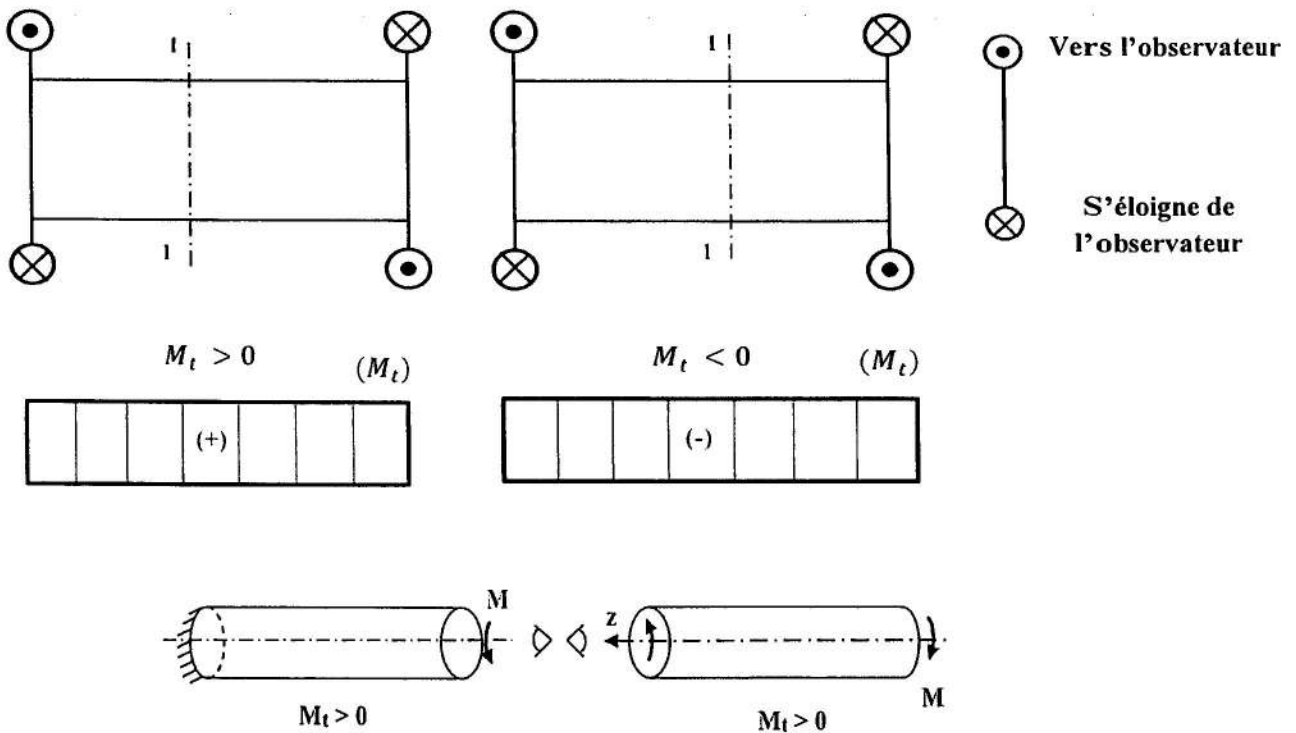
Dans ce cas : $N = 0$; $Q = 0$; $M_f = 0$; $M_t \neq 0$

Ex : - Arbres de transmission de mouvement circulaire, ressorts à boudin, etc.....

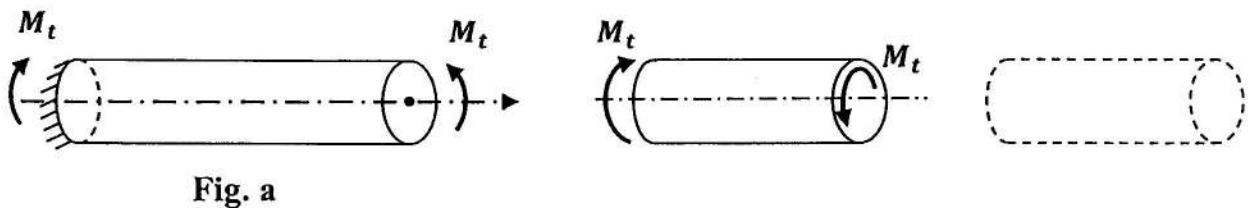


VI.2 Construction des diagrammes de M_t

- Le moment de torsion M_t se détermine par la méthode des sections.
- La formule générale donnant la valeur de M_t dans une section arbitraire de la barre est de la forme : $M_t = \sum M + \sum \int m \times dz$ avec m : analogie au moment repartie.
- L'intégrale s'étend à la longueur de chaque partie de la barre soumise à des couples réparti, la sommation des moments des parties se trouvant d'un côté de la section considérée.
- **Convention de signe :**
Le moment de torsion M_t dans la section 1-1 est positif lorsque le moment extérieur tourne la partie sectionnée dans le sens anti-horaire (trigonométrique) si on regarde cette partie du côté de la section.



VI.3 Angle de torsion et contrainte tangentielle des barres circulaires



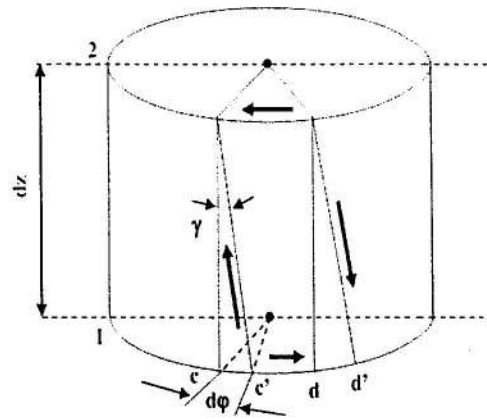
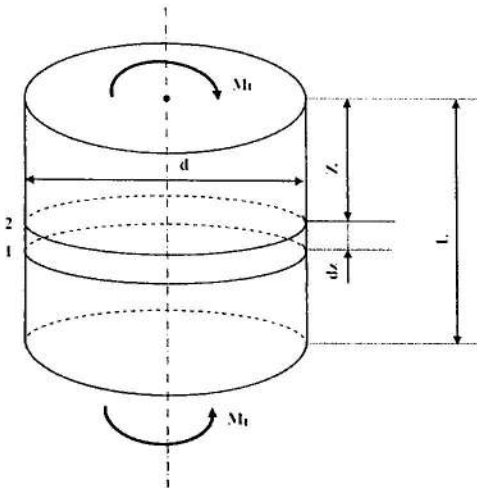
- L'arbre de la figure (a) sollicité par deux couples de torsion est en équilibre statique.
- Pour déterminer la distribution des contraintes tangentielles τ coupons l'arbre par un plan passant dans une direction perpendiculaire à l'axe longitudinal de la barre.
- Evidemment un couple M_t doit agir sur une section droite coupée par le plan, cela est vraie parce que tout l'arbre est en équilibre et donc toute portion de celui-ci l'est aussi.
- Le couple M_t agissant sur la section coupée représente l'effet de la portion de droite sur la portion de gauche.
- Ce couple M_t est évidemment une résultante des contraintes tangentielles τ distribuées sur la section droite.

- **Hypothèse fondamentale**

Une section plane de l'arbre normal à son axe avant chargement reste plane et normal à son axe après chargement (non valable pour les sections droites non circulaire).

Extrémité encastree

Chaque section subit une rotation φ à la section voisine.



Une génératrice **ac** sur la surface d'une section circulaire se déforme dans la configuration **ac'** après torsion l'angle, entre ces deux configurations, est désigné par γ appelé déformation de cisaillement unitaire (déviation unitaire).

D'après la géométrie de la figure, on a :

L'Angle de glissement de la surface cylindrique :

$$\tan \gamma = \frac{cc'}{ac}; \quad (cc' \text{ petit et assimilé à une droite}).$$

D'autre part : $\tan \gamma = \frac{cc'}{ac} = \frac{1}{2} d \times \frac{d\varphi}{dz}$; avec : $\tan \gamma \approx \gamma \Rightarrow cc' = \frac{d}{2} \times d\varphi$ et $ac = dz$

Ainsi, désignons $\frac{d\varphi}{dz} = \theta$; θ : angle de torsion relatif.

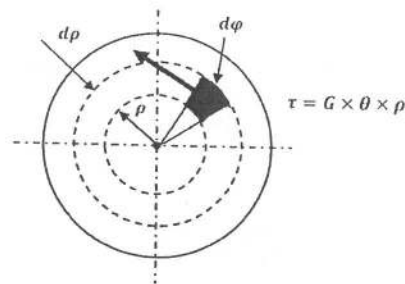
Ce qui nous donne : $\gamma = \frac{1}{2} \times d \times \theta$ [rad]

- Mais comme un diamètre de l'arbre avant chargement est supposé rester un diamètre après chargement, la déformation de cisaillement unitaire à une distance $\rho < \frac{d}{2}$ du centre de l'arbre peut être écrite comme égale à : $\gamma_\rho = \rho \times \theta$

A tout glissement correspond une contrainte $\tau \Rightarrow \tau = \gamma \times G = \frac{1}{2} \times G \times \theta \times d$

- Par conséquent, les déformations de cisaillement des fibres longitudinales varient linéairement en fonction de la distance du centre de l'arbre.
- Dans le domaine élastique, la contrainte de cisaillement τ est proportionnelle à la déformation de cisaillement γ .
- La distribution des contraintes de cisaillement τ est symétrique autour de l'axe géométrique de l'arbre.

Elles ont l'aspect suivant :



Pour chaque élément ds , l'effort tranchant (force de cisaillement) est $\tau \times ds$, l'ensemble des efforts créent un moment de torsion (par rapport à l'axe de la barre). Pour l'équilibre, la somme des moments de ces forces de cisaillement distribuées sur toute la section droite circulaire est égale au moment de torsion appliqué.

Nous avons alors :

$$M_t = \int_S \tau \times \rho \times ds = G \times \theta \times \int_S \rho^2 \times ds = G \times \theta \times I_p$$

I_p : moment d'inertie polaire de la section et ds : aire élémentaire de l'anneau.

- Comme les contraintes de cisaillement varient selon la distance de l'axe géométrique, alors :

$$\frac{\tau_\rho}{\rho} = \frac{\tau_{d/2}}{d/2} = \text{constant.}$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$M_t = \int_S \frac{\tau_\rho}{\rho} \times \rho^2 \times ds = \frac{\tau_\rho}{\rho} \times \int_S \rho^2 \times ds \quad \text{car : } \frac{\tau_\rho}{\rho} = \text{constant}$$

Or, $I_p = \int_0^{d/2} \rho^2 \times ds$ (moment d'inertie polaire).

Finalement :

$$M_t = \frac{\tau \rho \times I_p}{\rho} \text{ ou bien } \tau \rho = \frac{M_t \times \rho}{I_p} \text{ (relation valable dans le domaine élastique)}$$

Ainsi : $\theta = \frac{M_t}{G \times I_p}$; avec $G \times I_p$: la rigidité de la barre en torsion.

L'angle de torsion φ (angle de rotation réciproque des sections) se détermine à base

$$\text{de } \theta = \frac{d\varphi}{dz} \text{ qui donne } d\varphi = \theta \times dz = \frac{M_t \times dz}{G \times I_p} \text{ d'où } \varphi = \int_0^L \frac{M_t \times dz}{G \times I_p}$$

L : distance entre les sections dont on détermine l'angle de rotation réciproque.

Si M_t : constant et $G \times I_p$: constant le long de la barre, l'angle de torsion sera :

$$\varphi = \frac{M_t \times L}{G \times I_p} \quad [\text{rad}]$$

Prenons l'expression $\tau = G \times \theta \times \rho$ et éliminons θ :

$$\tau = G \frac{M_t}{G \times I_p} = \frac{M_t}{I_p} \rho.$$

On remarque que les contraintes tangentielles sont réparties à travers la section suivant une loi

$$\text{linéaire : } \tau = \frac{M_t}{I_p} \times \rho$$

Les contraintes tangentielles maximales apparaissent aux points les plus éloignés de l'axe de

$$\text{la barre. C-à-d } \tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} \rho_{max}.$$

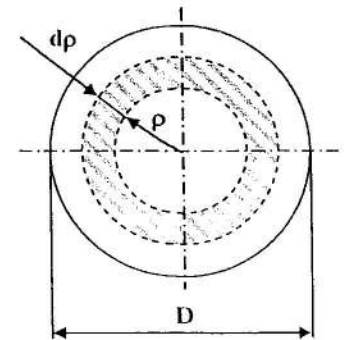
$$\frac{I_p}{\rho_{max}} = W_p \quad [\text{cm}^3] \text{ est le module de résistance polaire. Ainsi : } \tau_{max} = \frac{M_t}{W_p}$$

I_p - ? ; W_p - ?

a) Section circulaire pleine

$$I_p = \frac{\pi \times d^4}{32} \text{ (voir caractéristiques géométriques des sections planes).}$$

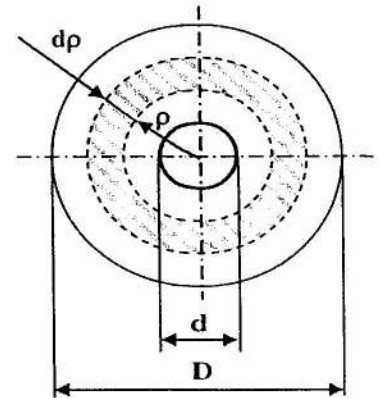
$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi \times D^4 / 32}{D/2} = \frac{\pi \times D^3}{16} \approx 0,2 D^3$$



b) Section circulaire creuse

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} D^4 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = \frac{\pi}{32} D^4 (1 - \alpha^4) \text{ où } \alpha = \frac{d}{D}$$

$$\text{Ainsi : } W_p = \frac{\pi \times D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = \frac{\pi \times D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2 D^3 (1 - \alpha^4)$$



VI.4 Calcul des arbres à la torsion

En pratique le diamètre nécessaire d'un arbre se calcule souvent à partir de la puissance transmise (en kW). Connaissant la puissance, le couple de torsion s'obtient par la relation :

$$M_t = 9550 \frac{P}{n} \quad \text{où } P \text{ en [kW], } n : \text{ nombre de tours par minute [tr/min] et } M_t \text{ en [N.m].}$$

VI.5 Condition de résistance et de rigidité

a) Condition de résistance

$$\tau_{\max} = \frac{M_t^{\max}}{W_p} \leq [\tau]$$

Dans le cas d'une charge statique, on adopte : $[\tau] = (0,5 \div 0,6) \times [\sigma]$

La contrainte tangentielle τ existe aussi dans les sections longitudinales (loi de la parité).

$$\text{Pour la matière plastique : } [\tau] = \frac{\tau_{éc}}{K} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Limite d'écoulement à la torsion } \tau_{éc} = (0,5 \div 0,6) \times \sigma_{éc} \\ \text{Coefficient de sécurité} \end{array} \right.$$

Cette condition permet de vérifier la résistance (Si M_t et d sont connus) et de calculer le diamètre de l'arbre.

$$\text{Arbre plein : } d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times M_t}{\pi \times [\tau]}} \quad \text{et} \quad \text{Arbre creux : } D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times M_t}{\pi \times (1 - \alpha^4) \times [\tau]}}$$

b) Condition de rigidité (S'opposer à la déformation)

$$\varphi_{max} = \frac{M_t \times L}{G \times I_p} \leq [\varphi] \quad \text{ou} \quad \theta_{max} = \frac{M_t}{G \times I_p} \leq [\theta]$$

$[\theta]$: angle de torsion relatif admissible. (Radians par unité de longueur).

Si $[\theta]$ est exprimé en degré par 1 m de longueur : $\theta = \frac{180}{\pi} \times \frac{M_t}{G \times I_p} \leq [\theta]$

Cette condition permet également de déterminer le diamètre de l'arbre.

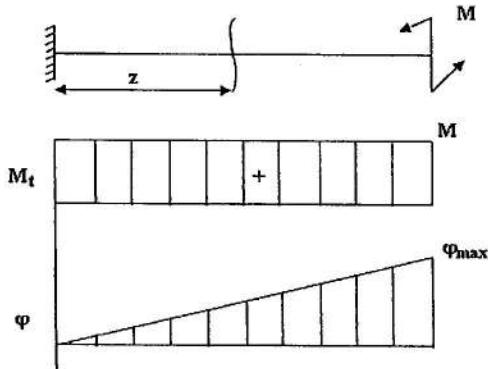
$$\text{Arbre plein : } d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}}$$

$$\text{Arbre creux : } D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot (1 - \alpha^4) \cdot G \cdot [\theta]}}$$

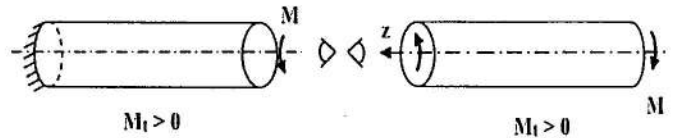
$$\text{Arbre plein : } d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \times M_t}{\pi \times G \times [\theta]}}$$

$$\text{et Arbre creux : } D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \times M_t}{\pi \times (1 - \alpha^4) \times G \times [\theta]}}$$

VI.6 Diagramme des moments de torsion et des angles de rotation φ



De la condition d'équilibre d'une partie de la barre on a : $M_t = M$

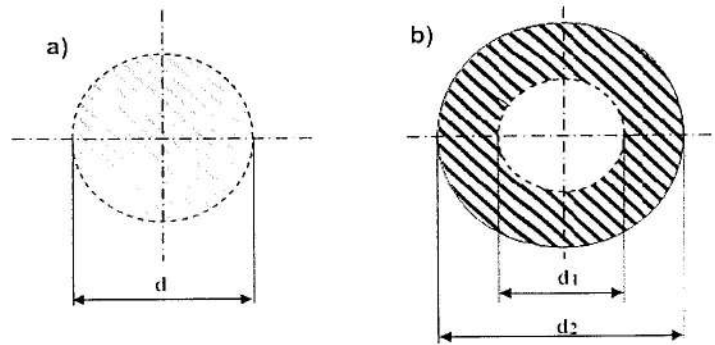


Le diagramme de φ peut être tracé à l'aide de la formule : $\varphi_{max} = \frac{M_t \times z}{G \times I_p}$

Application :

Déterminer les diamètres de deux arbres de même longueur transmettant la même puissance $P = 150 \text{ kW}$ à la vitesse $n = 500 \text{ tr/min}$, sachant que $[\tau] = 80 \text{ MPa}$; $\frac{d_1}{d_2} = \alpha = 0.8$.

Comparer ces deux arbres.



Solution :

1/ Détermination des diamètres :

A partir de la condition de résistance, on peut déterminer les diamètres.

a) Arbre plein :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \leq [\tau]; \quad W_p = \frac{\pi \times d^3}{16}; \quad M_t = 9550 \times \frac{P}{n}$$

$$M_t = 9550 \times \frac{150}{500} = 2865 \text{ N} \times \text{m} \quad \text{Ainsi : } \tau_{\max} = \frac{16 \times M_t}{\pi \times d^3} \leq [\tau] \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times M_t}{\pi \times [\tau]}}$$

$$\Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times 2865 \times 10^3}{\pi \times 80}} = 57 \text{ mm} \quad \text{on prend : } d = 60 \text{ mm}$$

b) Arbre creux :

$$W_p = \frac{\pi \times d_2^3}{16} \times (1 - \alpha^4) \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{16 \times M_t}{\pi \times d_2^3 \times (1 - \alpha^4)} \leq [\tau]$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times M_t}{\pi \times [\tau] \times (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 2865 \times 10^3}{\pi \times 80 \times (1 - 0,8^4)}} = 67,6 \text{ mm}; \text{ on prend : } d_2 = 70 \text{ mm}$$

2/ Comparaison des deux arbres :

Le rapport des volumes des deux arbres nous a donné :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{d^2}{d_2^2 \times (1 - \alpha^2)} = \frac{60^2}{70^2 \times (1 - 0,8^2)} = 2$$

On constate que l'arbre à section creuse est plus économique.

FLEXION SIMPLE D'UNE POUTRE

VII.1 Introduction

L'étude du phénomène de flexion des poutres est souvent considérée comme le problème type de la résistance des matériaux.

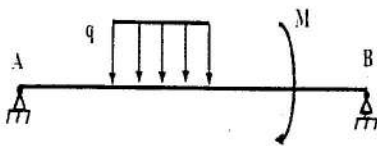
Cette considération provient du fait que la flexion constitue le mode de travail le plus fréquent des éléments de construction. C'est également elle qui donne, le plus souvent, aux contraintes prédominantes dans les éléments.

VII.2 Types de poutres

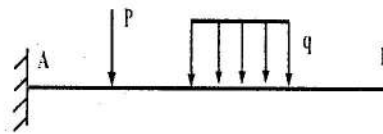
Une barre travaillant principalement à la flexion et appelée poutre. On distingue :

a) Les poutres statiquement déterminées (isostatique)

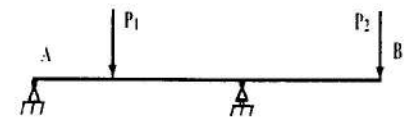
Les réactions des supports (appuis) peuvent être calculées à l'aide des équations d'équilibre statique.



Poutres à extrémités en appui simple



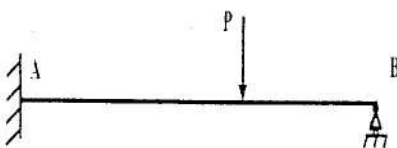
Poutres à extrémités en appui simple



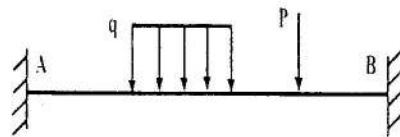
Poutres en porte à faux d'extrémité.

b) Les poutres statiquement indéterminées (hyperstatique) :

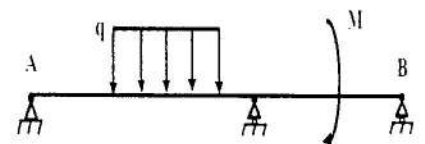
Dans ce cas, le nombre de réactions est supérieur à celui des équations de statique. On considère alors les équations tenant compte des déformations de la poutre ainsi que les équations de statique.



Poutre cantilever sur appui à l'autre extrémité.

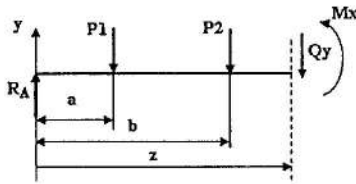
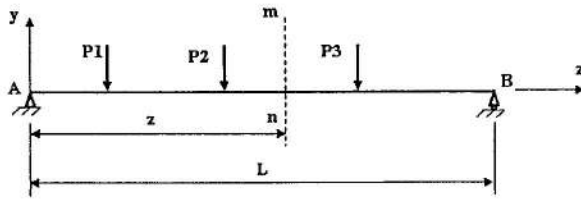


Poutre cantilever sur appui à l'autre extrémité.



Poutre reposant sur 3 appuis ou plus (poutre continue).

VII.3 Effort tranchant et moment fléchissant



On suppose que la poutre possède un plan de symétrie axial et que les charges agissant dans ce plan. Par raison de symétrie on conclut que la flexion se produit dans ce plan.

Les efforts intérieurs (Q_y et M_x) seront déterminés par la méthode des sections.

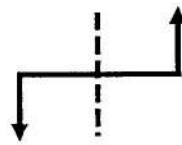
$$Q_y = \sum P_y^G = \sum P_y^D ; Q_y : \text{Effort tranchant.}$$

$$\text{et } M_x = \sum m(P_y^G)/x = \sum m(P_y^D)/x$$

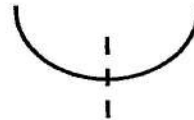
M_x : Moment fléchissant.



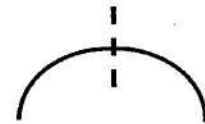
$$Q_y > 0$$



$$Q_y < 0$$



$$M_x > 0$$

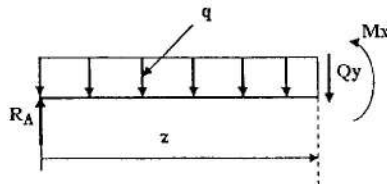
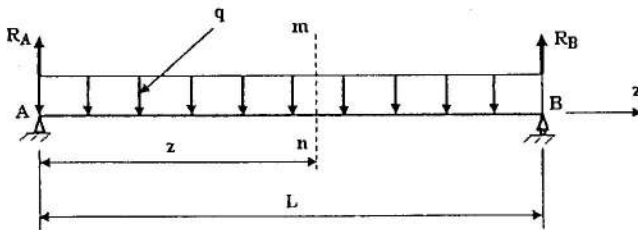


$$M_x < 0$$

Si une force tend à fléchir la poutre en donnant une concavité vers le haut on dit qu'elle produit un moment fléchissant positif. Dans le cas contraire, négatif.

$$Q_y = \sum P_y^G = R_A - P_1 - P_2 ; \quad M_x = \sum m(P_y^G)/x = R_A \cdot z - P_1 \cdot (z - a) - P_2 \cdot (z - b)$$

Le même raisonnement reste valable lorsque nous considérons une poutre sollicitée par une charge répartie.



$$R_A = R_B = \frac{q \cdot L}{2}$$

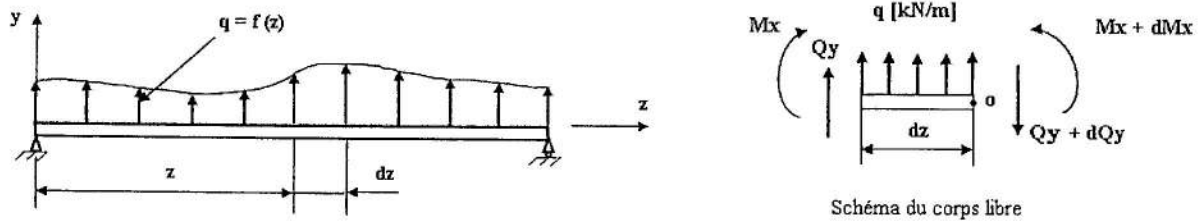
$$Q_y = R_A - q \cdot z = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot z = q \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right)$$

$$M_x = R_A \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2} = \frac{q \cdot L}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}$$

$$= \frac{q \cdot z}{2} (L - z)$$

Si on étudie l'équilibre de la poutre de droite, on aboutit au même résultat.

VII.4 Relation entre moment fléchissant et effort tranchant



Pour l'équilibre de l'élément on doit avoir : $\sum m_o = 0$ et $\sum P_y = 0$.

$$\sum m_o = 0 : \quad M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \cdot dz + q \cdot (dz^2/2) = 0 \Rightarrow Q_y = \frac{dM_x}{dz}$$

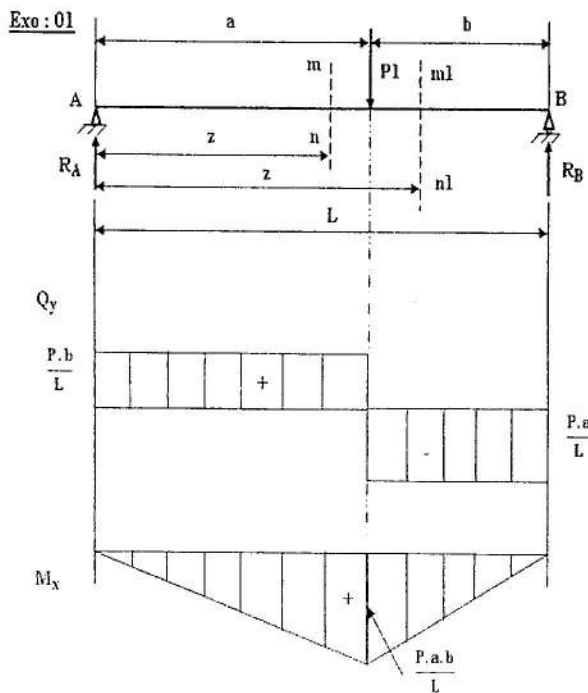
$$\sum P_y = 0 : \quad Q_y + q \cdot dz - (Q_y + dQ_y) = 0$$

$$\text{D'où} \quad q = \frac{dQ_y}{dz} \quad \text{ou} \quad q = \frac{d^2 M_x}{dz^2}$$

VII.5 Diagramme de l'effort tranchant Q_y et du moment fléchissant M_x

La représentation graphique des efforts intérieurs simplifie l'étude des contraintes dans une poutre.

- Si $Q_y > 0$ les valeurs sont portées au-dessus de l'axe, si non, les valeurs sont portées au-dessous de l'axe;
- Par contre, $M_x > 0$ au-dessous de l'axe et $M_x < 0$ au-dessus de l'axe.



$$R_A = \frac{P \times b}{L} ; \quad R_B = \frac{P \times a}{L}$$

Section m-n : $0 \leq z \leq a$

$$Q_y = R_A = \frac{P \times b}{L} ;$$

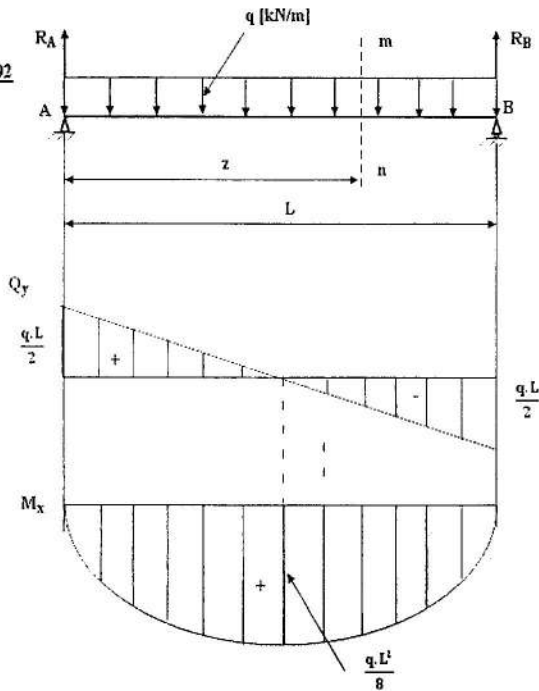
$$M_x = R_A \times z = \frac{P \times b}{L} \times z$$

Section m1-n1 : $a \leq z \leq L$

$$Q_y = R_A - P = \frac{P \times b}{L} - P ;$$

$$M_x = R_A \times z - P \times (z - a)$$

Exo : 02



$$R_A = R_B = \frac{q \times L}{2}$$

Tronçon (1) : $0 \leq z \leq L$

$$Q_y = R_A - q \times z = \frac{q \times L}{2} - q \times z$$

$$= q \left(\frac{L}{2} - z \right)$$

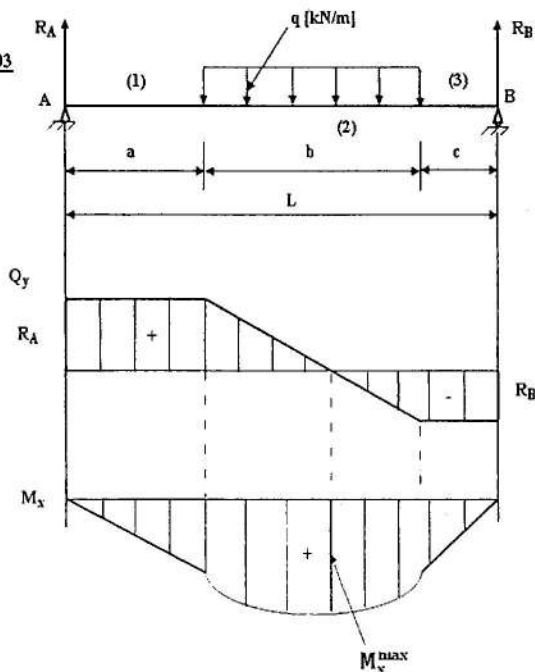
$$M_x = R_A \times z - q \times \frac{z^2}{2} = \frac{q \times L}{2} \times z - q \times \frac{z^2}{2}$$

$$= \frac{q \times z}{2} \times (L - z)$$

M_x^{\max} apparait à mi-portée, là où l'effort tranchant change de signe : c'est-à-dire, pour :

$$z = \frac{L}{2} \quad \text{on a :} \quad M_x^{\max} = q \times \frac{L^2}{8}$$

Exo : 03



$$R_A = q \times \frac{b}{L} \times \left(c + \frac{b}{2} \right) ; \quad R_B = q \times \frac{b}{L} \times \left(a + \frac{b}{2} \right)$$

Tronçon (1) : $0 \leq z \leq a$

$$Q_y = R_A \quad ; \quad M_x = R_A \times z$$

Tronçon (2) : $a \leq z \leq a + b$

$$Q_y = R_A - q(z - a) ; \quad M_x = R_A \times z - q \frac{(z - a)^2}{2}$$

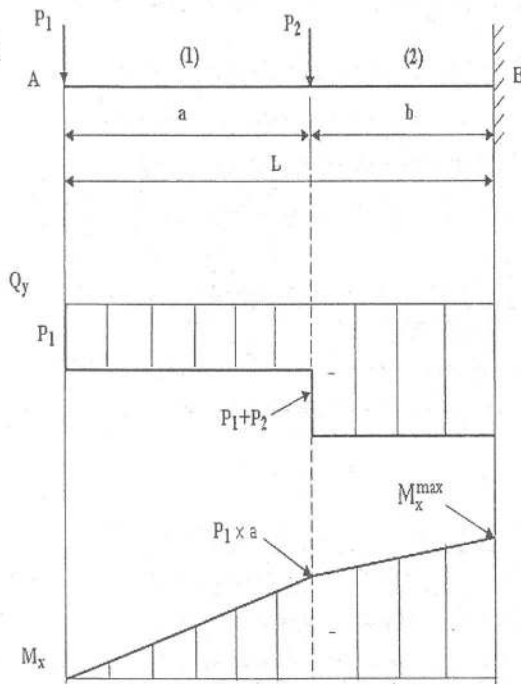
Tronçon (3) : $a + b \leq z \leq L$

Il est préférable de tenir compte des forces appliquées à droite de la section.

$$Q_y = -R_B \quad ; \quad M_x = R_B \times (L - z)$$

M_x^{\max} apparait au niveau de la section où l'effort tranchant est nul ($Q_y = 0$).

Exo : 04



Tronçon (1) : $0 \leq z \leq a$

$$Q_y = -P_1 \quad ; \quad M_x = -P_1 \times z$$

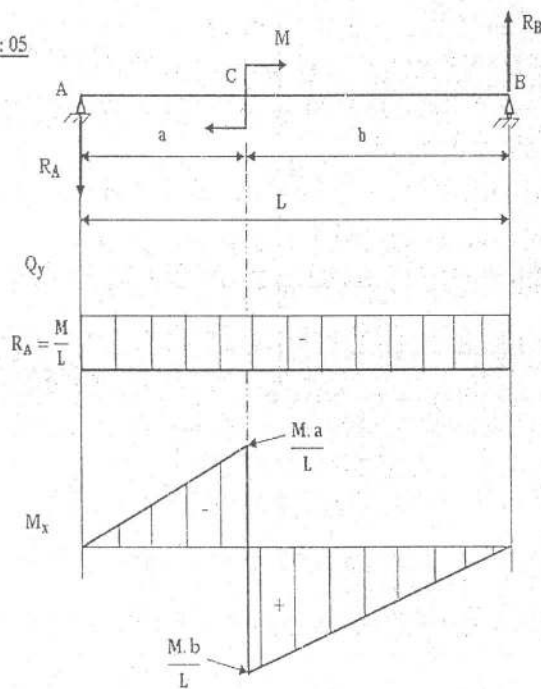
Tronçon (2) : $a \leq z \leq L$

$$Q_y = -P_1 - P_2$$

$$M_x = -P_1 \times z - P_2 \times (z - a)$$

$$M_x^{max} = M_x|_{z=L} = -P_1 \times L - P_2 \times (L - a) \\ = -P_1 \times L - P_2 \times b$$

Exo : 05



$$R_A = R_B = \frac{M}{L}$$

Tronçon (1) : $0 \leq z \leq a$

$$Q_y = -R_A = -\frac{M}{L}$$

$$M_x = -R_A \times z = -\frac{M}{L} \times z$$

Tronçon (2) : $a \leq z \leq L$

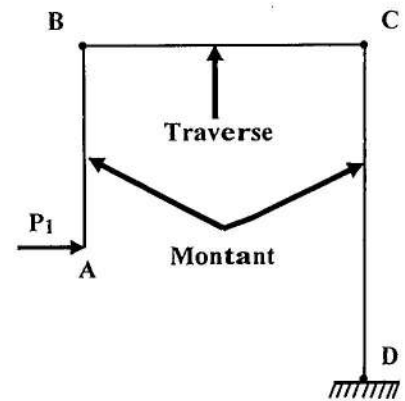
$$Q_y = -R_B = -\frac{M}{L}$$

$$M_x = R_B \times (L - z) = \frac{M}{L} \times (L - z)$$

VII.6 Portique isostatique

On appelle PORTIQUE, les systèmes constitués de barres reliés entre elles par des nœuds rigides (B, C). On appelle MONTANTS les barres verticales et TRAVERSES (ou SOUS-POUTRE), les barres horizontales.

La rigidité des nœuds élimine la possibilité de rotation mutuelle des barres fixées dans le nœud c-à-d au point nodal (B ou C), les angles entre les axes ne varient pas lors de la déformation.



L'axe d'un portique est une ligne brisée dont chacune des parties peut être considérée comme une poutre. Ainsi, le tracé d'un diagramme d'un portique se ramène au tracé des diagrammes de chacune des barres qui le composent. Cependant, à la différence des poutres ordinaires, en plus des moments fléchissant M et effort tranchant Q , dans les sections de chaque barre du portique agissent les forces longitudinales N , c'est pourquoi pour les portiques, il faut tracer les diagrammes de N , de Q et de M .

a) Convention de signes

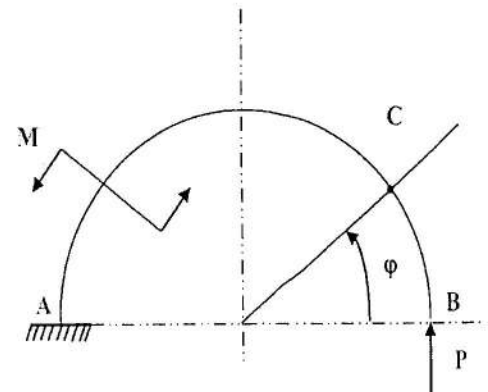
Les conventions de signes sont similaires à celle de la flexion simple pour un observateur qui se trouve à l'intérieur du portique.

b) Tracé des diagrammes

Lors du tracé des diagrammes, les ordonnées positives de N de Q et de M sont portées de façon à être dirigé vers le côté extérieur, tandis que celles négatives vers l'intérieur du portique.

VII.7 Barres curvilignes

Dans ce cas également on a trois (3) facteurs de force : N ; Q et M . Si l'axe de la barre curviligne est un arc de cercle, il est commode de définir la position d'une section quelconque à l'aide des coordonnées polaires, et les efforts intérieurs seront en fonction de l'angle φ : $N(\varphi)$; $Q(\varphi)$ et $M(\varphi)$.



Application : (Partie : Flexion simple)

Une poutre AC sur deux appuis est soumise à des chargements comme indiqués sur la figure 01.

- 1/ Calculer les réactions aux appuis A et B.
- 2/ Étudier les lois de variation des efforts tranchants (Q_y) et moments fléchissant (M_x) le long de la poutre et tracer les diagrammes correspondants.
- 3/ Que deviendrait le système si vous transformiez l'appui double A en encastrement ?

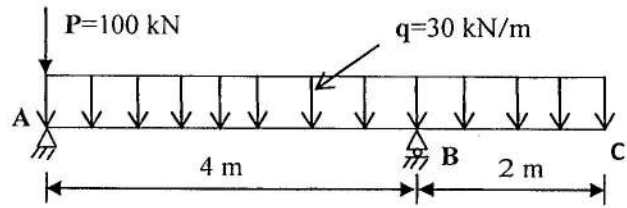
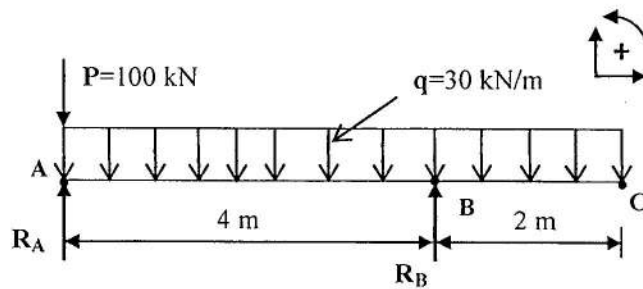


Figure 01

Solution

Tout d'abord, on trace le schéma d'équilibre statique qui montre la poutre sous l'effet des différentes sollicitations existantes.



1/ Calcul des réactions

$$\sum M(P)/A = 0 \Rightarrow RB \times 4 - q \times 6 \times 3 = 0 \Rightarrow RB = \frac{q \times 6 \times 3}{4} = \frac{30 \times 6 \times 3}{4} = 135 \text{ kN}$$

$$\sum M(P)/B = 0 \Rightarrow -RA \times 4 + q \times 6 \times 1 + P \times 4 = 0 \Rightarrow RB = \frac{q \times 6 + P \times 4}{4} = \frac{30 \times 6 + 100 \times 4}{4} = 145 \text{ kN}$$

Vérification :

$$\sum F(\uparrow) = 0 \Rightarrow RA + RB - q \times 6 + P = 0 \Rightarrow 135 + 145 - 30 \times 6 - 100 = 0 \quad \text{C'est vérifié}$$

2/ Étude de Variation de l'effort tranchant (Q_y) et moment fléchissant (M_x)

Tronçon AB : $0 \leq z \leq 4 \text{ m}$

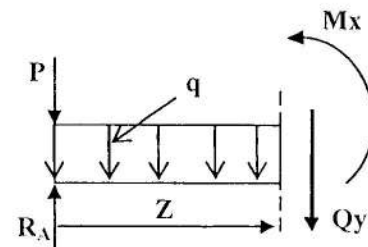
$$Q_y(z) = RA - q \times z - P \Rightarrow Q_y(z) = -30 \times z + 45$$

$$z = 0 \Rightarrow Q_y(0) = 45 \text{ kN}$$

$$z = 4 \text{ m} \Rightarrow Q_y(4 \text{ m}) = -75 \text{ kN}$$

$$Q_y(z) = 0 \Rightarrow z = 1,5 \text{ m}$$

$$M_x(z) = -q \times \frac{z^2}{2} + RA \times z - P \times z = \left(\frac{-q}{2} \times z + RA + P\right) \times z = \left(\frac{-30}{2} \times z + 45\right) \times z$$



$$z = 0 \Rightarrow M_x(0) = 0$$

$$z = 4 \text{ m} \Rightarrow M_x(4 \text{ m}) = -60 \text{ kN.m}$$

Le moment pour $z = 1,5 \text{ m} \Rightarrow M_{x/z=1,5\text{m}} = 33,75 \text{ kN.m}$

Le moment est nul pour $z = 3 \text{ m}$

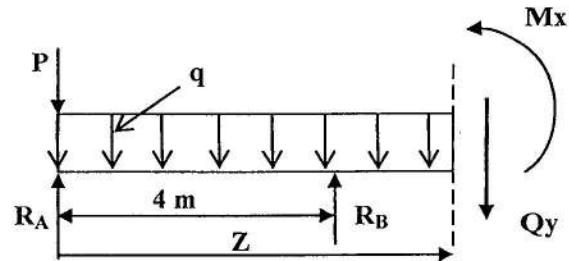
Tronçon BC : $4 \text{ m} \leq z \leq 6 \text{ m}$

$$Q_y(z) = R_A + R_B - P - q \times z$$

$$\Rightarrow Q_y(z) = -30 \times z + 180$$

$$z = 4 \text{ m} \Rightarrow Q_y(4 \text{ m}) = 60 \text{ kN}$$

$$z = 6 \text{ m} \Rightarrow Q_y(6 \text{ m}) = 0$$



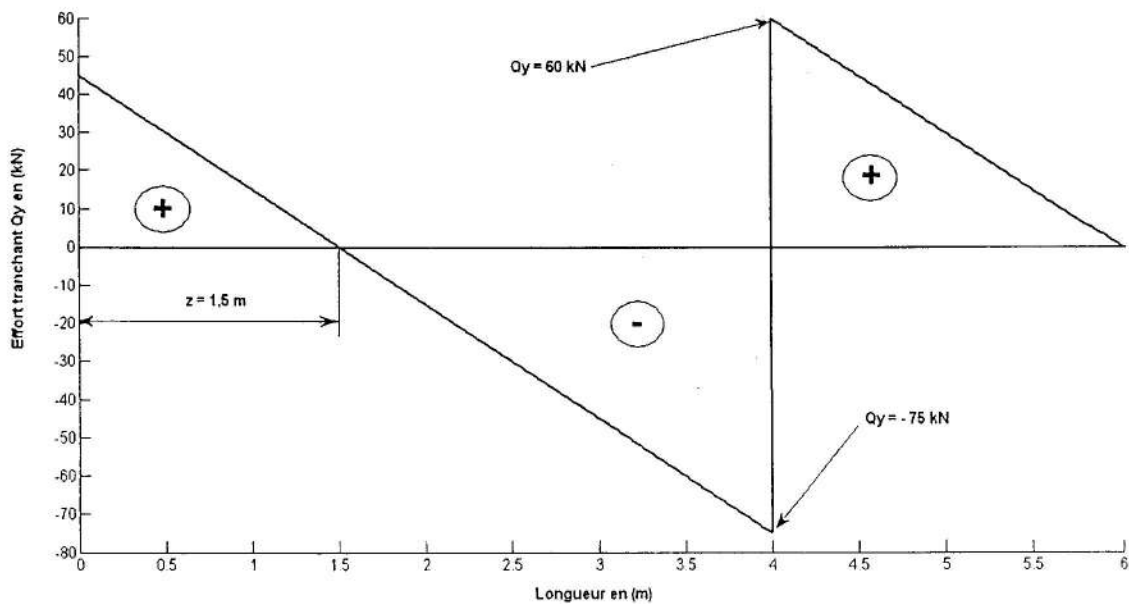
$$M_x(z) = -q \times \frac{z^2}{2} + R_A \times z - P \times z + R_B \times (z - 4)$$

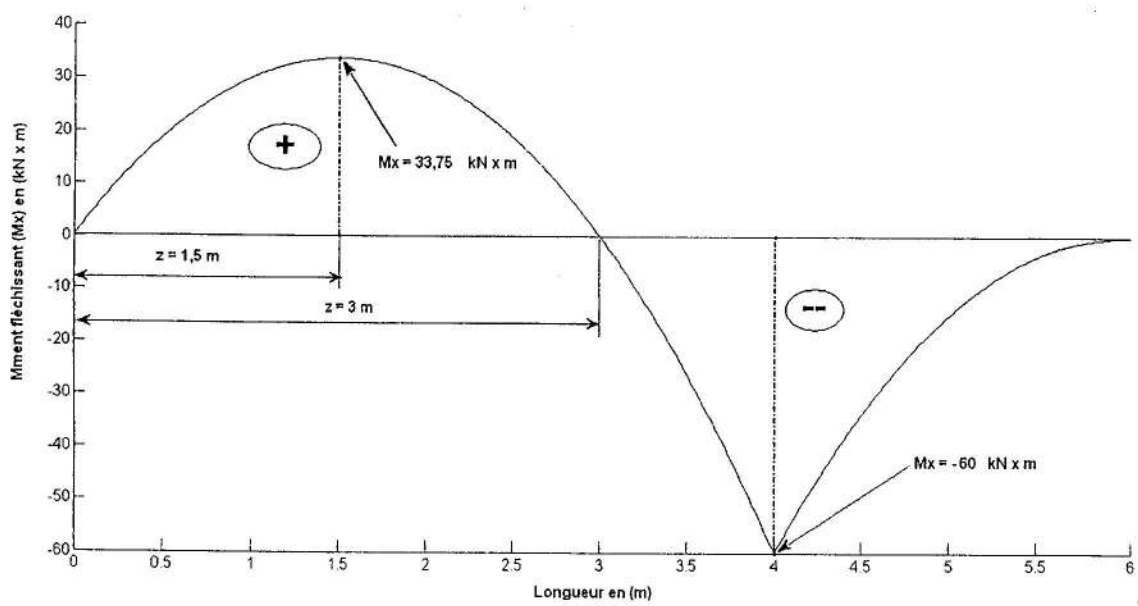
$$\Rightarrow M_x(z) = \frac{-q}{2} \times z^2 + (R_A - P + R_B) \times z - R_B \times 4 = 0$$

$$\Rightarrow M_x(z) = \frac{-30}{2} \times z^2 + 180 \times z - 540$$

$$z = 4 \text{ m} \Rightarrow M_x(4 \text{ m}) = -60 \text{ kN.m}$$

$$z = 6 \text{ m} \Rightarrow M_x(6 \text{ m}) = 0$$





THÉORIE DES POUTRES

VIII.1 Introduction

Lorsqu'une poutre est sollicitée par des charges externes, la force de cisaillement et les moments de flexion sont définis sur toutes les sections transversales de la poutre, en engendrant une certaine déformation de la poutre. Le matériau de la poutre développe une résistance ou des contraintes pour résister aux déformations. Ces contraintes peuvent être calculées en considérant certaines hypothèses. Les contraintes introduites par le moment de flexion sont appelées contraintes de flexion.

VIII.2 Hypothèses de la Théorie des poutres

Avant de discuter de la théorie de la flexion simple, on présente les hypothèses essentielles à prendre en considération dans la théorie de la flexion simple :

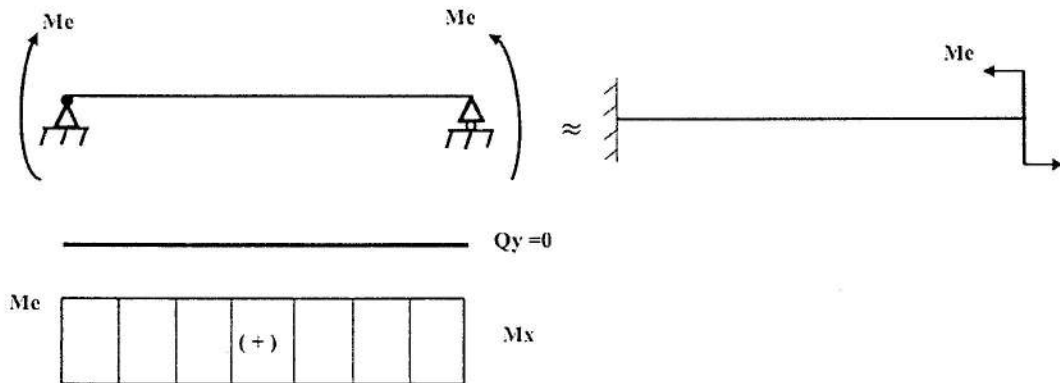
1. Le matériau est homogène et isotrope.
2. le matériau est utilisé dans son domaine élastique.
3. Le rayon de courbure est important par rapport aux dimensions de la section transversale.
4. Chaque fibre de la poutre se dilate ou se contracte, indépendamment des adjacents, au-dessus ou en dessous.
5. Hypothèse de Navier-Bernouilli : Les sections planes normales à la fibre moyenne avant déformation demeurent planes et orthogonales à la fibre moyenne déformée.

VIII.3 Contrainte Normales en Flexion Plane

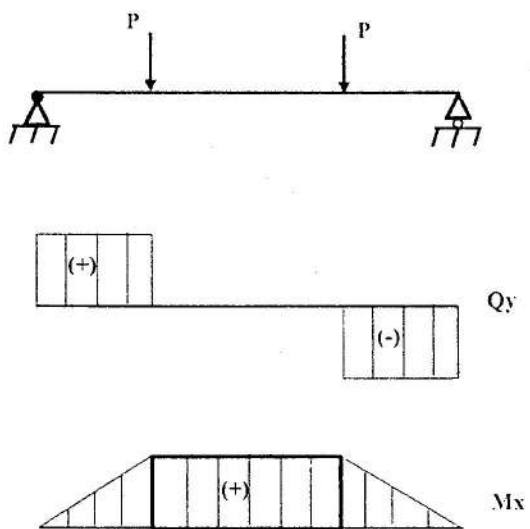
Les formules utilisées pour le calcul des contraintes normales sont généralement établies à partir d'une étude de la flexion pure.

La flexion pure est caractérisée par le fait que les six composantes des efforts internes, seul M_x est différent de zéro. Cependant, les autres efforts sont nuls.

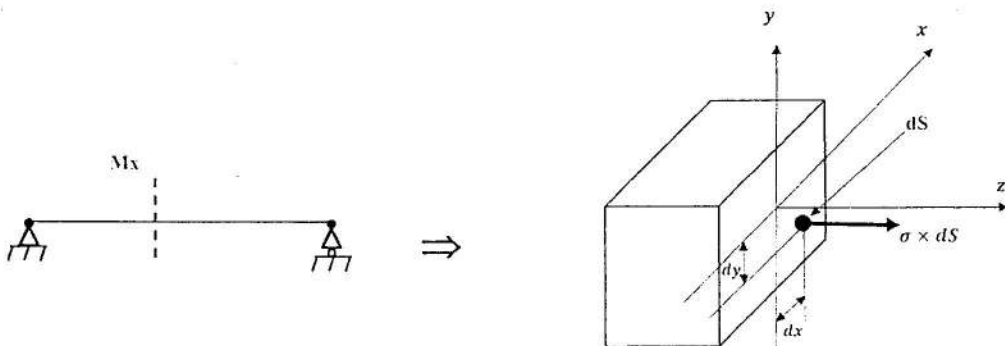
$$\begin{cases} N = 0 \\ Q_y = 0 \\ Q_x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M_x \neq 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$



Il est très rare d'observer une flexion pure en réalité.



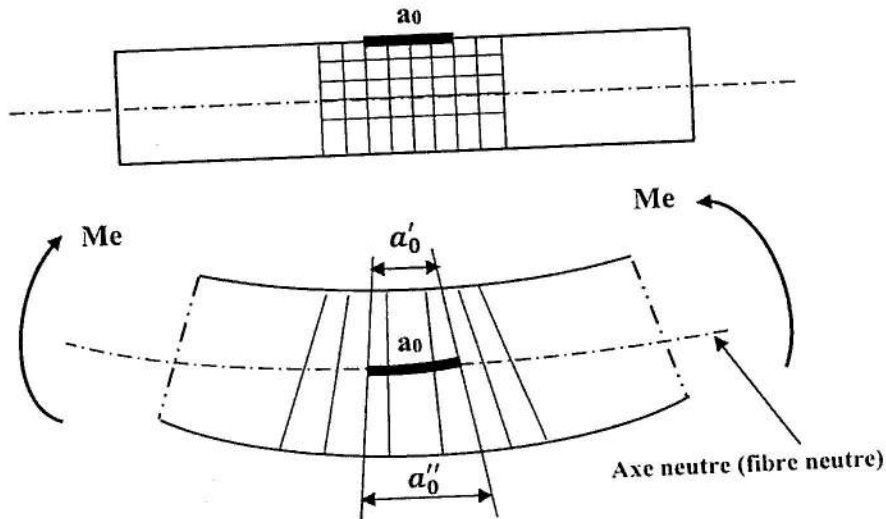
Dans la zone en gras du diagramme du moment fléchissant, on a une flexion pure.



- La contrainte d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre, a la forme suivante :

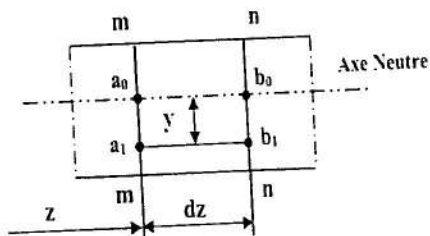
$$\int_S \sigma \times y \times ds = M_x \quad (8.1)$$

- L'aspect géométrique de la flexion se déduit de l'analyse du tableau schématique des déformations de la même poutre.

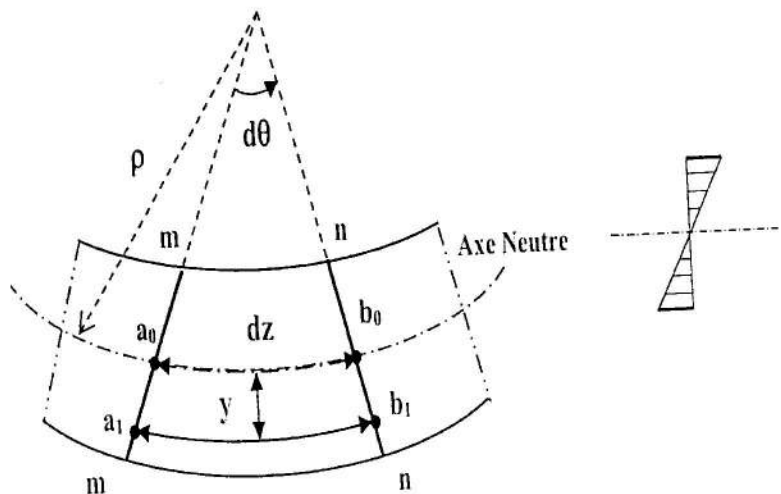


On constate que les lignes longitudinales prennent la forme d'un arc de cercle et que les sections transversales restent planes et perpendiculaires aux lignes longitudinales.

- La partie au-dessus de la fibre neutre (F.N) est comprimées.
- La partie en dessous de la fibre neutre (F.N) est tendue (pour ce cas).



ρ : rayon de courbure



De la formule : $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$, le montage donne :

$$\varepsilon = \frac{(\rho+y) \times d\theta - dx}{dx} = \frac{(\rho+y) \times d\theta - \rho \times d\theta}{\rho \times d\theta} = \frac{y}{\rho}; \quad \varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (8.2)$$

Donc, $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{y}{\rho} \quad (8.3) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{E}{\rho} \times y \quad (8.4)$

On remplace (4) dans (1), on aura :

$$M_x = \int_S \sigma \times y \times ds = \int_S \left(\frac{E}{\rho} \times y \right) \times y \times ds = \frac{E}{\rho} \times \int_S y^2 \times ds$$

$$\Rightarrow M_x = \frac{E}{\rho} \times I_x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \times I_x} \quad (8.5)$$

En remplaçant (5) dans (4), on va avoir :

$$\sigma = \frac{E}{\rho} \times y = \frac{M_x \times E \times y}{E \times I_x}; \text{ d'où : } \sigma = \frac{M_x \times y}{I_x} \quad (8.6) \quad \text{Formule de Navier}$$

L'analyse de la formule (6) montre que la variation de contraintes sur la hauteur obéit à une loi linéaire, les contraintes deviennent maximales dans les couches de coordonnées y_{max} et nulles lorsque $y = 0$.

Démontrons que la fibre neutre passe par le centre de gravité : $S_z = S_y = 0$

L'effort normal : $N = \int_S \sigma \times ds$, pour la fibre neutre $\Rightarrow N=0$

$$N = \int_S \frac{M_x \times y}{I_x} \times ds = \frac{M_x}{I_x} \times \int_S y \times ds = 0 = \frac{M_x}{I_x} \times S_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_x = 0$$

\Rightarrow L'axe X est la fibre neutre et passe par le centre de gravité.

Les formules servant à calculer les contraintes normales établies à l'aide de l'analyse de la flexion pure sont avec un degré de précision suffisant, valable pour la détermination des contraintes normales dans le cas de flexion simple lorsque $Q_y \neq 0$.

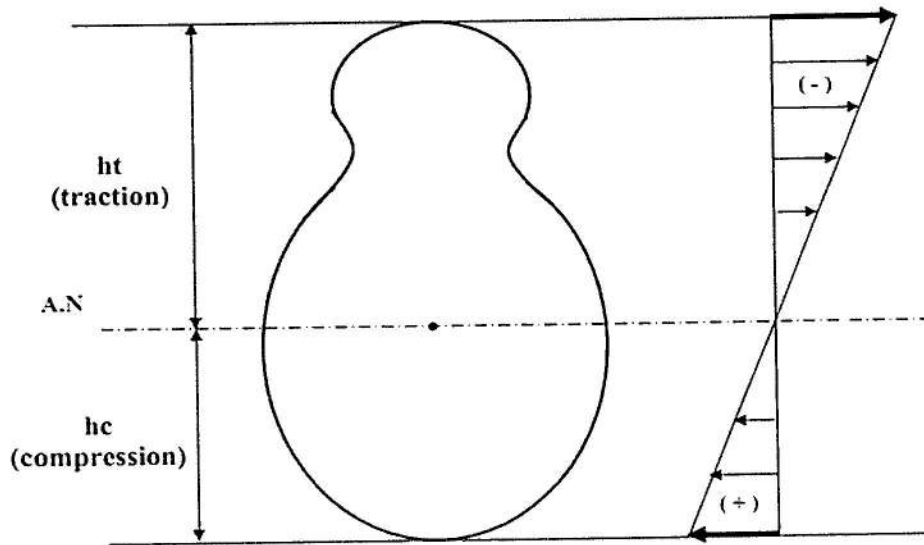
Flexion pure	$\begin{cases} M \neq 0 \\ Q_y = 0 \end{cases}$		$\sigma = \frac{M \times y}{I_x}$
Flexion simple	$\begin{cases} M \neq 0 \\ Q_y \neq 0 \end{cases}$		

En utilisant cette formule pour la flexion simple s'accompagne d'erreurs très négligeables que l'on utilise dans les deux cas.

VIII.4 Conditions de la résistance par rapport aux contraintes normales

Pour assurer la résistance d'une poutre fléchie dans la section dangereuse (section où le moment M_x est maxima). Il faut que les contraintes de traction et de compression maximales ne dépassent pas les contraintes admissibles correspondantes.

Exemple :



- La contrainte de traction maximale : $\sigma_{t\ max} = \frac{M \times h_t}{I_x} \leq \sigma_{adm}^t$ (8.7)

- La contrainte de compression maximale : $\sigma_{c\ max} = \frac{M \times h_c}{I_x} \leq \sigma_{adm}^c$ (8.8)

VIII.4.1 Cas des sections asymétriques

Pour les matériaux fragiles (fonte, par exemple), on a :

σ_{adm}^c est supérieure à σ_{adm}^t de 3 à 5 fois.

Donc, pour les poutres en tel matériaux, on choisit des sections asymétriques par rapport à l'axe neutre (A.N) de tel sorte que $h_t < h_c$ c.à.d que $\sigma_{adm}^t < \sigma_{adm}^c$. Dans ce cas considère, il faut comparer deux conditions de résistances :

- Suivant les contraintes de traction maximales : $\sigma_{t\ max} = \frac{M \times h_t}{I_x} = \frac{M}{W_{x,t}} \leq \sigma_{adm}^t$ (8.9)

- Suivant les contraintes de compression maximales : $\sigma_{c\ max} = \frac{M \times h_c}{I_x} = \frac{M}{W_{x,c}} \leq \sigma_{adm}^c$ (8.10)

$W_{X,t}$ et $W_{X,c}$: Couples de réactions des fibres tendus et comprimés (Modules de flexion, Moment résistants, Module d'inertie résistants).

Remarque : dans (9) et (10) nous avons pris $M = |M_{max}|$.

VIII.4.2 Cas des sections symétriques

Si la section de la poutre est symétrique par rapport à l'axe neutre (A.N) (ces sections sont avantageuses pour les poutres en matériaux plastiques). $h_t = h_c = \frac{h}{2}$

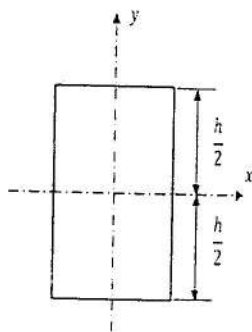
Alors les deux formules (8.7) et (8.8) se ramènent à une seule : $\sigma = \frac{M}{I_X} \times \frac{h}{2}$ (8.11)

En désignant : $W_X = \frac{2}{h} \times I_X$, on obtient la condition suivante : $\sigma = \frac{|M_{max}|}{W_X} \leq \sigma_{adm}$ (8.12)

Où : W_X représente les caractéristiques géométriques d'une section droite d'une poutre. Il détermine sa résistance à la flexion.

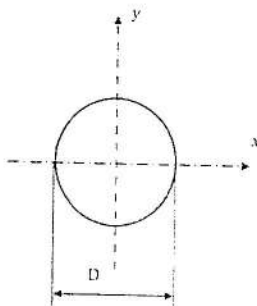
➤ Valeurs de W_X de quelques sections.

- Rectangle



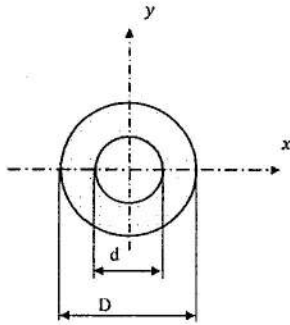
$$W_X = \frac{2 \times I_X}{h} = \frac{b \times h^3}{\frac{12 \times b}{2}} = \frac{b \times h^2}{6} \Rightarrow W_X = \frac{b \times h^2}{6}$$

- Cercle



$$W_X = \frac{2 \times I_X}{h} = \frac{2 \times \pi \times D^4}{D \times 64} = \frac{\pi \times D^3}{32} \Rightarrow W_X \approx 0,1 \times D^3$$

- Anneau



Si : $C = \frac{d}{D}$

$$W_x = \frac{\pi \times D^3}{32} \times (1 - C^4)$$

- Sections Laminées (T, L, U, I,)

W_x est donnée par les Tableaux des Normes.

VIII.4.3 Le choix de la section et du moment de flexion admissibles

➤ Choix de section

$$W_x \geq \frac{M}{\sigma_{adm}} \quad \text{où} \quad M = M_{max} \quad (13)$$

➤ Moment fléchissant admissible

$$M_{adm} \leq W_x \times \sigma_{adm} \quad (14)$$

Ensuite, la liaison entre M et la charge, d'après le diagramme de M, étant connu, on peut calculer la charge admissible.

VIII.4.4 Applications

- Application 1 :

Choisir la section d'une poutre en I à travers $L = 6$ m sollicitée par une charge uniformément répartie. On donne : $q = 40$ kN/m , $\sigma_{adm} = 160$ MPa.

Solution :

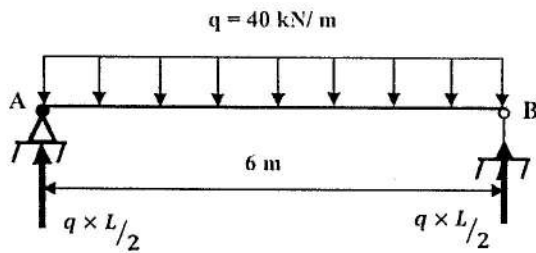
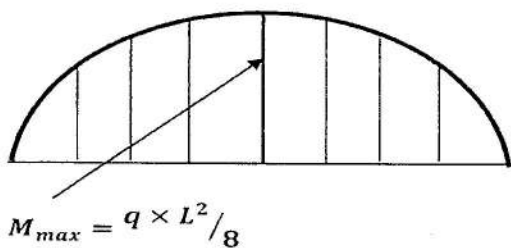


Diagramme du moment fléchissant



$$M_{max} = \frac{q \times L^2}{8} \Rightarrow W_X = \frac{q \times L^2}{8 \times \sigma_{adm}}$$

$$W_X = 1125 \text{ cm}^3$$

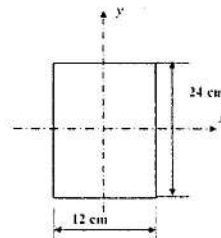
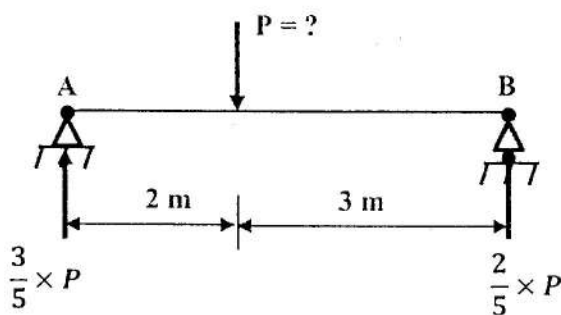
Normalement : on prend W_X du tableau supérieur à celle calculée mais si elle est loin on choisit la valeur inférieure. Mais dans tous les cas.

$$\frac{W_{choisit} - W_{calculé}}{W_{choisit}} \leq 5 \%$$

Soit on a excès de masse ou de résistance.

- Application 2 :

Calculer la charge admissible d'une poutre à section rectangulaire sachant que $\sigma_{adm} = 10 \text{ MPa}$.

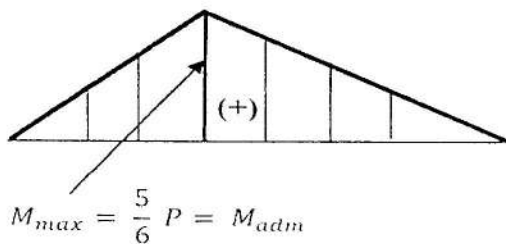


$$W_X = \frac{b \times h^2}{6} = \frac{1,2 \times (2,4)^2}{6}$$

$$M_{adm} = W_X \times \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{6 \times P}{5} = \frac{b \times h^2}{6} \times \sigma_{adm}$$

$$\Rightarrow P = \frac{5}{6} \times \frac{b \times h^2}{6} \times \sigma_{adm} = \frac{5}{6} \times M_{adm}$$

$$P = 9600 \text{ N}$$



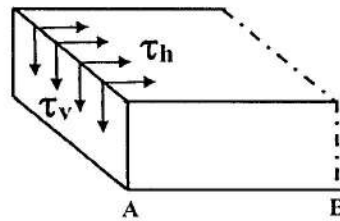
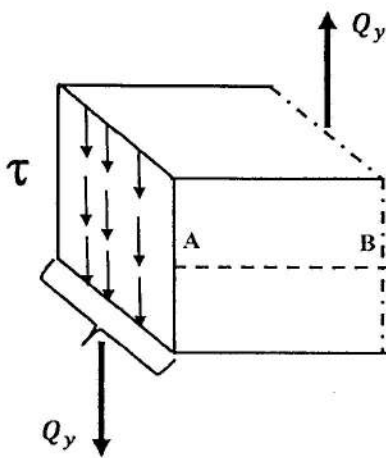
VIII.5 Calcul des Contraintes tangentielles

VIII.5.1 Introduction

Flexion simple $\rightarrow \begin{cases} M \\ Q_y \end{cases}$

$M \rightarrow \sigma = \frac{My}{I}$ (dans les sections droites).

$Q_y \rightarrow \tau = ?$ (dans les sections verticales et horizontales) avec τ contrainte tangentielle



$$\tau_v = \tau_h$$

(loi de parité)

τ_h n'existe que à l'intérieur du solide.

VIII.5.2 Expression de la contrainte tangentielle τ

Pour déterminer les contraintes tangentielles, examinons d'abord une poutre à section rectangulaire, découpons dans la poutre un élément dx et de largeur b égale à celle de la poutre.

Cet élément subit l'action des forces suivantes :

- La face 34 4'3' est sollicitée par $\sigma_1 = \frac{M_1 \times y}{I_X}$. D'autre part le section envisagée subit les contraintes tangentielles (τ) pour l'instant inconnues qui, compte tenu de la petite largeur de la poutre, peuvent être considérées uniformément répartie suivant la largeur de la section (**hypothèse de JOURAVSKI**).
- La face 12 2'1' est aussi soumise à $\sigma_2 = \frac{M_2 \times y}{I_X}$, et la contrainte tangentielle (τ) pour le moment est inconnue.
- La face 32 2'3' est uniquement sollicitée par la contrainte tangentielle (τ) (loi de parité).

Composons l'équation d'équilibre de l'élément découpé, projetons, ensuite, les forces supportées par l'élément sur l'axe horizontal.

$$\sum P_z = 0 \Rightarrow -N_1 + N_2 + \tau \times dz \times b = 0$$

$$\Rightarrow -\int_{S'} \sigma_2 \times ds + \int_{S'} \sigma_1 \times ds + \tau \times dz \times b = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{M_2}{I_X} \times \int_{S'} y \times ds + \frac{M_1}{I_X} \times \int_{S'} y \times ds + \tau \times dz \times b = 0, \text{ avec } \int_{S'} y \times ds = S'_X$$

$$\Rightarrow \left(\frac{M_2 - M_1}{I_X} \right) \times S'_X = \tau \times dz \times b$$

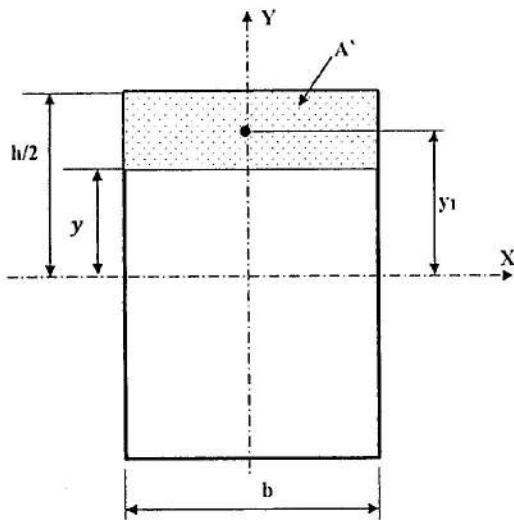
On note : $M_2 - M_1 = dM(x)$, tellement qu'elle est petite

$$S'_X \times \frac{dM(x)}{I_X} = \tau \times b \times dz \Rightarrow \tau = \frac{S'_X \times dM(x)}{b \times dz}, \frac{dM(x)}{dz} = Q_y$$

Donc :
$$\tau = \frac{Q_y \times S'_X}{I_X \times b} \quad (\text{Formule de JOURAVSKI}).$$

VIII.5.3 Loi de distribution de la contrainte tangentielle (τ)

Etudions la loi de distribution suivant la section des contraintes tangentielles dans une poutre rectangulaire. Cette loi est déterminée par la loi de variation de S'_x . Le moment statique de l'aire hachuré S' par rapport à l'axe X.



$$S'_x = A' \times y_1 \Rightarrow S'_x = b \times \left(\frac{h}{2} - y\right) \times y_1,$$

$$y_1 = y + \frac{1}{2} \times \left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{h}{2} + y\right)$$

$$\Rightarrow S'_x = \frac{b}{2} \times \left(\frac{h}{2} - y\right) \times \left(\frac{h}{2} + y\right)$$

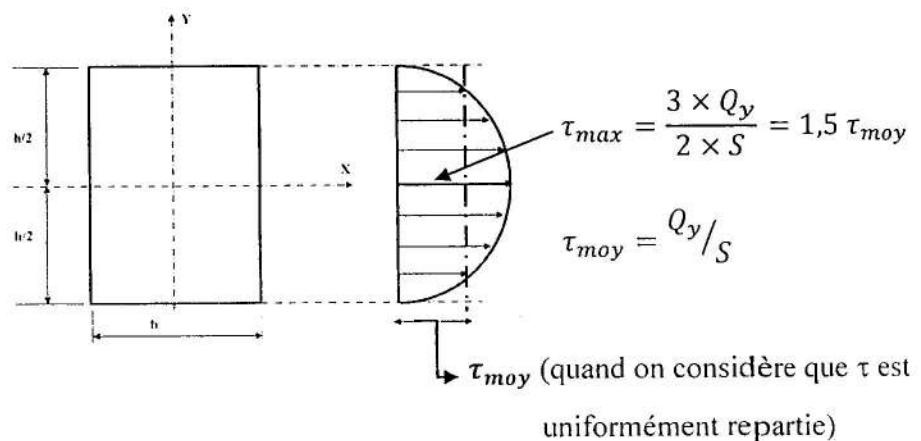
$$\Rightarrow S'_x = \frac{b}{2} \times \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

- La contrainte tangentielle

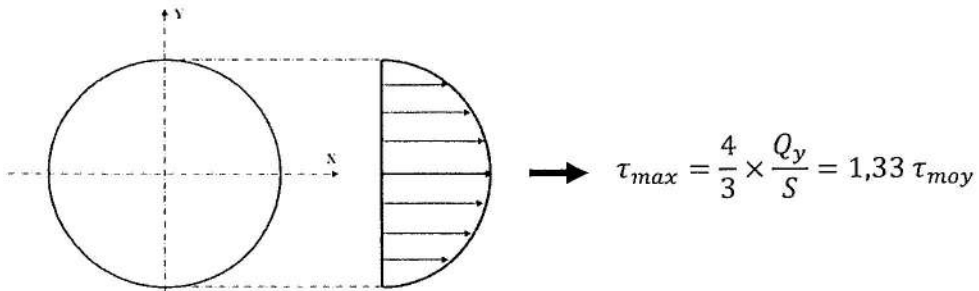
$$\tau = \frac{Q_y \times S'_x}{I_x \times b} = \frac{Q_y \times b \times \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{2 \times b \times \frac{b \times h^3}{12}} \Rightarrow \tau = \frac{6 \times Q_y}{b \times h^3} \times \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

- Diagramme de τ

$$\begin{cases} \tau\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0 \\ \tau(y = 0) = \frac{3 \times Q_y}{2 \times S} \\ \tau\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0 \end{cases}$$



- Section circulaire



- Section annulaire (anneau)

$$\tau_{max} = 2 \times \frac{Q_y}{S}$$

D'une manière générale, on a : $\tau_{max} = k \times \frac{Q_y}{S}$, où k est le coefficient qui dépend de la forme de la section.

VIII.5.4 Condition de résistance

La condition de résistance par rapport aux contraintes tangentielles (τ) s'écrit :

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm}$$

Remarque : pour l'acier : $\tau_{adm} \approx 0,6 \times \tau_{adm}$

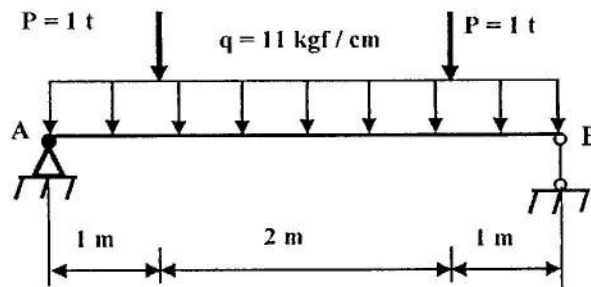
Certains matériaux résistent très mal au cisaillement (par exemple, le bois dans le sens des fibres). Aussi pour les poutres en tels matériaux, la vérification de la résistance par rapport à la contrainte tangentielle (τ) est obligatoire.

Remarque : La théorie exposée de la détermination des contraintes tangentielles (τ) n'est valable que pour des sections pleines.

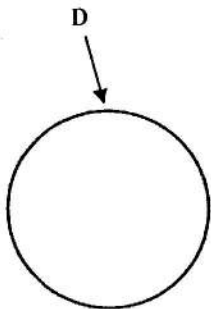
Application :

Calculer les dimensions nécessaires des sections circulaires, carrées, rectangulaires et en double T laminée ainsi que la contrainte normale et tangentielle au point indiqué A sous la force pour la poutre en double T.

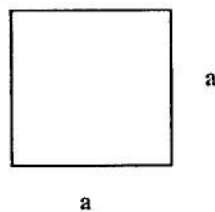
On donne : $q = 11 \text{ kgf/cm}$; $P = 1 \text{ t}$; $L = 4 \text{ m}$; $C = 1 \text{ m}$; $\sigma_{adm}^t = 1600 \text{ t/cm}^2$



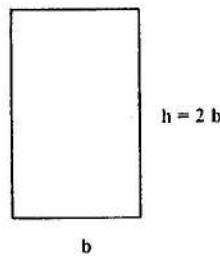
Section n° 1



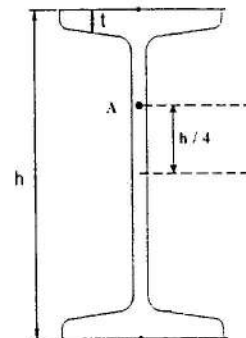
Section n° 2



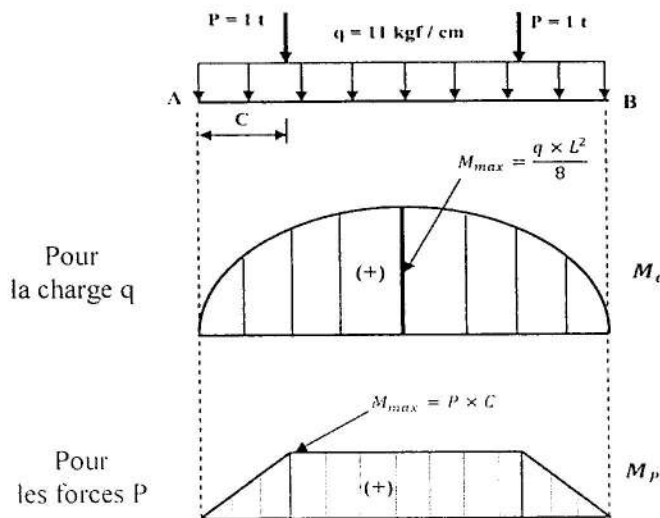
Section n° 3



Section n° 4



Solution :



$$M_{max} = \frac{q \times L^2}{8} + P \times C$$

$$M_{max} = \frac{1,1 \times 4^2}{8} + 1,1 = 3,2 \text{ t} \times \text{m}$$

$$W = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}^t} = \frac{3,2 \times 10^5}{1,6 \times 10^3} = 200 \text{ cm}^3$$

1/ Section circulaire

$$W_1 = \frac{\pi \times D^3}{32} = 200 \text{ cm}^3 \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{6400}{\pi}} = 12,68 \text{ cm} \Rightarrow S_1 = \frac{\pi \times D^2}{4} = 126,8 \text{ cm}^2$$

2/ Section carrée

$$W_2 = \frac{I_X}{a/2} = \frac{2 \times a^4}{12 \times a} = \frac{a^3}{6} = 200 \text{ cm}^3 ; a = \sqrt[3]{1200} = 10,63 \text{ cm} ; S_2 = a^2 = 113 \text{ cm}^2$$

3/ Section rectangulaire

$$W_3 = \frac{I_X}{h/2} = \frac{2 \times b \times h^3}{12 \times h} = \frac{b \times h^3}{6 \times h} = \frac{b \times h^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 200 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow h = \sqrt[3]{2400} = 13,38 \text{ cm} \text{ et } b = 6,7 \text{ cm} \Rightarrow S_3 = h \times b = \frac{h^2}{2} = 89,6 \text{ cm}^2$$

4/ Section en I

$$W = 200 \text{ cm}^3 \Rightarrow \text{d'après le catalogue : } \begin{cases} n^\circ 20 \Rightarrow W = 184 \text{ cm}^3 \\ \text{---} \\ n^\circ 20^a \Rightarrow W = 203 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

Pour la poutre n° 20 :

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{adm}^t}{\sigma_{adm}^t} = \frac{200 - 184}{184} \times 100 = 8,7 \% ; \text{ La poutre peut supporter la charge un peu élevée} \\ \Rightarrow \text{Sur-tension.}$$

Pour la poutre n° 20^a :

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{adm}^t}{\sigma_{adm}^t} = \frac{200 - 203}{203} \times 100 = -1,5 \% ; \text{ Elle supporte une charge un peu petite} \\ \Rightarrow \text{Sous-tension.}$$

Où bien :

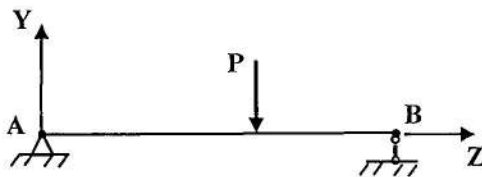
$$\frac{W - W_{n^\circ 20^a}}{W_{n^\circ 20^a}} = -1,5 \%$$

On choisit le profilé en I n° 20^a, le catalogue nous donne : $\begin{cases} S_4 = 28,9 \text{ cm}^2 \\ I_X = 2030 \text{ cm}^4 \\ h = 20 \text{ cm} \end{cases}$

DÉFORMATION ÉLASTIQUE EN FLEXION

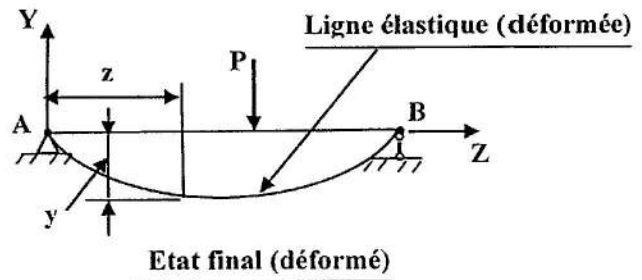
IX.1 Introduction

Les charges transversales appliquées à une poutre engendrent des contraintes normales σ et les contraintes tangentielles τ . Ces charges font également fléchir la poutre suivant une direction perpendiculaire à son axe.



Etat initial non déformé

y : flèche (déplacement)



La relation exprimant la flèche en un point quelconque défini par Z peut s'écrire sous la forme d'une équation appelée équation de la ligne élastique (déformée).

Le calcul d'une poutre impose souvent des limitations tant des flèches que des contraintes.

IX.2 Équation différentielle de la ligne élastique

L'expression du moment : $M_x = \frac{E \times I_x}{\rho}$ est déjà connue

Où :

M_x : moment fléchissant dans une section quelconque de la poutre ;

ρ : rayon de courbure de la surface neutre de la poutre en cette même section.

I_x : le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre.

M et ρ sont en fonction de z.

Si E, I_x sont constantes (le plus souvent), l'équation précédente peut être écrite sous la forme :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \times I_x} \quad (9.1)$$

La notion $\frac{1}{\rho}$ est la courbure de la surface neutre de la poutre.

$M = f(z) \Rightarrow$ la courbe de déformation et à courbure variable.

La flèche $y > 0$ quand elle est dirigée vers le haut. Dans notre cas les flèches de tous les points sont négatives.

La courbure est donnée également par :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dz^2}{[1+(dy/dz)^2]^{3/2}} \quad (9.2)$$

$\frac{dy}{dz}$: représente la pente de la courbe en un point quelconque. Dans le cas de faibles déformations, $\frac{dy}{dz}$ est petite par rapport à l'unité. En la négligeant on aura : $\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dz^2}$ (9.3)

Ainsi l'équation (1) devient : $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{E \times I_X}$ ou encore : $E \times I_X \times \frac{d^2y}{dz^2} = M_x$ (9.4)

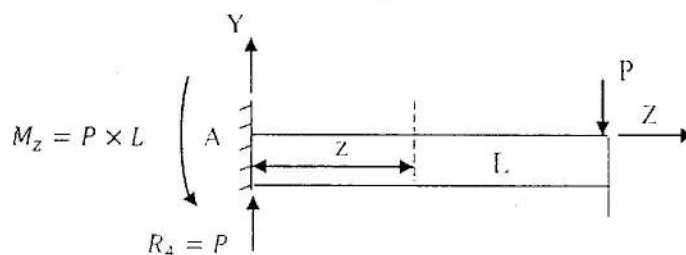
(4) est l'équation différentielle de la ligne élastique.

Pour déterminer $y = f(z)$ le long de la poutre, on doit intégrer cette équation. On sait que $\frac{dQ_y}{dz} = q$ et $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$. On peut donc écrire :

$$\theta = \frac{dy}{dz}; \quad M_x = E \times I_X \times \frac{d^2y}{dz^2}; \quad Q_y = E \times I_X \times \frac{d^3y}{dz^3}; \quad q = E \times I_X \times \frac{d^4y}{dz^4}$$

Exemple 01 :

Ecrire l'équation de la déformée d'une poutre encastree, soumise à l'action d'une force concentrée P à son extrémité libre.



En utilisant les équations d'équilibre statique, on détermine la réaction et le moment au niveau de l'encastrement (A).

- Réactions : $M_A = P \times L$; $R_A = P \times L$
- $M_x = -M_A + R_A \times z = -P \times L + P \times z$

L'équation différentielle de la déformée est :

$$E \times I_X \times \frac{d^2 y}{dz^2} = M_x \text{ ou } E \times I_X \times \frac{d^2 y}{dz^2} = -P \times L + P \times z \quad (1)$$

La 1^{ère} intégration nous donne :

$$E \times I_X \times \frac{dy}{dz} = -P \times L \times z + P \times \frac{z^2}{2} + c_1 \quad (2) \quad \text{équation de la pente}$$

c_1 : se calcule par les conditions aux limites.

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=0} = 0 \text{ (encastrement)} \Rightarrow c_1 = 0$$

Intégrons une 2^{ème} fois on aura :

$$E \times I_X \times y = -\frac{P \times L \times z^2}{2} + \frac{P \times z^3}{6} + c_2 \quad (3)$$

En A (encastrement), $z=0$ et la flèche $y=0 \Rightarrow (y)_{z=0} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

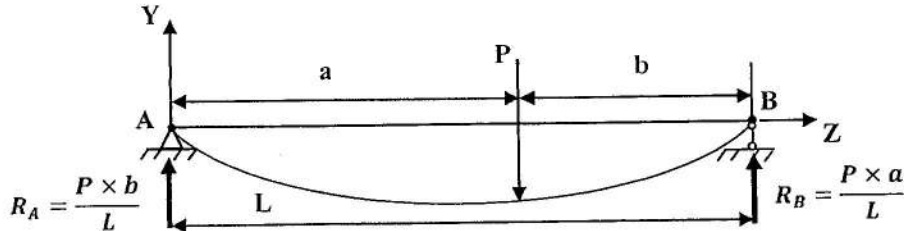
Les équations (2) et (3) avec ($c_1 = c_2 = 0$) permettent de déterminer la pente $\frac{dy}{dz}$ et la flèche y en tout point z de la poutre.

La flèche maximale apparaît à l'extrémité droite de la poutre ($z=L$) :

$y_{max} = \frac{-PL^3}{3EI_X}$; le signe (-) indique que la flèche se produit vers le bas (sens contraire à celui de l'axe Y).

Exemple 02 :

Poutre reposant sur deux appuis. Même question que l'exercice 01.



En utilisant les équations d'équilibre statique, on détermine les réactions :

- Réactions : $R_A = \frac{P \times b}{L}$; $R_B = \frac{P \times a}{L}$

– **Tronçon 1 :** $0 \leq z \leq a$

$$M_x = R_A \times z = \frac{P \times b}{L} \times z ; \text{ l'équation de la déformée s'écrit :}$$

$$E \times I_X \times y'' = \frac{P \times b}{L} \times z ; \text{ Ce qui nous donne après l'ère intégration :}$$

$$E \times I_X \times y' = \frac{P \times b}{2 \times L} \times z^2 + c_1 \quad (1)$$

En intégrant une second fois, on aura :

$$E \times I_X \times y = \frac{P \times b \times z^3}{6 \times L} + c_1 \times z + c_2 \quad (2)$$

Pour $z = 0$; $y = y_A = 0$; $c_2 = 0$

– **Tronçon 2 :** $a \leq z \leq L$

$$M_x = R_A \times z - P \times (z - a) = \frac{P \times b}{L} \times z - P \times (z - a)$$

$$E \times I_X \times y'' = \frac{P \times b}{L} \times z - P \times (z - a). \text{ En intégrant on aura :}$$

$$E \times I_X \times y' = \frac{P \times b}{2 \times L} \times z^2 - \frac{P \times (z - a)^2}{2} + c_3 \quad (3)$$

et :

$$E \times I_X \times y = \frac{P \times b \times z^3}{6 \times L} - \frac{P \times (z - a)^3}{6} + c_3 \times z + c_4 \quad (4)$$

Au point C les pentes sont égales : $(1) = (3) \Rightarrow c_1 = c_3$ et les flèches sont également

de mêmes valeurs : $(2) = (4) \Rightarrow c_4 = 0$

Pour $z = L$; $y = y_B = 0$; Ainsi on écrit :

$$E \times I_X \times y = \frac{P \times b \times L^2}{6} - \frac{P \times b^3}{6} + c_3 \times L = 0 \quad \text{ou :} \quad c_3 = \frac{PL(b^2 - L^2)}{6 \times L}$$

Après avoir déterminé les constantes d'intégration, les équations donnant la flèche y en tout point de la poutre s'écrivent :

► $0 \leq z \leq a$

$$E \times I_X \times y = \frac{P \times b \times z^3}{6 \times L} - \frac{P \times b \times (b^2 - L^2) \times z}{6 \times L} \quad \text{ou} \quad E \times I_X \times y = \frac{P \times b}{6 \times L} \times [z^3 - (b^2 - L^2) \times z]$$

► $a \leq z \leq L$

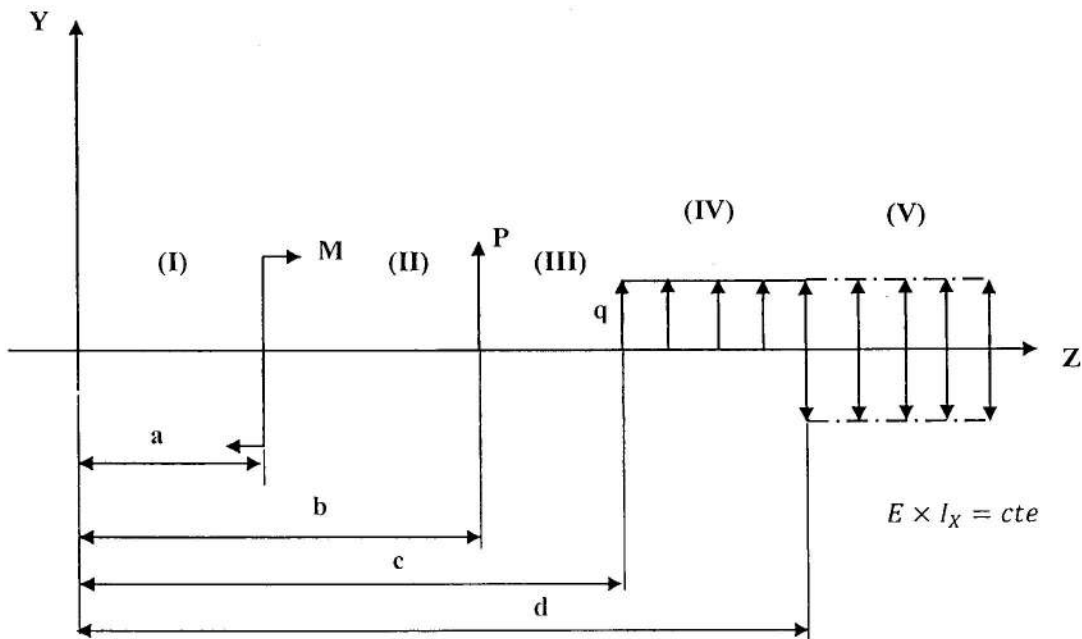
$$E \times I_X \times y = \frac{P \times b \times z^3}{6 \times L} - \frac{P \times (z - b)^3}{6} + \frac{P \times b \times (b^2 - L^2)}{6 \times L}$$

Ou :

$$E \times I_X \times y = \frac{P \times b}{6 \times L} \times \left[z^3 - \frac{L}{b} \times (z - a)^3 - (L^2 - b^2) \times z \right]$$

Ces deux équations expriment la courbe de la poutre fléchie. Chaque équation est valable dans son intervalle respectif.

IX.3 Équation universelle de la déformée d'une poutre



La détermination de la flèche avec la méthode d'intégration ce n'est pas commode si le nombre de tronçon est élevé. On utilise alors l'équation universelle de ma déformée (méthode des paramètres initiaux).

Ecrivons les expressions de M_x pour les différents tronçons :

I) $M_x = 0$

II) $M_x = M$

III) $M_x = M + P \times (z - b)$

IV) $M_x = M + P \times (z - b) + q \times \frac{(z-c)^2}{2}$

V) $M_x = M + P \times (z - b) + q \times \frac{(z-c)^2}{2} - q \times \frac{(z-d)^2}{2}$

Ecrivons la 1^{ère} intégration sans développer les parenthèses. Pour maintenir la monotonie des expressions obtenues, écrivons l'intégrale de M sous la forme $M \times (z - a)$ ce qui interviendra seulement sur la valeur de la constante d'intégration.

Pour la pente de la déformée on obtient :

I) $E \times I_x \times y' = C_1$

II) $E \times I_x \times y' = C_2 + M \times (z - a)$

III) $E \times I_x \times y' = C_3 + M \times (z - a) + P \times \frac{(z-b)^2}{2}$

IV) $E \times I_x \times y' = C_4 + M \times (z - a) + P \times \frac{(z-b)^2}{2} + q \times \frac{(z-c)^3}{6}$

V) $E \times I_x \times y' = C_5 + M \times (z - a) + P \times \frac{(z-b)^2}{2} + q \times \frac{(z-c)^3}{6} - q \times \frac{(z-d)^3}{6}$

Les constantes d'intégration se déterminent à partir des conditions de continuité de la fonction y' aux points de rencontre des tronçons.

Pour $z = a$, $y'_1 = y'_2$. pour $z = b$, $y'_2 = y'_3$ etc.....

La rigidité de la poutre est constante :

$$E \times I_X = \text{constant}, \text{ on a : } c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5$$

La pente $y'_0 = \theta_0$ de la déformée à l'origine des coordonnées se détermine à partir de l'expression du 1^{er} tronçon : $E \times I_X \times \theta_0 = c_1$

L'équation (V) devient :

$$E \times I_X \times \theta_{(z)} = E \times I_X \times \theta_0 + M \times (z - a) + P \times \frac{(z - b)^2}{2} + q \times \frac{(z - c)^3}{6} - q \times \frac{(z - d)^3}{6}$$

Où :

$$\theta_{(z)} = \theta_0 + \frac{1}{E \times I_X} \times \left[M \times (z - a) + P \times \frac{(z - b)^2}{2} + q \times \frac{(z - c)^3}{6} - q \times \frac{(z - d)^3}{6} \right]$$

La 2^{ème} intégration des expressions ci-dessous nous conduit à :

$$\text{I) } E \times I_X \times y = D_1 + E \times I_X \times \theta_0 \times z$$

$$\text{II) } E \times I_X \times y = D_2 + E \times I_X \times \theta_0 \times z + M \times \frac{(z - a)^2}{2}$$

$$\text{III) } E \times I_X \times y = D_3 + E \times I_X \times \theta_0 \times z + M \times \frac{(z - a)^2}{2} + P \times \frac{(z - b)^3}{6}$$

$$\text{IV) } E \times I_X \times y = D_4 + E \times I_X \times \theta_0 \times z + M \times \frac{(z - a)^2}{2} + P \times \frac{(z - b)^3}{6} + q \times \frac{(z - c)^4}{24}$$

$$\text{V) } E \times I_X \times y = D_5 + E \times I_X \times \theta_0 \times z + M \times \frac{(z - a)^2}{2} + P \times \frac{(z - b)^3}{6} + q \times \frac{(z - c)^4}{24} - q \times \frac{(z - d)^4}{24}$$

$$\text{Avec : } D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5$$

$$\text{Soit } y_0, \text{ l'ordonnée de la déformée à l'origine des coordonnées : } E \times I_X \times y_0 = D_1$$

Ainsi l'équation universelle de la déformée d'une poutre s'écrit :

$$E \times I_X \times y_{(z)} = E \times I_X \times y_0 + E \times I_X \times \theta_0 \times z \text{ | I} + M \times \frac{(z - a)^2}{2} \text{ | II} + P \times \frac{(z - b)^3}{6} \text{ | III} + q \times \frac{(z - c)^4}{24} \text{ | IV} - q \times \frac{(z - d)^4}{24} \text{ | V}$$

Où :

$$y(z) = y_0 + \theta_0 \times z + \frac{1}{E \times I_x} \times \left[M \times \frac{(z-a)^2}{2} + P \times \frac{(z-b)^3}{6} + q \times \frac{(z-c)^4}{24} - q \times \frac{(z-d)^4}{24} \right]$$

Les expressions précédentes de θ_0 et y_0 peuvent être généralisées :

$$y(z) = y_0 + \theta_0 \times z + \frac{1}{E \times I_x} \times \left[\sum M_i \times \frac{(z-a_i)^2}{2} + \sum P_i \times \frac{(z-b_i)^3}{6} + \sum q_i \times \frac{(z-c_i)^4}{24} - \sum q_i \times \frac{(z-d_i)^4}{24} \right]$$

Et

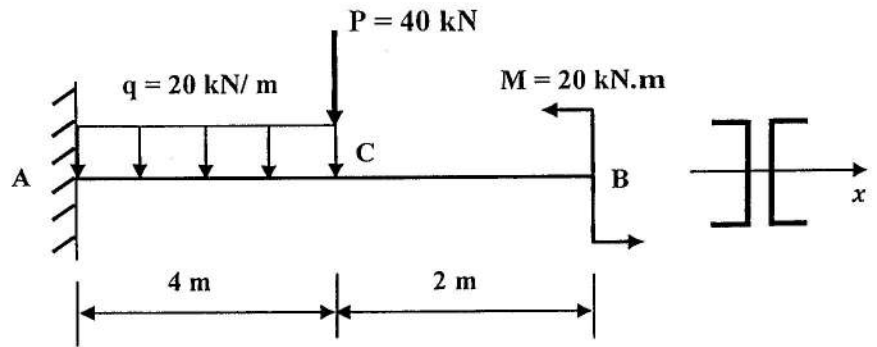
$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{E \times I_x} \times \left[\sum M_i \times (z-a_i) + \sum P_i \times \frac{(z-b_i)^2}{2} + \sum q_i \times \frac{(z-c_i)^3}{6} - \sum q_i \times \frac{(z-d_i)^3}{6} \right]$$

Application :

Une poutre est constituée de deux profilés en U.

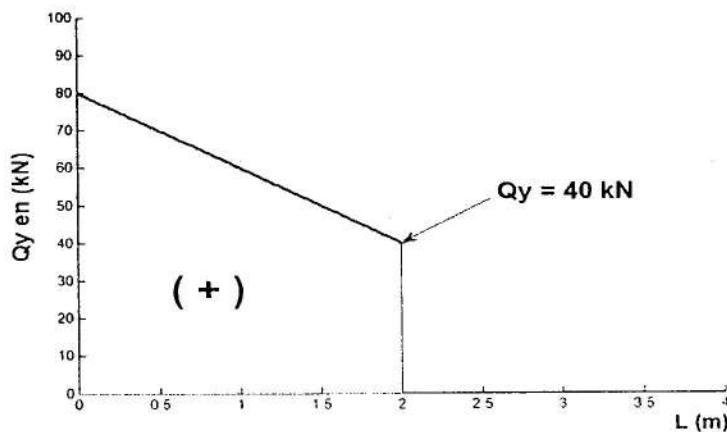
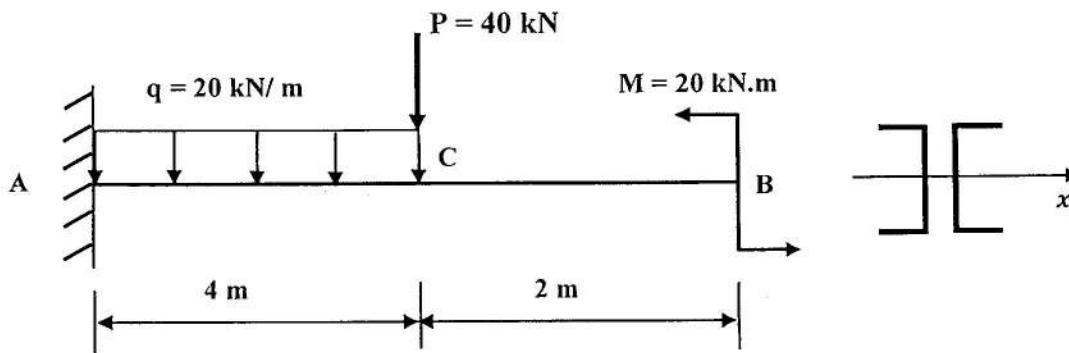
déterminer le numéro du profilé et calculer le déplacement de la section « C » sachant que :

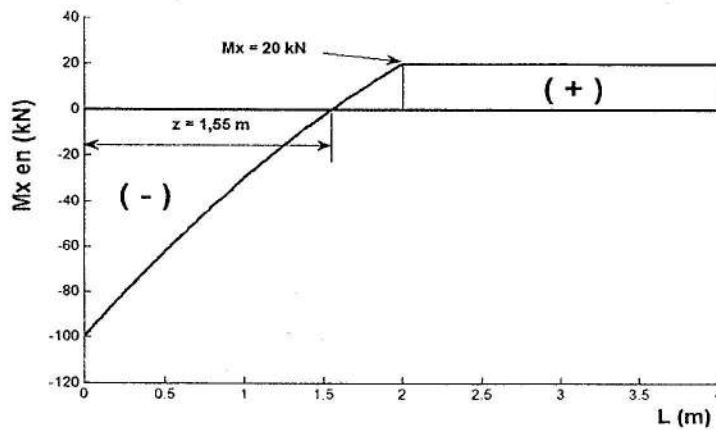
$[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$



Solution :

Diagramme de l'effort tranchant et moment fléchissant.





1/ Calcul des réactions :

$$\sum M(P)/A = 0 \Rightarrow M_A = 100 \text{ kN} \times \text{m} ; \sum P_V = 0 \Rightarrow R_A = 80 \text{ kN}$$

2/ Calcul du n° du profilé en U :

A partir de la condition de résistance : $\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} \leq [\sigma]$, le profilé est U n°27.

3/ Calcul de la flèche au point « C » : $f_C = y_C$?

$$y_{(z)} = y_0 + \theta_0 \times z \frac{1}{E \times I_x} \times \left[-M_A \times \frac{z^2}{2} + R_A \times \frac{z^3}{6} - \frac{P \times (z-2)^3}{6} - q \times \frac{z^4}{24} + q \times \frac{(z-2)^4}{24} \right]$$

Avec : $y_0 = 0$ et $\theta_0 = 0$; d'où : $y_C = -12,02 \text{ mm} \Rightarrow y_C = -1,2 \text{ cm}$

SOLLICITATIONS COMPOSÉES

X.1 Généralités

Les sollicitations simples (compression, cisaillement, torsion, flexion simple et traction) agissent isolément :

Les contraintes et les déformations qu'elles provoquent se calculent assez facilement. Or les organes de machines, les poutres, les charpentes métalliques : subissent le plus souvent les sollicitations complexes et simultanées dites **sollicitations composées**.

Flexion accompagnée de traction ou de compression, flexion accompagnée de torsion, torsion accompagné de compression ou traction. Le mode de calcul des contraintes et des déformations engendré par ces sollicitations composées est l'objet de ce chapitre.

X.2 Flexion déviée simple

X.2.1 Définition

On parle de flexion déviée simple ou flexion oblique lorsque les sollicitations qui provoquent la flexion agissent dans un plan passant par l'axe de la poutre mais ne coïncident avec aucun des plans principaux (figure 10.1).

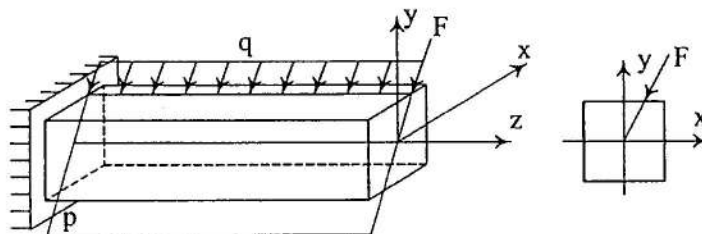


Figure 10.1 : Poutre en flexion déviée.

Le plus commode est de considérer la flexion déviée comme la combinaison de deux (02) flexions simples agissant dans les deux plans principaux ZX et ZY.

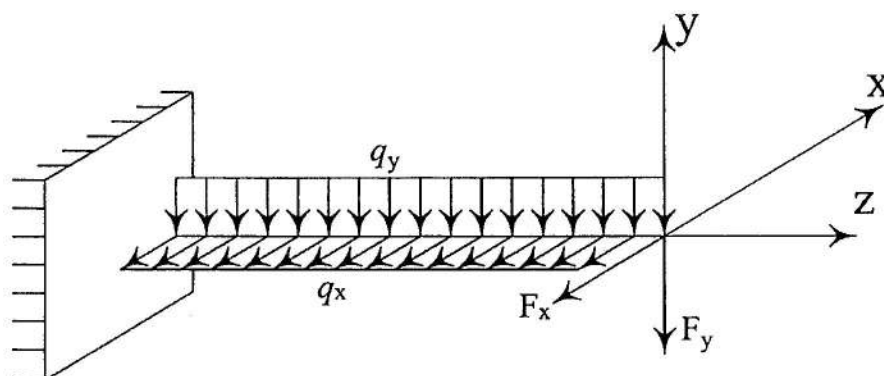
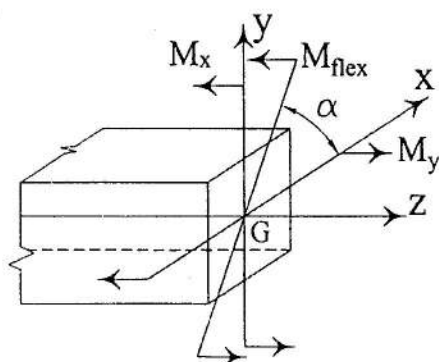


Figure 10.2 : Décomposition de la charge en deux directions.

Remarque : En flexion déviée simple, $N = 0$.

X.2.2 Contraintes et Déformations (déplacements)

Pour étudier les contraintes et les déplacements, le plus simple est de décomposer le moment fléchissant M_{flex} en ses composants selon les axes principaux X et Y (figure 10.3).



$$M_x = M_{flex} \times \sin \alpha$$

$$M_y = M_{flex} \times \cos \alpha$$

Figure 10.3 : Décomposition du moment en deux sens.

Remarque : Si M_{flex} provient d'une force transversale, il revient au même de décomposer d'abord cette force selon les axes X et Y puis de calculer M_x et M_y à partir des deux composantes de la force (figure 10.4).

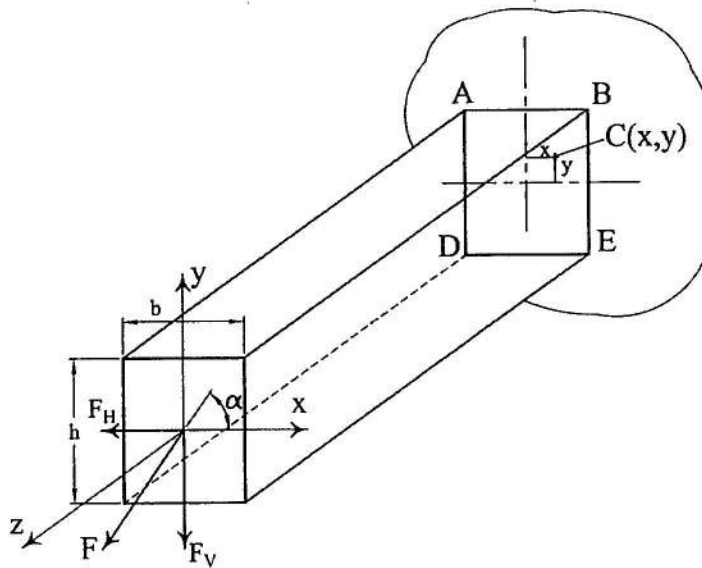


Figure 10.4 : Décomposition de la force transversale en deux directions.

Dans la section d'appui :

- Le moment fléchissant subit par la section de la barre dans le plan vertical d'axe neutre X :

$$M_X = F_V \times L = F \times L \times \sin \alpha$$

- Le moment fléchissant subit par la section de la barre dans le plan horizontal d'axe neutre Y :

$$M_Y = F_H \times L = F \times L \times \cos \alpha$$

a) Contraintes Normales

Les contraintes normales pour des points situés dans le premier quadrant du système (par exemple le point c) se détermine par la somme dues au moment M_X et M_Y en vertu du principe de superposition.

$$\sigma(x,y) = \frac{M_X}{I_X} \times y + \frac{M_Y}{I_Y} \times x$$

$$\text{Où } \sigma(x,y) = M_{flex} \left(\frac{y}{I_X} \times \sin \alpha + \frac{x}{I_Y} \times \cos \alpha \right)$$

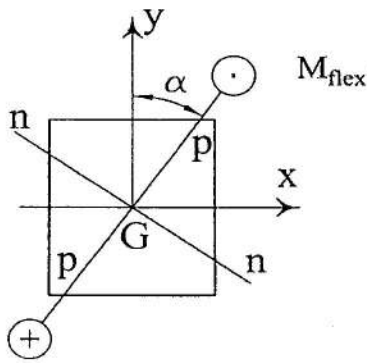
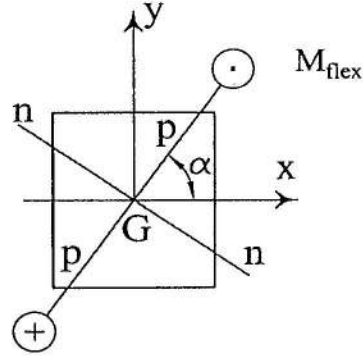
Remarque : le somme est algébrique.

b) La ligne neutre

C'est le lieu géométrique des points où $\sigma(x, y) = 0$.

Elle a pour équation : $y = -x \times \frac{I_x}{I_y} \times \cot \alpha$

Remarque 1 : Si α est l'angle de déviation de la trace pp du plan d'application des forces avec l'axe y.



n-n : ligne neutre

p-p : ligne de force ou de moment fléchissant.

$$y = -x \times \frac{I_x}{I_y} \times \tan \alpha$$

Remarque 2 : En flexion déviée, la ligne neutre n-n n'est pas perpendiculaire au plan du moment fléchissant.

c) Détermination des points dangereux

Les points présentant un danger sont les points de la section où apparaît la contrainte maximale en valeur absolue. Etant donné que l'épure des contraintes normales dans la section est linéaire, $\sigma(x, y)$ max apparaît aux points les plus éloignés de la ligne neutre.

Si (x_1, y_1) sont les coordonnées de ce point alors de ce point alors :

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} \times y_1 + \frac{M_y}{I_y} \times x_1$$

Si la section comporte les points angulaires en saillie () telle que x_{max} et y_{max} sont atteints simultanément (section rectangulaire et section en H). Les points présentant un danger sont les points angulaires de la section où sont sommées les contraintes de même signe.

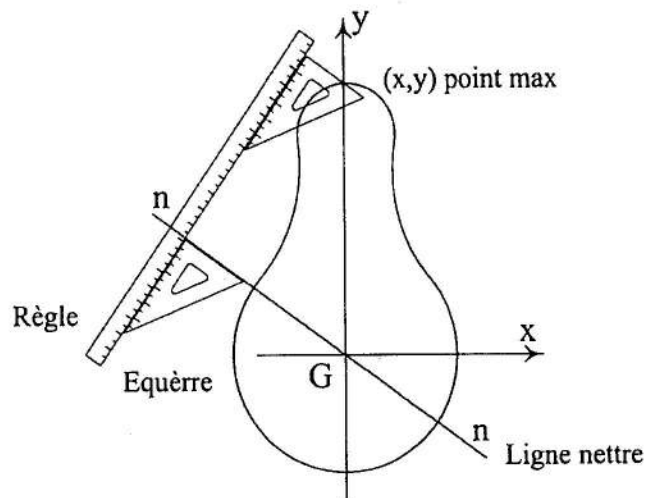
Par exemple sur le schéma (Figure d) les points les plus dangereux sont B et E.

$$\sigma_B = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \quad \text{et} \quad \sigma_E = -\frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y}$$

où :

$W_X = \frac{2 \times I_X}{h}$: Moment de résistance de la section par rapport à l'axe X.

$W_Y = \frac{2 \times I_Y}{b}$: Moment de résistance de la section par rapport à l'axe Y.



d) Choix de la section

Les sections des poutres sont choisies selon les contraintes normales par essais suivi de vérification. Le 1^{er} essai peut se faire à l'aide de la formule de flexion plane d'après la composante du moment fléchissant qui exige de grande dimension.

Pour des sections s'inscrivant dans un rectangle, le 1^{er} essai se fait à l'aide de la formule suivante :

$$W_X \geq \frac{M_X + C \times M_Y}{[\sigma]} \quad \text{où} \quad C = \frac{W_X}{W_Y}$$

Pour une section rectangulaire (b, h) $\Rightarrow C = \frac{h}{b}$

Pour une section en double T^e laminée $\Rightarrow C = 8$

Pour une section en U $\Rightarrow C = 6$

e) Calcul des flèches et rotations

En flexion déviée, les flèches et les rotations sont déterminés séparément dans chaque point soit par :

Intégration de l'équation de l'axe fléchi, soit suivant la méthode de Mohr par les équations universelles.

La flèche globale est la somme géométrique des composantes des flèches constitutives.

$$f_{totale} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

Où f_x et f_y : sont les flèches dans les plans f_x et f_y .

La rotation résultante se calcule aussi de la même manière :

$$\theta_{totale} = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$$

Où θ_x et θ_y : sont des rotations de la section autour des axes X et Y.

Remarques :

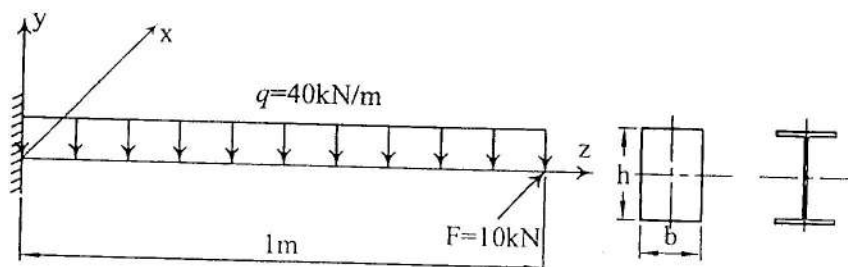
- La flèche totale a lieu dans un plan perpendiculaire à l'axe neutre.
- La rotation résultante s'effectue autour de l'axe neutre.
- La position de la déformé (forme de déformation) est déterminée par la formule :

$$\tan \beta' = \frac{f_x}{f_y}$$

Où β' est l'angle formé par la direction du déplacement vertical résultant et l'axe Y.

Exemple d'application.

Choisir la section de la poutre fléchie suivant deux plans comme indiqué sur la figure ci-dessous. On donne $[\sigma] = 160 \text{ MPa} = 160 \times 10^3 \text{ kPa}$.



Solution :

a) Section rectangulaire

Donnée en plus : on adopte la rotation optimale :

$$\frac{h}{b} = \frac{W_X}{W_Y} = 2 \quad \text{c.à.d : } h = 2 \times b$$

Condition de résistance : $\sigma_{max} \leq [\sigma]$

$$\sigma_{max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{max} = \frac{20 \times 6}{b \times (2 \times b)^2} + \frac{10 \times 6}{2 \times b \times b^2}$$

$$\sigma_{max} = 160 \times 10^3 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow b = 7,2 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow h = 14,4 \times 10^{-2} \text{ m} \text{ et l'aire : } A_1 = 104 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

b) Section en H

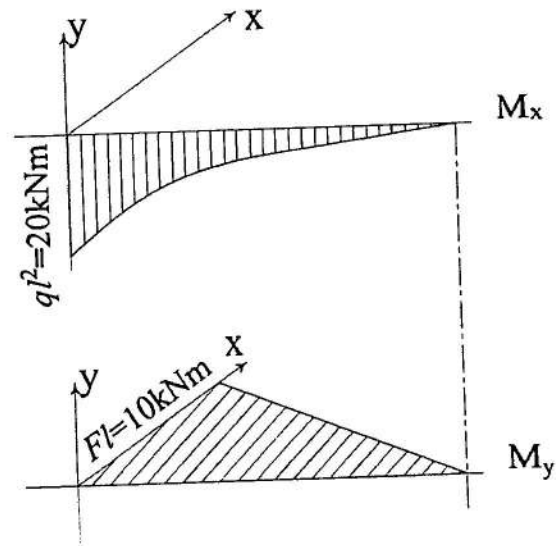
Donnée : on adopte la section H n° 36

$$\Rightarrow \begin{cases} W_X = 743 \text{ cm}^3 = 743 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \\ W_Y = 71,1 \text{ cm}^3 = 71,1 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \\ A = 61,9 \text{ cm}^2 = 61,9 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma]$$

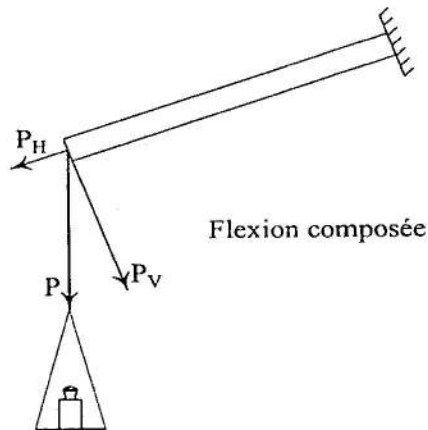
$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{20}{743 \times 10^{-6}} + \frac{10}{71,1 \times 10^{-6}} = 27 \times 10^3 + 140 \times 10^3 = 167 \times 10^3 \text{ kPa}$$

Elle dépasse $[\sigma]$ mais de 4,4 %, donc $4,4 \% < 5 \% \Rightarrow$ c'est admissible.



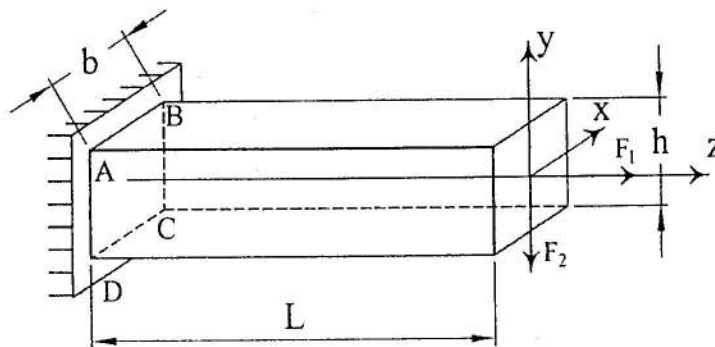
X.3 Flexion Composée

Une poutre est sollicitée en flexion composée lorsqu'elle est soumise simultanément à une flexion plane ou déviée et à un effort normal.



X.3.1 Flexion plane composée

Soit une poutre soumise simultanément à la flexion plane et à la traction (flexion plane composée).



a) Calcul des contraintes

Pour déterminer les contraintes globales, on utilise le principe de la superposition des effets.

- Les contraintes dues à F_1 (traction). $\sigma_t = \frac{F_1}{S} = \frac{N}{S}$ avec $F_1 = N \Rightarrow$ dans notre cas.
- Les contraintes dues à F_2 (flexion plane). $\sigma_f = \frac{M_X}{I_X} \times y$

\Rightarrow Les contraintes globales (flexion plane composée) : $\sigma = \sigma_t + \sigma_f = \frac{N}{S} + \frac{M_X}{I_X} \times y$

Remarques :

- La contrainte globale atteint ses extrema pour les fibres les plus éloignées de l'axe neutre.

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{N}{S} + \frac{M_X}{W_{1,X}} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{N}{S} - \frac{M_X}{W_{2,X}}$$

- Les contraintes tangentielles provoquées par l'effort tranchant peuvent se calculer par la formule de Jourasky :

$$\tau_Y = \frac{T_Y \times S_X}{b \times I_X} \quad \text{et} \quad \tau_X = \frac{T_X \times S_Y}{h \times I_Y}$$

- ✓ Puisqu'elles sont nulles dans les fibres extrêmes où les contraintes sont extrêmes, elles ne jouent aucun rôle dans la résistance et de ce fait, on ne s'intéresse ici qu'aux contraintes normales.
- ✓ Cependant, il faut vérifier à part si les contraintes tangentielles sont admissibles.

b) Condition de résistance

- Pour les barres qui résistent de la même façon à la traction (ex : acier) et à la compression, la condition de la résistance est de forme :

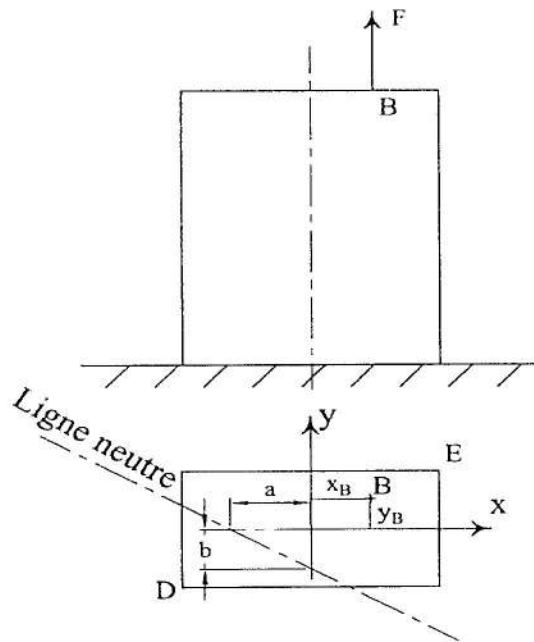
$$\sigma_{max} = \frac{N}{S} + \frac{M_X}{W_X} \leq [\sigma]$$

Remarques :

- Si l'effort tranchant est pris en considération, pour déterminer la section dangereuse et moment fléchissant maximal, il faut construire au préalable, le diagramme des moments fléchissants.
- Pour les barres qui résistent de façon différente à la traction et à la compression, la résistance doit être vérifiée vis-à-vis des contraintes de traction et des contraintes de compression (deux vérifications à faire).

X.3.2 Flexion déviée composée

En pratique, la flexion se trouve souvent combinée avec la traction (compression) suite à une application excentrée de la sollicitation parallèle à l'axe de la barre en sorte que la résultante F ne coïncide pas avec l'axe de cette dernière.



a) Calcul des contraintes

En appliquant la méthode des sections, on a dans toute section droite, on a :

- Un effort normal : $N = F$
- Un moment fléchissant par rapport à l'axe X : $M_X = F \times y_f = N \times y_f$
- Un moment fléchissant par rapport à l'axe Y : $M_Y = F \times x_f = N \times x_f$

Par superposition, la contrainte en un point quelconque de la section droite de coordonnées (x, y) est égale :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_X}{I_X} \times y + \frac{M_Y}{I_Y} \times x$$

Pour les sections possédant les points anguleux saillants les contraintes extrema s'écrivent :

$$\sigma = \frac{N}{S} \pm \frac{M_X}{W_X} \pm \frac{M_Y}{W_Y}$$

Où W_X et W_Y : couple de réactions par rapport aux axes X et Y.

- ✓ Dans notre exemple, la contrainte maximale est au point E.

$$\sigma_E = \frac{N}{S} + \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y}$$

- ✓ La contrainte min (sens algébriques) se trouve au point D.

$$\sigma_D = \frac{N}{S} - \frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y}$$

b) Condition de résistance

Par rapport aux contraintes de tractions, elles s'écrivent :

$$\sigma_t = \frac{N}{S} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]^t$$

c) L'équation de la ligne neutre

Pour déterminer la position des points dangereux, il faut établir la position de la ligne neutre, dont l'équation s'obtient en annulant la contrainte.

$$\frac{N}{S} + \frac{N \times y_f}{I_x} \times y_0 + \frac{N \times x_f}{I_y} \times x_0 = 0$$

Où x_0 et y_0 : coordonnées courantes des points de l'axe neutre, introduisons les notations :

$$i_x^2 = \frac{I_x}{S} \quad \text{et} \quad i_y^2 = \frac{I_y}{S}$$

Les quantités suivantes : $i_x = \sqrt{I_x/S}$ et $i_y = \sqrt{I_y/S}$, caractérisant la géométrie de la

section et s'appellent les *RAYONS DE GIRATION* de la section par rapport aux axes X et Y.

Maintenant, la formule précédente devient :

$$\frac{N}{S} \times \left(1 + \frac{x_f \times x_0}{i_y^2} + \frac{y_f \times y_0}{i_x^2} \right) = 0$$

Comme : $\frac{N}{S} \neq 0$, alors :

$$1 + \frac{x_f \times x_0}{i_y^2} + \frac{y_f \times y_0}{i_x^2} = 0, \quad \text{Où bien : } \frac{x_0}{-\frac{i_y^2}{x_f}} + \frac{y_0}{-\frac{i_x^2}{y_f}} = 1$$

On peut la mettre sous la forme de la droite :

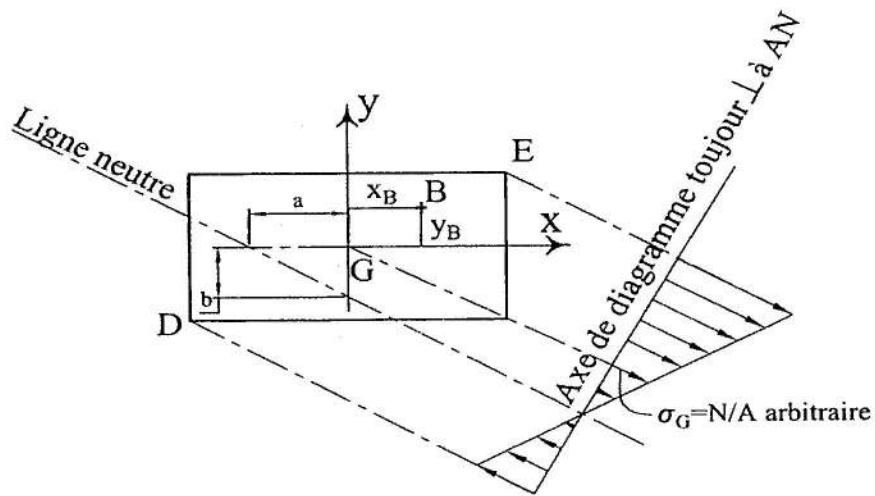
$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1$$

où $a = -\frac{i_y^2}{x_f}$ et $b = -\frac{i_x^2}{y_f}$ sont les segments sectionnés par la ligne nulle sur les axes de coordonnées x et y.

Remarque :

Le rayon de giration est toujours positif. Par contre a et x_f ainsi que b et y_f ont des signes différents.

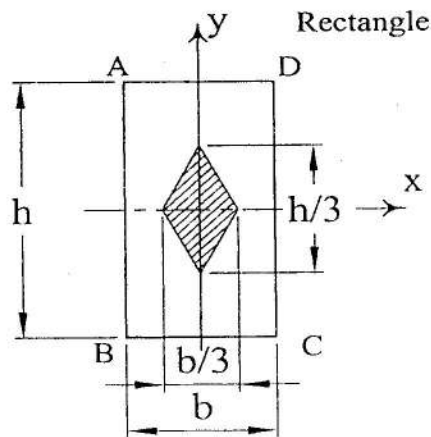
d) Diagramme des contraintes



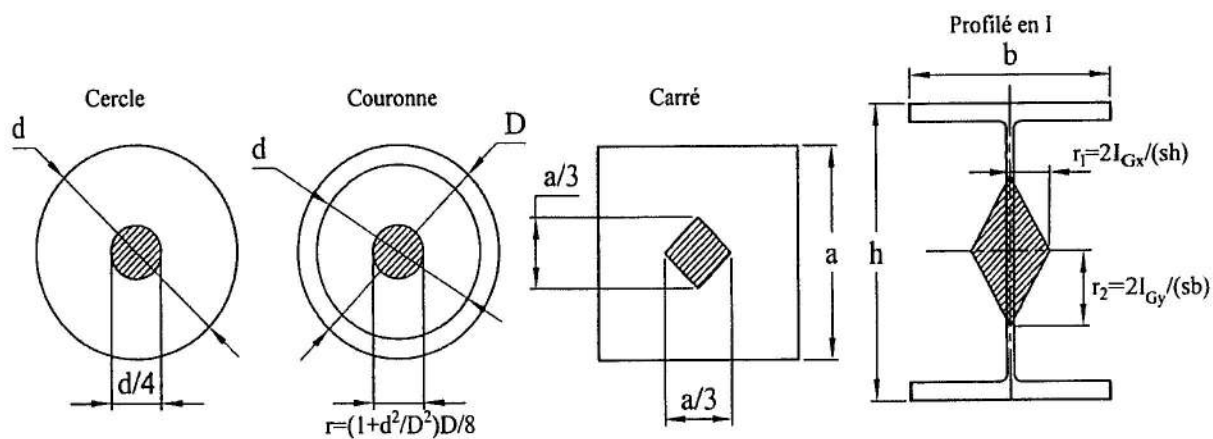
e) Noyau central de la section

Pour les matériaux qui résistent mal à la traction (par exemple une maçonnerie en brique), il est intéressant de trouver la région de la section droite dans laquelle l'effort normal de compression excentré peut agir sans produire aucune contrainte de traction. Cette région est le noyau central de la section.

Il en résulte que la ligne de contrainte nulle ne coupe jamais la section, lui étant au plus tangente. Cette propriété permet de déterminer le noyau central illustré ici pour la section rectangulaire.



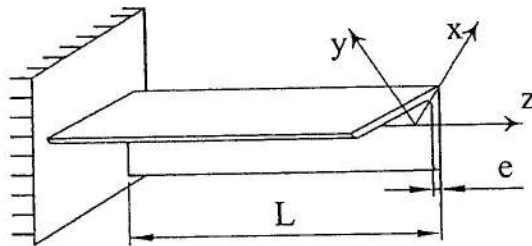
f) Noyaux centraux des sections usuelles



Application :

Une poutre en profilé en forme de cornière encastéré en son extrémité est soumise à son poids propre. On demande de déterminer la contrainte maximale à l'encastrement.

Données : $L = 3 \text{ m}$, profilé n°10, épaisseur du profilé : $e = 10 \text{ mm}$.



Poids du profilé (table) : $q = 0,151 \text{ kgf/cm}$.

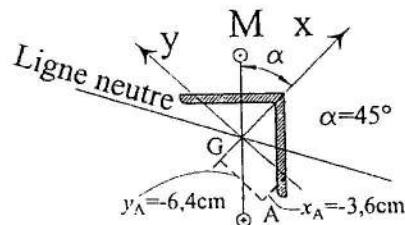
Moments d'inertie :

$$I_X = I_{\max} = 284 \text{ cm}^4 \quad \text{et} \quad I_Y = I_{\min} = 74,9 \text{ cm}^4$$

Solution :

Le moment fléchissant maximal se trouve à l'encastrement, sa valeur est :

$$M = \frac{q \times l^2}{2} = 6790 \text{ kgf} \times \text{cm}$$



Dessignons à l'échelle, la section droite et traçons les axes principaux centraux X et Y.

- Ligne neutre (flexion simple déviée)

$$y = -x \times \frac{I_X}{I_Y} \times \cot \alpha \Rightarrow y = -x \times \frac{284}{74,9} \times \cot 45 \Rightarrow y = -3,79 \times x$$

- Les coordonnées du point A (le point le plus éloigné de l'axe neutre) :

$$x_A = -3,6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad y_A = -6,4 \text{ cm} \quad (\text{dessin en toute grandeur}).$$

- La contrainte maximale : $\sigma_{max} = \frac{M_X}{I_X} \times y_A + \frac{M_Y}{I_Y} \times x_A$

Où : $M_X = M \times \sin \alpha$ et $M_Y = M \times \cos \alpha \Rightarrow M_X = M_Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \times M$

Donc : $\sigma_{max} = -\frac{4750 \times 60}{284} - \frac{4750 \times 3,6}{74,9} \Rightarrow \sigma_{max} = -335 \text{ kgf/cm}^2$

REFERENCES

- [1] BEER, Ferdinand P., JOHNSTON, E. Russell, MAZUREK, David F., *et al. Mechanics of materials - SEVENTH EDITION*, McGraw-Hill Companies, 2015.
- [2] JANCO, Roland et HUCKO, Branislav. *Introduction to Mechanics of Materials: Part II*. 2014.
- [3] BANSAL, R. K. *A textbook of strength of materials*. Laxmi Publications, 2010.
- [4] ROSS, Carl TF, CHILVER, A., *et al. Strength of materials and structures*. Elsevier, 1999.
- [5] BEER JR, Ferdinand P. E. Russell Johnston, John T. Dewolf, and David F. Mazurek. *Mechanics of Materials*. McGraw-Hill, New York, 2011.
- [6] CASE, John et CHILVER, Amos Henry. *Strength of materials and structures: an introduction to the mechanics of solids and structures*. Elsevier, 2013.
- [7] DELAPLACE, Arnaud, GATUINGT, Fabrice, et RAGUENEAU, Frédéric. *Aide-mémoire de mécanique des structures: Résistance des matériaux*. Hachette, 2008.
- [8] DOUBRERE J.C. *Résistance des matériaux : cours et exercices corrigés*. Eyrolles, 2010.
- [9] PATNAIK, Surya et HOPKINS, Dale. *Strength of materials: a new unified theory for the 21st century*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [10] DA SILVA, Vitor Dias. *Mechanics and strength of materials*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [11] BOURAHLA, Nouredine. *Résistance des matériaux de base*. GEOTEC, Université Saad Dahlab de Blida, 2005.